3. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.— М.: ИЛ, 1962.—205 с.
4. Browder F. E.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1959, vol. 45, N 3, p. 365—372.
5. Арефьев В. Н.— Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1977, № 3, с. 38—45.
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.—479 с.
7. Агранович М. С., Вишик М. И.— Успехи мат. наук, 1964, т. 19, вып. 3, с. 53—161.
8. Кондратьев В. А.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 25 марта 1983 г.

УДК 517.95

Ф. В. БУНКИН, В. А. ГАЛАКТИОНОВ, Н. А. КИРИЧЕНКО,
С. П. КУРДЮМОВ, А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАЗЕРНОЙ ТЕРМОХИМИИ. I

§1. ВВЕДЕНИЕ

1. Тепло, вводимое в вещество, способно инициировать химические процессы. Специфика лазерного нагрева состоит прежде всего в том, что энергия излучения существенно меняет тепловой баланс [1]. Это значит, что к уравнениям, описывающим химическую кинетику, необходимо добавлять уравнение для температурного поля, учитывающее поглощение излучения веществом. Уже в простейших случаях возникающие задачи оказываются нелинейными. Как показали исследования [1], даже в пренебрежении зависимостью от пространственных координат и при неизменной мощности излучения динамика лазерного нагрева может быть весьма сложной: наблюдаются различные неустойчивости, колебательные, стохастические режимы. Разнообразие типов динамических режимов возрастает при учете зависимости переменных, описывающих задачу, от пространственных координат (см., например, [1, 2]).

Таким образом, исследование динамики химических процессов в поле лазерного излучения приводит к необходимости исследования определенного класса краевых задач, содержащих нелинейности, вид которых определяется законами химической кинетики, поглощения излучения и теплового баланса в веществе [1, 2].

2. В данной работе приведены результаты исследования одной модельной задачи о лазерном нагреве металлического образца, занимающего полупространство $z \geqslant 0$. На его поверхности ($z=0$) при этом может протекать экзотермическая окислительная реакция. При определенных предположениях (см. [1, 2]) эти процессы описываются следующей краевой задачей для параболического уравнения теплопроводности с нелинейностью в граничном условии второго рода:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\ t>0,\ r\geqslant 0,\ z>0, \tag{1.1}$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=AI(r)+b\exp\left.\left(-\frac{T_a}{T}\right)\right|_{z=0},\ t>0,\ r\geqslant 0, \tag{1.2}$$

$$T(0,\ r,\ z)=T_0(r,\ z)\geqslant 0,\ r\geqslant 0,\ z>0, \tag{1.3}$$

где a и k — соответственно коэффициенты температуро- и теплопроводности. Первое слагаемое в граничном условии (1.2) описывает поглощение лазерного излучения с распределением интенсивности по поверхности

$$I(r)=I_0\Theta\left(\frac{r}{r_0}\right),\ r\geqslant 0;\ \Theta(\xi)>0 \text{ при } \xi\geqslant 0,$$

$I_0>0$, $r_0>0$ — амплитуда и эффективная полуширина лазерного пучка. Считаем, что функция $\Theta(\xi)$ достаточно быстро убывает при $\xi\to+\infty$ и $\sup\Theta(\xi)=\Theta(0)$ (часто полагают $\Theta(\xi)=\exp(-\xi^2)$). Поглощательную способность A считаем постоянной.

Второе слагаемое в граничном условии (1.2) учитывает в простейшем случае энерговыделение в ходе окислительной реакции; константы b и T_a характеризуют скорость протекания и интенсивность энерговыделения реакции.

В (1.1) принято, что тепловое поле обладает радиальной симметрией по пространственным переменным x и y ($x, y\in\mathbf{R}^1$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$).

Относительно начальной температуры T_0 в (1.3) предполагается, что при $\|x\|=\sqrt{r^2+z^2}\to+\infty$ функция $T_0(r, z)$ достаточно быстро стремится к нулю. В указанной постановке решение задачи существует, единственно и является классическим в любой области $[\tau, +\infty)\times\{r\geqslant 0, z\geqslant 0\}$, $\tau>0$ [3].

3. Как было показано в [1, 2] на основе приближенных методов (для $I(r)=I_0\exp(-r^2/r_0^2)$), поведение теплового поля в веществе, описываемое краевой задачей (1.1)—(1.3), существенным образом зависит от соотношения между параметрами I_0 и r_0 в $I(r)$: в одной области значений I_0, r_0 задача (1.1) — (1.3) не имеет стационарных решений (что отвечает неограниченному распространению по поверхности вещества волны горения), а в другой области I_0, r_0 стационарных решений может быть несколько (два или четыре).

Цель настоящей работы состоит в обосновании качественных выводов [1, 2], обобщении результатов для произвольной зависимости $I(r)$ и исследовании эволюционных свойств решения нестационарной задачи (последнее выполнено, в частности, на основе теории нестационарного осреднения уравнений с частными производными, применявшейся ранее в [4—7]).

