В.А. ГАЛАКТИОНОВ, С.П. КУРДЮМОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМ СТОКОМ

В работе рассматривается задача Коши для полулинейного параболического уравнения, описывающего диффузию тепла в среде с нелинейным поглощением энергии:

(1) $\mathbf{B}(u) \equiv u_t - \Delta u + u^\beta \equiv 0, \quad t > 0, \quad x \in R^N,$

(2) $u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}^N), \quad \sup u_0 < \infty.$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $\beta > 1$ – фиксированная постоянная. Начальная функция u_0 в (2) такова, что $u_0(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$.

В первой части работы дано описание семейства автомодельных решений уравнения (1) вида

(3) $$u_A(t, x) = (T + t)^{-1/(\beta-1)}\theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T+t)^{1/2}}; \quad T = \text{const} > 0,$$

где четная функция $\theta_A(\xi) > 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Установлено, что при любых $\beta > 1$ существует бесконечное множество автомодельных решений, причем его структура различна в случаях $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ и $\beta \geqslant 1 + 2/N$. Во второй части формулируются теоремы об асимптотической устойчивости всех автомодельных решений относительно возмущений начальной функции. Таким образом, решения (3) являются своеобразными собственными функциями (СФ) нелинейной сплошной среды (1), которые определяют асимптотическую эволюцию широкого класса "неавтомодельных" начальных возмущений. В случае $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ решения (3) исчерпывают весь набор радиально симметричных СФ. При $\beta \geqslant 1 + 2/N$ существуют классы решений с асимптотикой, отличной от (3) (см. также [1]). СФ горения нелинейной среды с источником

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad \sigma \geqslant 0, \quad \beta > 1,$$

подробно рассмотрены в [2–4] (см. библиографию в [5, 6] и, кроме того, [7]). В дальнейшем используются некоторые из полученных там результатов. При доказательстве большинства теорем не использовалась полулинейная структура уравнения (1). Поэтому многие результаты работы без принципиальных изменений переносятся на случай квазилинейного уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1} - u^\beta$, где $\beta > \sigma + 1$.

1. Автомодельные решения. После подстановки выражения (3) в (1) получается следующее уравнение для $\theta_A(\xi) > 0$:

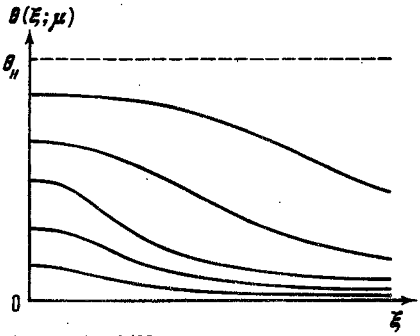
(4) $$\mathbf{A}_R(\theta_A) \equiv \frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta_A')' + \frac{1}{2}\theta_A'\xi + \frac{1}{\beta-1}\theta_A^\beta = 0, \quad \xi > 0.$$

Оно имеет очевидное однородное решение $\theta_A \equiv \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$, все остальные должны удовлетворять краевым условиям

(5) $\theta_A'(0) = 0, \quad \theta_A(+\infty) = 0.$

Одновременно удобно рассмотреть семейство задач

(6) $\mathbf{A}_R(\theta) = 0, \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(0) = \mu,$



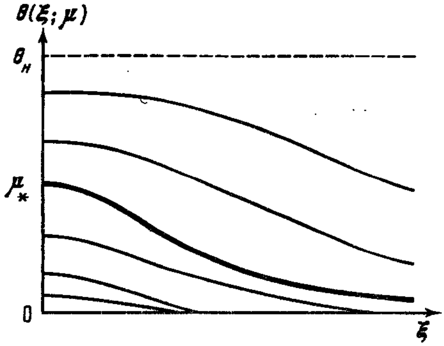


Рис. 1. $\beta \geqslant 1 + 2/N$

Рис. 2. $\beta \in (1,\ 1 + 2/N)$. **Жирной линией выделено решение с "экспоненциальной" асимптотикой**