4. В краевой задаче (1.1)—(1.3) удобно ввести обозначения

$$t_1=\left(\frac{b}{kT_a}\right)^2 at,\quad r_1=\frac{b}{kT_a}r,\quad z_1=\frac{b}{kT_a}z,$$

$$T_1=\frac{1}{T_a}T,\quad I_{0_1}=\frac{A}{b}I_0,\quad r_{0_1}=\frac{b}{kT_a}r_0.$$

Отбрасывая в дальнейшем индекс «1», перепишем (1.1) — (1.3) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\quad t>0,\ r\geqslant 0,\ z>0, \tag{1.1}$$

$$-\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=I_0\Theta\left(\frac{r}{r_0}\right)+\left.\exp\left(-\frac{1}{T}\right)\right|_{z=0},\quad t>0,\ r\geqslant 0, \tag{1.2}$$

$$T(0, r, z)=T_0(r, z)\geqslant 0,\ r\geqslant 0,\ z>0. \tag{1.3}$$

Таким образом, помимо начальной функции $T_0(r, z)$ краевая задача содержит только два параметра: I_0 и r_0, которые по-прежнему называем амплитудой и полушириной пучка излучения.

5. Кратко охарактеризуем содержание работы. В § 2 рассмотрена соответствующая стационарная задача и получены достаточные условия ее разрешимости и неразрешимости. Показано, что существует кривая $I_0=h(r_0)$, разделяющая плоскость параметров $\{I_0, r_0\}$ на области существования и несуществования стационарных решений. Изучены основные свойства минимального стационарного решения, которое, как показано в § 3, является устойчивым снизу.

В § 3 доказана стабилизация (при $t\to+\infty$) решения нестационарной задачи к минимальному стационарному решению (если последнее существует), в § 4 получены оценки эволюции тепловой волны в области отсутствия стационарных состояний *).

*) § 4 и 5 будут опубликованы в следующей работе того же названия.

В § 5 на основе метода осреднения показано, что возможны как два, так и четыре стационарных состояния (либо ни одного, см. § 2). При этом устойчивым всегда является лишь одно (минимальное) стационарное решение, изученное в § 2 и 3.

В дальнейшем через Ω обозначается область $\{r\geqslant 0,\ z>0\}$, $\partial\Omega=\{r\geqslant 0,\ z=0\}$ — граница Ω.

§ 2. ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

1. Стационарная задача. Эволюционные свойства решений задачи (1.1) — (1.3) во многом зависят от наличия или отсутствия ее стационарных решений. Этот параграф целиком посвящен исследованию соответствующей стационарной (эллиптической) задачи

$$\Delta u = 0,\ (r,\ z)\in\Omega, \tag{2.1}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\partial\Omega} = I(r) + \exp\left(-\frac{1}{u}\right)\bigg|_{\partial\Omega}; \tag{2.2}$$

$u=u(r,z)>0$ в Ω; $u\to 0$ при $\|x\|\to+\infty$.

Задача (2.1), (2.2) эквивалентна следующему нелинейному интегральному уравнению (см., например, [8]):

$$u(r,\ z) = \mathbf{P}(u(r,\ z)) \equiv \mathbf{S}I(r) + \mathbf{S}\exp\left(-\frac{1}{u(r,\ 0)}\right). \tag{2.3}$$

Здесь через $\mathbf{S}$ обозначен линейный интегральный оператор

$$(\mathbf{S}v(r))(r,\ z) = \int_0^\infty v(\xi)\,\xi d\xi\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\rho}{\sqrt{r^2+z^2+\xi^2-2r\xi\cos\rho}}. \tag{2.4}$$

2. Вспомогательные утверждения. Для исследования разрешимости задачи (2.1) — (2.2) нам понадобятся некоторые оценки, связанные с оператором $\mathbf{S}$. Введем обозначение

$$u_0(r,\ z) = \mathbf{S}I(r) = I_0\mathbf{S}\Theta\left(\frac{r}{r_0}\right). \tag{2.5}$$

Пусть $\Theta(\xi)\in C(\mathbf{R}^1_+)$, $\xi\Theta(\xi)\in L^1(\mathbf{R}^1_+)$. Тогда, как нетрудно проверить, функция u_0 определена всюду в Ω и $u_0(r,\ z)\to 0$ при $\|x\|\to+\infty$. Кроме того, справедлива следующая

Лемма 1. *Всюду в $\overline{\Omega}$ имеют место оценки*

$$u_0(r,\ z)\leqslant I_0 r_0^2\,\frac{A_\Theta}{r_0+\|x\|}, \tag{2.6}$$

$$u_0(r,\ z)\geqslant I_0 r_0^2\,\frac{a_\Theta}{r_0+\|x\|}, \tag{2.7}$$

где A_Θ, a_Θ — положительные постоянные.

Замечание. Значения A_Θ, a_Θ зависят только от функции распределения интенсивности излучения $\Theta(\xi)$ и, вообще говоря, могут быть выписаны в явном виде, например

$$a_\Theta = \int_0^\infty \frac{\Theta(\xi)\,d\xi}{1+\xi}.$$

Выражение для A_Θ является более громоздким. Для реальных оценок в случае достаточно «регулярных» функций $\Theta(\xi)$ (например, вида

$\Theta(\xi)=\exp(-\xi^2)$) можно воспользоваться следующим приближенным равенством:

$$A_\Theta \simeq \max\left\{\int_0^\infty \Theta(\xi)\,d\xi,\ (1+\sqrt{2})\int_0^\infty \Theta(\xi)\,\xi d\xi\right\}, \tag{2.8}$$

которое учитывает как суммарную «энергию» пучка, так и его пространственное распределение. В случае функций Θ «нерегулярного» (например, немонотонного) вида оценку легко подходящим образом уточнить.

Сформулируем для удобства дальнейшего изложения еще одно аналогичное утверждение.

Лемма 2. *Существуют такие постоянные B_* и b_*, что при любых $\delta>0$ всюду в Ω справедливы оценки*

$$\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r}{\delta}\right)\leqslant \delta^2\frac{B_*}{\delta+\|x\|}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r}{\delta}\right)\geqslant \delta^2\frac{b_*}{\delta+\|x\|}. \tag{2.10}$$

Оценки снизу в леммах 1 и 2 выводятся непосредственно, оценки сверху получаются путем специальной аппроксимации внутреннего интеграла выражения (2.4) в окрестности «сингулярной» точки.

3. Теорема существования. Введем банахово пространство X непрерывных функций $\varphi(r, z)$, определенных всюду в Ω, с нормой

$$|||\varphi||| = \sup_{(r,z)\in\Omega}\{|\varphi(r, z)|\,(r_0+\sqrt{r^2+z^2})\}.$$

Нетрудно проверить, что всякое множество $Y_\delta\subset X$ вида

$$Y_\delta=\{\varphi\in X|\varphi\geqslant 0,\ |||\varphi|||\leqslant\delta\},\ \delta=\text{const}>0$$

является замкнутым и выпуклым, а непрерывный оператор $\mathbf{P}$ в (2.3) — компактным. Поэтому, согласно теореме Шаудера о неподвижной точке [9], для определения условий разрешимости уравнения (2.3) достаточно выяснить, при каких параметрах I_0, r_0 оператор $\mathbf{P}$ переводит Y_δ в Y_δ хотя бы для одного (зависящего от I_0, r_0) значения $\delta>0$. На этот вопрос отвечает следующая

Теорема 1. *Пусть при данных I_0, r_0 существует такая постоянная $\delta>0$, что*

$$A_\Theta I_0 r_0^2 + B_*\delta^2\exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right)\max\left\{1,\ \frac{r_0}{\delta}\right\}\leqslant\delta. \tag{2.11}$$

Тогда стационарная задача (2.1), (2.2) имеет по крайней мере одно положительное в Ω решение и $u\in Y_\delta$.

Доказательство. Итак, определим условия, при которых $\mathbf{P}: Y_\delta\to Y_\delta$.

Пусть $\varphi\in Y_\delta$. Очевидно, что $\mathbf{P}(\varphi)>0$ в Ω. Оценим функцию $\mathbf{P}(\varphi)(r, z)$ сверху.

Имеем $\mathbf{P}(\varphi)=\mathbf{S}I(r)+\mathbf{S}\exp\left(-\frac{1}{\varphi(r,\ 0)}\right)$. Поскольку $\varphi\in Y_\delta$, справедлива оценка $\varphi(r,\ 0)\leqslant\delta/(r_0+r)$. Отсюда

$$\mathbf{P}(\varphi)\leqslant\mathbf{S}I(r)+\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r_0}{\delta}-\frac{r}{\delta}\right)=$$

$$=\mathbf{S}I(r)+\exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right)\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r}{\delta}\right).$$

Используя теперь оценки (2.6), (2.9) в леммах 1 и 2, выводим неравенство

$$\mathbf{P}(\varphi) \leqslant \frac{A_\Theta I_0 r_0^2}{r_0 + \|x\|} + \frac{B_* \delta^2 \exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right)}{\delta + \|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_\Theta I_0 r_0^2 + B_* \delta^2 \exp(-r_0/\delta) \max\left\{1, \frac{r_0}{\delta}\right\}}{r_0 + \|x\|}.$$

Поэтому $\mathbf{P}(\varphi) \in Y_\delta$ при выполнении (2.11), что завершает доказательство.

Анализ условия (2.11) приводит к такому выводу.

Следствие. *Существует (однозначная) функция $h_-(s) > 0$, определенная при $s > 0$, такая, что при любых $I_0 < h_-(r_0)$ задача (2.1), (2.2) имеет по крайней мере одно решение.*

Замечание. В практическом отношении важно получить оценки пространственного профиля решения, построенного в теореме, а также оценки функции $h_-(r_0)$ из следствия. Легко видеть, что соотношение (2.11) заведомо имеет место для любых I_0, r_0 таких, что

$$A_\Theta I_0 r_0^2 \leqslant \frac{\delta}{2}, \tag{2.12}$$

$$B_* \delta \exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right) \max\left\{1, \frac{r_0}{\delta}\right\} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим неравенство (2.13). Нетрудно видеть, что всегда можно выбрать такое достаточно малое $\delta = \delta_*(r_0) > 0$, чтобы оно выполнялось, и тогда неравенство (2.12), гарантирующее разрешимость задачи (2.1), (2.2), примет вид

$$I_0 \leqslant \frac{1}{2A_\Theta} \frac{\delta_*(r_0)}{r_0^2},$$

т. е. $h_-(r_0) > (2A_\Theta)^{-1}(\delta_*(r_0)/r_0^2)$ (это рассуждение доказывает следствие). Например, при $r_0 \geqslant e/2B_*$ можно положить

$$\delta_*(r_0) = \frac{r_0}{\ln(2B_* r_0)}$$

и тогда разрешимость задачи в множестве Y_{δ_*} имеет место для любых

$$I_0 \leqslant \frac{1}{2A_\Theta r_0} \frac{1}{\ln(2B_* r_0)}, \quad r_0 \geqslant \frac{e}{2B_*}.$$