где $\mu > 0$ выступает в роли параметра. Решение задачи (6) будем обозначать $\theta(\xi;\ \mu)$. Требуется отыскать такие $\mu > 0$, чтобы $\theta(\xi;\ \mu) > 0$ в $\mathbf{R}^1_+$ (тогда $\theta(+\infty,\ \mu) = 0$). Легко видеть, что можно ограничиться интервалом $\mu \in (0,\ \theta_H)$ и при этом функции $\theta(\xi;\ \mu)$ монотонно убывают по ξ. Анализ уравнения (6) вблизи бесконечно удаленной точки ($\theta \to 0^+$) дает следующие асимптотики возможных решений: "степенную"

(7) $\quad \theta(\xi;\ \mu) = C\xi^{-2/(\beta-1)} + \ldots, \qquad C = \mathrm{const} > 0,$

либо "экспоненциальную"

(8) $\quad \theta(\xi;\ \mu) = D\xi^{1/(\beta-1)-N/2}\exp(-\xi^2/4) + \ldots, \qquad D = \mathrm{const} > 0.$

Теорема 1. *Пусть* $\beta \geqslant 1 + 2/N$. *Тогда при всех* $\mu \in (0, \theta_H)$:

1) $\theta(\xi;\ \mu) > 0$ *в* $\mathbf{R}^1_+$;

2) $\theta(+\infty;\ \mu) = 0$, *причем* $\theta(\xi;\ \mu)$ *не может иметь при* $\xi \to +\infty$ *"экспоненциальную" асимптотику*;

3) *функция* $\theta(\xi;\ \mu)$ *монотонно возрастает по* μ *при* $\xi \in R^1_+$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta \in (1, 1 + 2/N)$. *Тогда*:

1) *при всех* $0 < \mu \leqslant [1/(\beta - 1) - N/2]^{1/(\beta-1)} = \mu_0$ *функция* $\theta(\xi;\ \mu)$ *обращается в нуль в некоторой точке*;

2) *при* $\mu \in (\mu_0, \theta_H)$ *существует по крайней мере одно положительное решение* θ *с "экспоненциальной" асимптотикой и бесконечное множество решений, удовлетворяющих* (7);

3) *положим* $\mu_* = \sup\{\mu > 0 \mid \theta(\xi;\ \mu) = 0$ *для некоторого* $\xi = \xi_\mu < +\infty\}$; *тогда* $\mu_* \in (\mu_0, \theta_H)$, *функция* $\theta(\xi;\ \mu_*) > 0$ *в* $\mathbf{R}^1_+$ *и имеет "экспоненциальную" асимптотику.*

Доказательство второй части теоремы 2 основано на построении верхних θ_+ и нижних θ_- ($\theta_+ \geqslant \theta_-$ в $\mathbf{R}^1_+$) решений уравнения (6), между которыми лежит по крайней мере одно решение задачи (4), (5). При этом для решений типа (8) удобно взять

$$\theta_\pm(\xi) = A_\pm \exp(-\alpha_\pm \xi^2), \qquad \theta'_\pm(0) = 0,$$

и тогда необходимо потребовать, чтобы

$$\alpha_\pm \in (0, 1/4), \qquad A_+^{\beta-1} \geqslant \left(\frac{1}{\beta-1} - 2N\alpha_+\right)\exp\left[\frac{\beta-1}{1-4\alpha_+}\left(\frac{1}{\beta-1} - 2N\alpha_+\right)\right],$$

$$\alpha_- = 1/4, \quad A_-^{\beta-1} \leqslant \frac{1}{\beta-1} - \frac{N}{2},$$

а решениям со "степенной" асимптотикой отвечают функции

$$\theta_\pm(\xi) = A_\pm(a_\pm^2 + \xi^2)^{-1/(\beta-1)},$$

где

$$A_+^{\beta-1} \geqslant \frac{a_+^2 - 2N}{\beta-1} + \frac{4\beta}{(\beta-1)^2},$$

$$a_-^2 > 2N, \quad A_-^{\beta-1} \leqslant \frac{a_-^2 - 2N}{\beta-1}$$

(легко проверить, что в последнем случае существенно различных пар функций $\theta_\pm$ бесконечное множество).