Если же $r_0 < e/2B_*$, то $\delta_*(r_0) = r_0$ и стационарное решение заведомо существует при всех

$$I_0 \leqslant \frac{1}{2A_\Theta} \frac{1}{r_0}, \quad r_0 < \frac{e}{2B_*}.$$

При этом условие $u \in Y_{\delta_*}$ позволяет оценить пространственную структуру построенного стационарного решения

$$u(r, z) \leqslant \frac{\delta_*(r_0)}{r_0 + \sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (r, z) \in \Omega; \quad I_0 < h_-(r_0).$$

Отсюда в силу полученных выше оценок имеем

$$\sup_{(r,z)\in\Omega} u(r, z) \leqslant \ln^{-1}(2B_* r_0), \quad r_0 \geqslant \frac{e}{2B_*},$$

$$\sup_{(r,z)\in\Omega} u(r, z) \leqslant 1, \quad r_0 < \frac{e}{2B_*}.$$

В заключение приведем асимптотики функции $h_-(r_0)$ при $r_0 \to +\infty$ и $r_0 \to 0$, которые вытекают из (2.11):

$$h_-(r_0) \simeq \frac{1}{r_0 \ln r_0}, \ r_0 \to +\infty, \ h_-(r_0) \simeq \frac{1}{r_0}, \ r_0 \to 0. \qquad (2.14)$$

4. О единственности решения. Ниже определены условия единственности в множестве Y_δ решения, построенного в теореме 1.

Лемма 3. *Справедливы оценки*

$$\mathbf{S}\left(r^k \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right)\right) \leqslant \frac{l_k \delta^{k+2}}{\delta + \|x\|}, \ k = 0, \ 1, \ 2; \ \delta > 0,$$

где l_0, l_1, l_2 — положительные постоянные.

Мы ограничимся доказательством следующего (не вполне оптимального) утверждения.

Теорема 2. *Пусть при заданных I_0, r_0 существует такая постоянная $\delta \in (0, r_0/2]$, что*

$$A_\Theta I_0 r_0^2 + B_* \delta \exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right) r_0 \leqslant \delta, \qquad (2.15)$$

$$q_\delta = \left[r_0 l_0 \left(\frac{r_0}{\delta}\right) + 2r_0 l_1 + l_2 \delta\right] \exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right) r_0 < 1. \qquad (2.16)$$

Тогда в Y_δ существует единственное решение $u = u(r, z)$.

Замечание. Неравенство (2.15) совпадает с условием (2.11) существования решения, поскольку в данном случае $r_0/\delta \geqslant 2$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия (2.16) оператор $\mathbf{P}$ является сжимающим в Y_δ, что вместе с (2.15), согласно теореме Банаха о сжимающих отображениях [3], обеспечивает существование и единственность решения $u \in Y_\delta$. Пусть φ_1, $\varphi_2 \in Y_\delta$. Тогда

$$|||\mathbf{P}(\varphi_1) - \mathbf{P}(\varphi_2)||| = \left|\left|\left|\mathbf{S}\left[\exp\left(-\frac{1}{\varphi_1}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\varphi_2}\right)\right]\right|\right|\right| =$$
$$= \left|\left|\left|\mathbf{S}\left[(\varphi_1 - \varphi_2)\int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{\eta\varphi_1 + (1-\eta)\varphi_2}\right)\frac{d\eta}{(\eta\varphi_1 + (1-\eta)\varphi_2)^2}\right]\right|\right|\right|. \qquad (2.17)$$

Легко видеть, что

$$|\varphi_1(r, 0) - \varphi_2(r, 0)| \leqslant \frac{r_0 + r}{r_0}|\varphi_1(r, 0) - \varphi_2(r, 0)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(r,z)\in\Omega}\left\{\frac{r_0 + \sqrt{r^2 + z^2}}{r_0}|\varphi_1(r, z) - \varphi_2(r, z)|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r_0}|||\varphi_1 - \varphi_2|||.$$

Учитывая теперь, что при выполнении условия $\delta \leqslant r_0/2$ справедливо неравенство $\eta\varphi_1 + (1-\eta)\varphi_2 \leqslant \delta/(r_0 + \sqrt{r^2 + z^2}) \leqslant 1/2$, $\eta \in (0, 1)$, а также монотонность функции $z^{-2}\exp(-1/z)$ на интервале $(0, 1/2)$, из (2.17) получаем

$$|||\mathbf{P}(\varphi_1) - \mathbf{P}(\varphi_2)||| \leqslant |||\varphi_1 - \varphi_2||| \frac{1}{r_0}\left|\left|\left|\mathbf{S}\left[\frac{(r_0 + r)^2}{\delta^2}\exp\left(-\frac{r_0 + r}{\delta}\right)\right]\right|\right|\right|.$$

И, наконец, с помощью оценок леммы 3 выводим такое неравенство:

$$|||\mathbf{P}(\varphi_1) - \mathbf{P}(\varphi_2)||| \leqslant |||\varphi_1 - \varphi_2||| \exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right)(r_0^2 l_0 +$$
$$+ 2r_0\delta l_1 + \delta^2 l_2)\max\left\{1, \frac{r_0}{\delta}\right\} = q_\delta |||\varphi_1 - \varphi_2|||,$$

причем $q_\delta < 1$. Теорема доказана.