На рис. 1 и 2 показано примерное поведение решений $\theta = \theta(\xi;\ \mu)$ при различных $\mu \in (0, \theta_H)$.

2. Асимптотическая устойчивость автомодельных решений. Устойчивость какого-либо решения (3) означает (см., например, [8]), что автомодельное представление решения задачи (1), (2)

$$(9) \qquad \theta_T(t, \xi) = P_T(u(t, x)) = (T+t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi(T+t)^{1/2}), \qquad \xi \in \mathbf{R}^N,$$

сходится при $t \to +\infty$ к автомодельной функции $\theta_A(\xi) = \theta(\xi;\ \mu)$ для всех $u_0 \in W_A$ (W_A — "множество притяжения" данного решения).

2.1. Случай $\beta > 1 + 2/N$. Ниже сформулированы теоремы о равномерной в $\mathbf{R}^N$ стабилизации $\theta_T \to \theta_A$ при $t \to +\infty$.

Теорема 3. *Пусть при $\beta > 1 + 2/N$ существует такое $T > 0$, что $u_0(x) - T^{-1/(\beta-1)}\theta_A(|x|T^{-1/2}) \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Тогда*

$$\| \theta_T(t, \xi) - \theta_A(|\xi|) \|_{C(\mathbf{R}^N)} = O(t^{-N/2+1/(\beta-1)}) \to 0, \qquad t \to +\infty;$$

$$\| \theta_T(t, \xi) - \theta_A(|\xi|) \|_{L^1(\mathbf{R}^N)} = O(t^{-N/2+1/(\beta-1)}) \to 0, \qquad t \to +\infty.$$

В следующей теореме указано, по-видимому, оптимальное множество притяжения W_A, отвечающее данной автомодельной функции θ_A.

Теорема 4. *Пусть при $\beta > 1 + 2/N$ найдется такое $T > 0$, что*

$$u_0(x) - T^{-1/(\beta-1)}\theta_A(|x|T^{-1/2}) = o(|x|^{-2/(\beta-1)}), \qquad \|x\| \to +\infty.$$

Тогда $\theta_T(t, \xi) \to \theta_A(|\xi|)$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\xi \in \mathbf{R}^N$.

Замечание. Теорема верна и при $\theta_A \equiv 0$. Таким образом, если $u_0(x) = o(|x|^{-2/(\beta-1)})$, то $\theta_T(t, \xi) \to 0$ при $t \to +\infty$ (отметим, что это одновременно доказывает отсутствие при $\beta > 1 + 2/N$ функций θ_A с асимптотикой типа (8)). Нетрудно показать, что при любых начальных функциях $u_0(x) = o(|x|^{-2/(\beta-1)})$ асимптотика решения задачи описывается различными автомодельными решениями $v_A(t, x) = t^{-\alpha} f_A(\eta)$, $\eta = |x| t^{-1/2}$, $\alpha = \text{const} \in (1/(\beta - 1), N/2]$ уравнения теплопроводности $v_t = \Delta v$ (этот результат усиливает соответствующее утверждение в [1], где показана сходимость u к v_A при $t \to +\infty$ для случая $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$, чему соответствует значение $\alpha = N/2$).

Заметим, что из последней теоремы вытекает единственность функции $\theta_A(\xi)$, имеющей фиксированную "степенную" асимптотику (7).

2.2. Случай $\beta \leqslant 1 + 2/N$. Предварительно отметим, что доказательство сходимости к автомодельному решению без конкретизации функции θ_A и соответствующего множества W_A можно провести на основе подхода, использованного в [9] применительно к другим задачам. Вводя однопараметрическое семейство функций $u_k(t, \xi) = k^{1/(\beta-1)} u(kt, k^{1/2}\xi)$, удовлетворяющих при любом $k > 0$ исходному уравнению (1), нетрудно показать, что $u_k(t, \xi) \to w(t, \xi)$ при $k = k_i \to +\infty$, где предельная функция также удовлетворяет уравнению (1) (функция w может, вообще говоря, зависеть от выбора подпоследовательности $\{k_i\}$). При этом сходимость равномерна на любом компакте из $[\tau, +\infty) \times \mathbf{R}^N$, $\tau > 0$. Полагая затем $t = 1$ и $k_i = t_i$, имеем $\theta_0(t_i, \xi) \to w(1, \xi) = \theta_A(\xi)$ при $t_i \to +\infty$ (отметим, что здесь $\theta_A(\xi)$ может, вообще говоря, и не быть радиально симметричной). С помощью теоремы 2 доказывается

Теорема 5. *Пусть* $\beta \in (1, 1 + 2/N)$. *Тогда, если* $u_0 \not\equiv 0$, *то* $w(1, \xi) \not\equiv 0$.

Замечание. При $\beta \geqslant 1 + 2/N$ теорема неверна (см. замечание к теореме 4, а также [1]).

Ниже проводится более детальное исследование сходимости к радиально симметричным автомодельным решениям, указанным в теореме 2. Положим в (9) $\tau = \ln(1 + t/T)$ и рассмотрим задачу Коши для автомодельного представления $\theta_T(\tau, \xi)$

$$(10) \qquad \frac{\partial \theta_T}{\partial \tau} = \mathrm{A}(\theta_T) \equiv \Delta\theta_T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (\theta_T)_{\xi_i}\xi_i + \frac{1}{\beta - 1}\theta_T - \theta_T^{\beta} = 0,$$

$$\theta_T(0, \xi) = T^{1/(\beta-1)} u_0(T^{1/2}\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}^N; \qquad \tau > 0.$$

Автомодельные функции $\theta = \theta_A(|\xi|)$ являются стационарными решениями уравнения (10). При построении множеств W_A важную роль играет следующее утверждение [10, 11].

Лемма 1. *Пусть* θ_+ *(соответственно* θ_-*) – верхнее (нижнее) решение уравнения* (4), *т.е.* $\mathrm{A}_R(\theta_+) \leqslant 0$ $(\mathrm{A}_R(\theta_-) \geqslant 0)$ *в* $\mathbf{R}^N$.

Тогда решение $\theta_T(\tau, \xi)$ *уравнения* (10) *с условием* $\theta_T|_{\tau=0} = \theta_+$ $(\theta_T|_{\tau=0} = \theta_-)$ *таково, что* $(\theta_T)_\tau \leqslant 0$ *(соответственно* $(\theta_T)_\tau \geqslant 0$*) всюду в* $\mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^N$.

С помощью этой леммы, например, доказывается

Теорема 6. *Пусть* $u_0 = u_0(|x|)$ *такова, что* $\theta_T(0, \xi) = T^{1/(\beta-1)} u_0(T^{1/2}\xi)$ *является верхним или нижним решением уравнения* (4).

Тогда существует такое его решение θ_A, *удовлетворяющее* (5), *что* $\theta_T \to \theta_A$ *при* $\tau \to +\infty$ *равномерно на каждом компакте из* $\mathbf{R}^N$.

Структура множества притяжения W_A определяется на основе такой леммы.

Лемма 2. *Пусть* θ_+ *и* θ_- $(\theta_+ \equiv \theta_-)$ *– соответственно верхнее и нижнее решения уравнения* (4) *и им отвечает одна единственная автомодельная функция* $\theta_- \leqslant \theta_A \leqslant \theta_+$.

Тогда множество $\{u_0 \geqslant 0|$ *существует такое* $T > 0$, *что* $\theta_-(|\xi|) \leqslant T^{1/(\beta-1)} u_0(T^{1/2}\xi) \leqslant \theta_+(|\xi|)$ *в* $\mathbf{R}^N\}$ *принадлежит* W_A.

Эта лемма применяется для построения множества притяжения автомодельной функции $\theta_A^*(|\xi|) = \theta(|\xi|; \mu_*)$ с "экспоненциальной" асимптотикой (см. теорему 2).

Теорема 7. *Пусть при* $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ *существует такое* $T > 0$, *что*

$$u_0(x) \leqslant T^{-1/(\beta-1)}\theta_A^*\left(\frac{|x|}{T^{1/2}}\right), \qquad x \in \mathbf{R}^N; \qquad u_0 \not\equiv 0.$$

Тогда $\theta_T(\tau, \xi) \to \theta_A^*(|\xi|)$ *при* $\tau \to +\infty$ *равномерно на каждом компакте из* $\mathbf{R}^N$.