Следствие. *Существуют такие (однозначные) функции* $h^*(s)>0$, $\delta^*(s)>0$, *определенные при всех* $s>0$, $h^*(s)\to 0$ *при* $s\to+\infty$, $h^*(s)\to+\infty$ *при* $s\to 0$, $\delta^*(s)\leqslant s/2$, *что при выполнении неравенства* $I_0<h^*(r_0)$ *задача (2.1), (2.2) имеет в* Y_{δ^*}, $\delta^*=\delta^*(r_0)$, *единственное решение.*

Замечание. Исходя из общих утверждений о характере ветвления решений нелинейных (стационарных) уравнений [10], следует ожидать, что в области $\{I_0, r_0\}$ разрешимости задачи (2.1), (2.2) существуют по крайней мере два решения. Это же подтверждают качественные выводы [1, 2] и результаты § 4 данной работы. В этом случае, как вытекает из следствия, второе решение обязано лежать вне множества Y_δ^*, т. е. быть в определенном смысле «большим» по сравнению с «малым» решением, построенным выше.

5. Теорема несуществования. Для определения условий неразрешимости задачи (2.1), (2.2) составим следующую монотонно возрастающую функциональную последовательность $\{v_k(r)\}$:

$$v_0(r)=u_0(r,\ 0)=(\mathbf{S}I(r))(r,\ 0),$$

$$v_{k+1}(r)=\mathbf{P}(v_k(r))(r,\ 0),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Нетрудно видеть, что в силу монотонности функции $\exp(-1/s)$ всякое решение уравнения (2.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(r,\ 0)>v_k(r),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ r\geqslant 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, если последовательность $\{v_k\}$ стремится к бесконечности хотя бы в одной точке, то задача (2.1), (2.2) решений иметь не может. В следующем утверждении получены необходимые оценки функций $v_k(r)$ снизу.

Лемма 4. *Справедливы оценки*

$$v_{k+1}(r)\geqslant\frac{m_{k+1}}{m_k+r},\ k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.19}$$

где числовая последовательность $\{m_k\}$ *определяется из рекуррентного соотношения*

$$\begin{gathered} m_{k+1}=b_*m_k^2\exp\left(-\frac{m_{k-1}}{m_k}\right),\ k=1,\ 2,\ \ldots, \\ m_0=a_\Theta I_0r_0^2,\ m_1=b_*m_0^2\exp\left(-\frac{r_0}{m_0}\right). \end{gathered} \tag{2.19'}$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что в силу (2.7) имеет место оценка

$$v_0(r)\geqslant\frac{m_0}{r_0+r},\quad r\geqslant 0.$$

Тогда с помощью неравенства (2.10) получаем

$$\begin{gathered} v_1(r)=\mathbf{P}(v_0(r))\geqslant\mathbf{P}\left(\frac{m_0}{r_0+r}\right)\geqslant \\ \geqslant\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r_0+r}{m_0}\right)=\exp\left(-\frac{r_0}{m_0}\right)\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r}{m_0}\right)\geqslant \\ \geqslant\frac{b_*m_0^2\exp(-r_0/m_0)}{m_0+r}=\frac{m_1}{m_0+r}. \end{gathered}$$

Аналогично имеем

$$\begin{gathered} v_{k+1}(r)=\mathbf{P}(v_k(r))\geqslant\mathbf{S}\exp\left(-\frac{m_{k-1}+r}{m_k}\right)= \\ =\exp\left(-\frac{m_{k-1}}{m_k}\right)\mathbf{S}\exp\left(-\frac{r}{m_k}\right)\geqslant\frac{m_{k+1}}{m_k+r}, \end{gathered}$$

что завершает доказательство леммы.

Теперь можно перейти к доказательству теоремы несуществования.

Т е о р е м а 3. *Пусть параметры* I_0, r_0 *таковы, что выполняются условия*

$$q = b_* a_\Theta I_0 r_0^2 \exp\left(-\frac{1}{a_\Theta I_0 r_0}\right) > 1, \tag{2.20}$$

$$b_* a_\Theta I_0 r_0^2 \exp\left(-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1. \tag{2.21}$$

Тогда задача (2.1), (2.2) не имеет решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при выполнении (2.20), (2.21) последовательность $v_{k+1}(0) \geqslant m_{k+1}/m_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, что в силу (2.18) обеспечивает неразрешимость задачи. Установим сначала, что в сделанных предположениях

$$m_k \geqslant m_0 q^k, \ k = 1, \ 2, \ \ldots \tag{2.22}$$

и тем самым $m_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. В силу (2.20) имеем $m_1 = q m_0$. Далее

$$m_2 = b_* m_1^2 \exp\left(-\frac{m_0}{m_1}\right) = m_1 \left[b_* m_0 q \exp\left(-\frac{1}{q}\right)\right].$$

Однако $b_* m_0 q \exp\left(-\frac{1}{q}\right) \geqslant q$ (см. (2.21)), и поэтому $m_2 \geqslant m_1 q = m_0 q^2$. Из (2.19′) теперь получаем

$$m_{k+1} = m_k \left[b_* m_k \exp\left(-\frac{m_{k-1}}{m_k}\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant m_k \left[b_* m_0 q^k \exp\left(-\frac{1}{q}\right)\right] \geqslant m_k q \geqslant m_0 q^{k+1}.$$

Оценка (2.22) доказана. Тогда из (2.19′) и (2.22) выводим

$$v_{k+1}(0) \geqslant b_* m_k \exp\left(-\frac{m_{k-1}}{m_k}\right) > b_* \exp\left(-\frac{1}{q}\right) m_k >$$

$$> b_* \exp\left(-\frac{1}{q}\right) m_0 q^k \to +\infty, \ k \to +\infty.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Второе условие (2.21) будет заведомо выполнено для тех значений параметров, при которых

$$\frac{b_* a_\Theta}{e} I_0 r_0^2 \geqslant 1. \tag{2.21′}$$

Из (2.20), (2.21) вытекает справедливость такого утверждения.

С л е д с т в и е. *Существует (однозначная) функция* $h_+(s) > 0$, *определенная при всех* $s > 0$, *такая, что для любых* $I_0 > h_+(r_0)$ *задача (2.1), (2.2) решений не имеет.*

З а м е ч а н и е. Из (2.20), (2.21) нетрудно получить конкретные условия неразрешимости стационарной задачи и тем самым оценки функции $h_+(r_0)$ сверху. Пусть, например, $r_0 > e/b_*$. Тогда задача (2.1), (2.2) неразрешима при всех

$$I_0 \geqslant \frac{1}{a_\Theta r_0} \quad \left(\text{т. е. } h_+(r_0) < \frac{1}{a_\Theta r_0}\right).$$

Если же $r_0 < e/b_*$, то решение не существует для любых

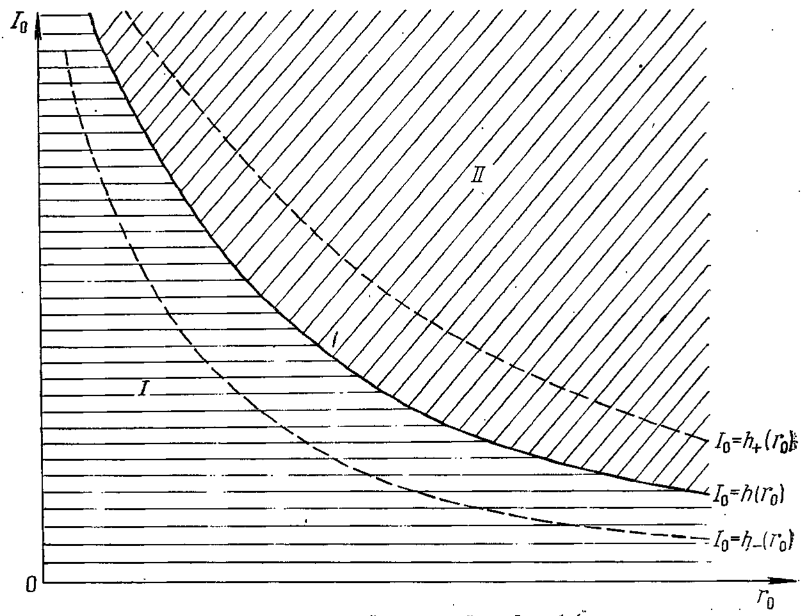
$$I_0 \geqslant \frac{e}{b_* a_\Theta r_0^2} \quad \left(\text{т. е. } h_+(r_0) < \frac{e}{b_* a_\Theta r_0^2}\right).$$

Отметим, что первая оценка в отличие от второй не является асимптотически точной. Реальная асимптотика функции h_+, легко выводимая из (2.20), (2.21), имеет вид

$$h_+(r_0) \simeq \frac{1}{r_0 \ln r_0}, \quad r_0 \to +\infty. \tag{2.23}$$

6. Основная теорема.

Теорема 4. *Пусть $\Theta(\xi)$ — монотонная функция. Тогда существует невозрастающая функция $h(s)$, $h_-(s) \leqslant h(s) \leqslant h_+(s)$ при $s>0$, такая,*



Схематическое разделение монотонной кривой $I_0=h(r_0)$ плоскости изменения параметров $\{I_0, r_0\}$ на области существования (I) и несуществования (II) стационарного решения

что при всех $I_0<h(r_0)$ задача (2.1), (2.2) имеет по крайней мере одно решение, а при любых $I_0>h(r_0)$ она неразрешима.

Замечание. Другими словами, вся плоскость изменения параметров $\{I_0, r_0\}$ разбивается на две области — существования и несуществования решения. Их общей границей является кривая $I_0=h(r_0)$ (рисунок). Отметим, что установленные ранее оценки функций $h_\pm$ позволяют достаточно точно описать характер поведения кривой $I_0=h(r_0)$. В частности, из (2.14) и (2.23) следует, что

$$h(r_0) = O\left(\frac{1}{r_0 \ln r_0}\right), \quad r_0 \to +\infty.$$

Если $\Theta(\xi)$ — немонотонная, то, как видно из доказательства, кривая $I_0=h(r_0)$ также может быть немонотонной.

Доказательство теоремы. Предварительно отметим, что для сформулированной эллиптической задачи (или интегрального уравнения (2.3)) в неограниченной области справедливо известное утверждение о том, что наличие у задачи подходящих верхнего $u_+(r, z)$ и нижнего $u_-(r, z)$ решений, $u_+ \geqslant u_-$ в $\overline{\Omega}$ обеспечивает существование решения $u(r, z)$, такого, что $u_- \leqslant u \leqslant u_+$ всюду в $\overline{\Omega}$ (см., например, [11, 12]).