Таким образом, автомодельное решение (3) с функцией θ_A^* устойчиво снизу (в случае единственности такого решения, полагая в лемме 2 $\theta_+(|\xi|) = A\theta_A^*(|\xi|)$, $A > 1$, получаем, что оно является также устойчивым сверху). Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Следствие. *При* $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ *автомодельная функция* $\theta = \theta_A^*(|\xi|)$ *является минимальной в* $\mathbf{R}^N$ *среди всех других решений* $\theta = \theta_A(|\xi|)$ *задачи* (4), (5).

2.3. Случай $\beta = 1 + 2/N$, $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Приближенное автомодельное решение (ПАР). В следующих двух леммах показано, что здесь асимптотика решения задачи (1), (2) неавтомодельна. Первая из них уточняет один из результатов [1].

Лемма 3. *Пусть* $\beta = 1 + 2/N$, $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$. *Тогда найдутся такие* $\tau > 0$, $T > 1$ *и* $A \in (0, (N/2)^{N/2}]$, *что всюду в* $[\tau, +\infty) \times \mathbf{R}^N$

(11) $$u(t,x) \geqslant A[(T+t)\ln(T+t)]^{-N/2}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4(T+t)}\right].$$

Лемма 4. *Пусть* $\beta = 1 + 2/N$ *и* $u_0 = o(\exp(-\gamma|x|^2))$, $|x| \to +\infty$ *для некоторого* $\gamma > 0$.

Тогда существуют такие $T > 1$, $a > 0$ *и достаточно большое* $H > 0$, *что*

(12) $$u(t,x) \leqslant H[(T+t)\ln(T+t)]^{-N/2}\exp\{-|x|^2[4(T+t) + a\ln^{-1}(T+t)]^{-1}\}.$$

Замечание. Нетрудно проверить, что справа в (11) и (12) стоят соответственно нижнее и верхнее решения уравнения (1).

Далее, на основе анализа семейства функций $u_k(t,x) = (k\ln k)^{N/2}u(kt, k^{1/2}x)$, $k > 0$, которые удовлетворяют уравнению $(u_k)_t = \Delta u_k - (\ln k)^{-1}u_k^{1+2/N}$, устанавливается, что в случае $u_0 = u_0(|x|)$ "автомодельное" представление $\theta_T(t, \xi) = [(T+t)\ln(T+t)]^{N/2}u(t, (T+t)^{1/2}\xi)$ сходится при $t = t_{i_m} \to +\infty$ (t_{i_m} – некоторая подпоследовательность произвольной последовательности $t_i \to +\infty$) к функциям вида $f(\xi) = b\exp(-|\xi|^2/4)$, $b = \text{const} \in \mathbf{R}_+^1$. При этом, как показывает анализ уравнения для θ_T, предельная функция единственна в следующем смысле.

Теорема 8. *Пусть в сделанных предположениях* $\theta_T(t, \xi) \to f_*(\xi)$ *при* $t \to +\infty$ *равномерно на каждом компакте из* $\mathbf{R}^N$. *Тогда*

$$f_*(\xi) = \left(\frac{N}{2}\right)^{N/2}\left(1 + \frac{2}{N}\right)^{N^2/4}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right), \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Таким образом, в условиях теоремы асимптотика решения задачи при $t \to +\infty$ описывается функцией $u_a(t, x) = (t\ln t)^{-N/2}f_*(xt)^{-1/2}$, которую в соответствии с [8] мы называем ПАР уравнения (1) (отметим, что u_a ему не удовлетворяет).

В заключение подчеркнем, что во многих случаях асимптотические эволюционные свойства решений задачи (1), (2) можно предсказать и объяснить, анализируя структуру семейства решений $\{\theta(\xi; \mu)\}$ "автомодельного" уравнения (4), указанную на рис. 1 и 2. Эти представления по смыслу близки к выводам, полученным на основе метода стационарных состояний [12, 13], в рамках которого некоторые наиболее общие эволюционные свойства неограниченных решений (режимов с обострением) нелинейных параболических задач определяются с помощью семейства соответствующих стационарных решений.

Отметим, что свойства построенных выше автомодельных решений (3) правильно согласуются с результатами работы [14], где, в частности, установлено, что при $1 < \beta < (N+2)/N$ задача Коши (1), (2) с начальной функцией

$$u_0(x) = E_0\delta(x), \quad x \in \mathbf{R}^N$$

($\delta(x)$ – дельта-функция, $E_0 \in \mathbf{R}_+^1$ – произвольная постоянная), имеет ограниченное классическое в $\mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^N$ решение $u(t, x) \not\equiv 0$. Нетрудно проверить, что $\theta_A(|\xi|) \in L^1(\mathbf{R}^N)$ при $1 < \beta < (N+2)/N$, поэтому, полагая $T = 0$ в (3), имеем

$$\| u_A(t,x) \|_{L^1(\mathbf{R}^N)} = t^{N/2 - 1/(\beta-1)} \| \theta_A(|\xi|) \|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \to +\infty, \quad t \to 0^+.$$

При этом, если $\theta_A(|\xi|)$ – функция с "экспоненциальной" асимптотикой (8) (она существует только при $1 < \beta < (N+2)/N$, теорема 2), то, очевидно, $u_A(t,x) \to 0$ при $t \to 0^+$ в $R^N \setminus \{0\}$. Таким образом, формально это классическое при $t > 0$ решение u_A удовлетворяет условию (13) с "энергией" $E_0 = +\infty$. Решения (3) при $T = 0$ со степенной асимптотикой (7), которым отвечает

$$u_A(0,x) = C|x|^{-2/(\beta-1)}, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\},$$

где $C > 0$ – постоянная в асимптотическом разложении (7), характеризует степень сингулярности начальной функции, обеспечивающую существование при $t > 0$ классического (и нетривиального) решения задачи Коши.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
15 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gmira A., Véron L.* – C.R., 1982, Ser. 1, vol. 295, № 13, p. 727–730. 2. *Самарский А.А., Еленин Г.Г. и др.* – ДАН, 1977, т. 237, № 6, с. 1330–1333. 3. *Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* – ЖВМиМФ, 1983, т. 23, № 2, с. 380–390. 4. *Курдюмов С.П.* В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217–243. 5. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др.* – Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826–1841. 6. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* – Там же, 1983, т. 19, № 12, с. 2123–2140. 7. *Haraux A., Weissler F.B.* – Ind. Univ. Math. J., 1982, vol. 31, № 2, p. 169–189. 8. *Галактионов В.А., Самарский А.А.* – Матем. сб., 1982, т. 118, № 3, с. 292–322; там же, 1983, т. 121, № 2, с. 131–155. 9. *Friedman A., Kamin S.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1980, vol. 262, № 2, p. 551–563. 10. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др.* – ДАН, 1979, т. 248, № 3, с. 586–589. 11. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др.* – ЖВМиМФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1451–1461. 12. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* – ДАН, 1984, т. 278, № 6, с. 1298–1300. 13. *Галактионов В.А.* – ДАН, 1982, т. 264, № 6, с. 1035–1040. 14. *Brezis H., Friedman A.* – J. Math. pures et appl., 1983, vol. 62, p. 73–97.

УДК 518.517.944 МАТЕМАТИКА

А.В. ФЕДОРОВ, В.М. ФОМИН, академик Н.Н. ЯНЕНКО

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АНАЛИЗАТОРОВ КОНТАКТОВЫХ РАЗРЫВОВ И УДАРНЫХ ВОЛН

В [1] предложен дифференциальный анализатор для контактного разрыва в течении газа, подчиняющегося некоторому ограничительному требованию на калорическое уравнение состояния. Ниже дано развитие этой теории, свободное от данного ограничения.

Уравнения, описывающие течение невязкого сжимаемого газа, имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0,$$

$$u = (\rho, \rho u, \rho E), \quad \varphi = (\rho u, p + \rho u^z, pu + \rho u E), \quad E = e + u^2/z, \quad e = e(T, p),$$
$$\rho = \rho(T, p).$$