Будем в дальнейшем для удобства обозначать решение через $u(x; I_0, r_0)$. Фиксируем произвольное $r_0^* > 0$. Покажем, что существует одно единственное $I_0^* > 0$, такое, что при $I_0 < I_0^*$ задача имеет решение, а при $I_0 > I_0^*$ решений нет (т. е. докажем, что функция h является однозначной). В теоремах 1 и 3 установлено, что при всех $I_0 < h_-(r_0^*)$ решение существует, а при $I_0 > h_+(r_0^*)$ — не существует.

Пусть предположение неверно и найдутся такие $h_-(r_0^*) \leqslant I_1 < I_2 \leqslant h_+(r_0^*)$, что при $I_0 = I_1$ решения нет, а при $I_0 = I_2$ оно существует. Тогда, как нетрудно проверить, функции $u_+ = u(x;\ I_2,\ r_0^*) > 0$ и $u_- \equiv 0$ являются соответственно верхним и нижним решениями задачи с параметрами $(I_1,\ r_0^*)$, причем $u_+ > u_-$ в $\overline{\Omega}$, что противоречит предположению о неразрешимости задачи при $I = I_1$. Тогда, полагая $I_0^* = h(r_0^*) = \sup\{s > 0 \mid$ при всех $I_0 < s$ задача разрешима$\}$, убеждаемся в существовании функции h (нетрудно видеть, что величина $I_0^{**} = \inf\{s > 0 \mid$ при всех $I_0 > s$ задача неразрешима$\}$ совпадает с I_0^*). Аналогичными рассуждениями доказывается однозначность обратной к h функции, что влечет за собой монотонность h. Этим завершается доказательство теоремы.

§ 3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МИНИМАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

В этом параграфе с использованием ранее полученных результатов исследуется нестационарная задача в случае $I_0 < h(r_0)$, когда стационарная задача разрешима:

$$T_t = \Delta T, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = I(r) + \exp\left(-\frac{1}{T}\right)\bigg|_{\partial\Omega}, \quad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{3.2}$$

$$T(0,\ r,\ z) = T_0(r,\ z) \geqslant 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

В дальнейшем, если специально не оговорено противное, будем считать $T_0 \equiv 0$.

1. Лемма о критичности. В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Лемма 5. *При любых I_0, r_0 решение задачи (3.1) — (3.3) (с начальной функцией $T_0 \equiv 0$) является критическим* *), т. е.

$$T_t(t,\ r,\ z) \geqslant 0, \quad t > 0,\ (r,\ z) \in \Omega. \tag{3.4}$$

Доказательство. Поскольку решение не имеет необходимой гладкости при $t \geqslant 0$, для доказательства (3.4) нельзя формально дифференцировать по t уравнение (3.1) и граничное условие. Поэтому, следуя [15], выберем произвольное $\alpha > 0$ и положим

$$w_\alpha = \frac{T(t+\alpha,\ r,\ z) - T(t,\ r,\ z)}{\alpha}, \quad t > 0,\ (r,\ z) \in \Omega.$$

Функция w_α удовлетворяет следующей задаче:

$$(w_\alpha)_t = \Delta w_\alpha, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

$$-\frac{\partial w_\alpha}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{\alpha}\left[\exp\left(-\frac{1}{T(t+\alpha,\ r,\ 0)}\right) - \exp\left(-\frac{1}{T(t,\ r,\ 0)}\right)\right] =$$

$$= w_\alpha \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{\eta T(t+\alpha) + (1-\eta)\,T(t)}\right)\frac{d\eta}{[\eta T(t+\alpha) + (1-\eta)\,T(t)]^2},$$

причем, как нетрудно видеть,

$$w_\alpha(0,\ x) = \frac{1}{\alpha}\,T(\alpha,\ r,\ z) > 0, \quad x \in \Omega,$$

$$-\frac{\partial w_\alpha}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=0\\ t=0}} = \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{1}{T(\alpha,\ r,\ 0)}\right) > 0.$$

*) В смысле [13, 14].

Отсюда из принципа максимума получаем, что $w_\alpha > 0$ при всех $t > 0$, $x \in \Omega$. Переходя к пределу при $\alpha \to 0^+$ в неравенстве $w_\alpha > 0$, приходим к (3.4).

2. О стабилизации к стационарному состоянию. Пусть параметры задачи (3.1) — (3.3) связаны неравенством $I_0 < h(r_0)$, где функция h определена в теореме 4 (т. е. стационарная задача (2.1), (2.2) имеет по крайней мере одно решение $u(r, z)$). Тогда, как следует из принципа максимума, нестационарное решение ограничено равномерно по t:

$$T(t, r, z) \leqslant u(r, z), \quad t > 0, \ x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает

Лемма 6. *Пусть $I_0 < h(r_0)$. Тогда существует такая функция $T^*(r, z) > 0$, что*

$$T(t, r, z) \to T^*(r, z), \quad t \to +\infty \tag{3.6}$$

снизу всюду в Ω.

Эта лемма позволяет перейти к пределу при $\varkappa \to +\infty$ в интегральном уравнении, эквивалентном задаче (3.1) — (3.3):

$$T(t+\varkappa, x) = 2\int_\Omega E(t, x-\zeta)\, T(\varkappa, \zeta)\, d\zeta + \frac{2}{(2\sqrt{\pi})^3}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \xi\left[I(\xi) + \exp\left\{-\frac{1}{T(\tau+\varkappa, \xi, 0)}\right\}\right] d\xi\, \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{r^2+z^2+\xi^2-2r\xi\cos\rho}{4(t-\tau)}\right] d\rho \tag{3.7}$$

(здесь $E(t, x) = (4\pi t)^{-3/2}\exp(-\|x\|^2/4t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности в $\mathbf{R}^1_+ \times \mathbf{R}^3$), откуда вытекает, что функция $T^*(r, z)$ в (3.6) является равномерно непрерывной в Ω. Следовательно, сходимость $T(t, x) \to T^*(x)$ равномерна на каждом компакте из Ω. При этом из уравнения (3.7) при $\varkappa = +\infty$ непосредственно вытекает

Теорема 5. *Пусть $I_0 < h(r_0)$. Тогда существует такое решение $u = u(r, z)$ стационарной задачи (2.1), (2.2), что $T(t, r, z) \to u(r, z)$, $t \to +\infty$ снизу равномерно на каждом компакте из Ω.*

Отметим, что стабилизацию $T \to u$, $t \to +\infty$, равномерную на произвольном компакте $K \subset \Omega$, нетрудно установить без обращения к интегральному уравнению (3.7) на основе вывода специальных оценок решения $T(t, x)$, например, можно показать, что при всех $t > \tau_0 > 0$

$$\|\nabla T(t)\|_{L^2(\Omega)} < C_1(\tau_0), \qquad \int_{\tau_0}^t \|T_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds < C_2(\tau_0),$$

где постоянные C_1, $C_2 > 0$ не зависят от t.

Очевидно (это следует из (3.4)), что стабилизация имеет место к «минимальному» решению $u(r, z)$. Из теоремы 5 с помощью принципа максимума нетрудно вывести такое

Следствие 1. *При $I_0 < h(r_0)$ в множестве стационарных решений задачи (2.1), (2.2) существует минимальное решение $u = u_*(r, z)$, которое ни в одной точке $\overline{\Omega}$ не превосходит любое другое.*

Из теоремы 5 также легко получить следующее более общее утверждение о стабилизации.

Следствие 2. *Пусть $I_0 < h(r_0)$. Тогда стабилизация $T = T(t, r, z)$ к минимальному стационарному решению $u = u_*(r, z)$, равномерная на* *каждом компакте из Ω, имеет место при любых начальных функциях T_0, таких, что*

$$0 \leqslant T_0(r, z) \leqslant u_*(r, z), \quad x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Действительно, если обозначить через $T^0(t, r, z)$ решение задачи (3.1) — (3.3), отвечающее $T_0 \equiv 0$, то при выполнении (3.8) имеем $T^0(t, r, z) \leqslant T(t, r, z) \leqslant u_*(r, z)$, $t>0$, $x \in \Omega$, а поскольку $T^0 \to u_*$ при $t \to +\infty$, это же справедливо и для T.

Таким образом, минимальное стационарное решение является устойчивым «снизу».

Оценку снизу скорости стабилизации дает следующая

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 существует такая постоянная $C>0$, что*

$$\sup_{x \in \Omega} |T(t, r, z) - u(r, z)| > C(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \quad t>0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Положим $T_+ = u - \alpha E$, где

$$E = \frac{1}{[4\pi(1+t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\|x\|^2}{4(1+t)}\right]$$

— фундаментальное решение оператора $(\partial/\partial t - \Delta)$ в $\mathbf{R}^1_+ \times \mathbf{R}^3$. Постоянную $\alpha>0$ выберем столь малой, чтобы $T_+(0, r, z)>0$ в $\bar{\Omega}$. Тогда, как нетрудно видеть, T_+ является верхним решением задачи (3.1) — (3.3), т. е. $T<T_+$ в $\mathbf{R}^1_+ \times \Omega$. Отсюда прямо следует (3.9).

Замечание. Аналогичным образом устанавливается, что скорость возможной стабилизации сверху (при $T_0(r, z) \geqslant u(r, z)$ в Ω) также не превосходит $O(t^{-3/2})$, т. е. не является экспоненциальной.

Литература

1. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.—Успехи физ. наук, 1982, т. 138, вып. 1, с. 45—94.
2. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.— Квантовая электроника, 1982, т. 9, № 10, с. 1959—1967.
3. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа.— М.: Мир, 1968.—427 с.
4. Еленин Г. Г., Плохотников К. Э. Об одном способе качественного исследования квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником.— М., 1977.— 28 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, № 91).
5. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— М., 1977.—80 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, № 106).
6. Курдюмов С. П.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
7. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 380—390.
8. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике.—М.: Наука, 1980.— 688 с.
9. Функциональный анализ. СМБ / Под редакцией С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972.—544 с.
10. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу.—М.: Мир, 1977.—232 с.
11. Sattinger D. H.— Indiana Univ. Math. J., 1972, vol. 21, p. 979—1000.
12. Noussair E. S.— J. of Differ. Equat., 1979, vol. 34, p. 482—495.
13. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.—Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 3, с. 586—589.
14. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1979, т. 19, № 6, с. 1451—1461.
15. Sattinger D. H. Topics in stability and bifurcation theory. Lecture Notes in Mathematics.— Berlin: Springer, 1970, vol. 309.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 9 апреля 1984 г.