

160



ПРЕПР.

0-13

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛЬДЫША  
Академии наук СССР

В.М. Головизнин, В.К. Коршунов, А.А. Самарский,  
В.В. Чуданов

ОБ ЭКОНОМИЧНЫХ АЛГОРИТМАХ РАСЧЕТА  
ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
НА НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТКАХ

Преприят № 160 за 1985 г.

Москва

## А Н Н О Т А Ц И Я

Предложено два новых безусловно устойчивых алгоритма для расчета диффузии магнитного поля на двумерных неортогональных сетках. Оба алгоритма основаны на т.н. "методе факторизованных смещений" и могут быть отнесены к классу экономичных как по числу затрачиваемых арифметических операций, так и по объему требующейся оперативной памяти. Приведены примеры расчетов.

## ВВЕДЕНИЕ

При численном моделировании различных магнитногидродинамических систем и экспериментальных физических установок, предназначенных для исследования высокотемпературной плазмы, необходимо, как правило, учитывать диффузию магнитного поля. Форма области, в которой приходится рассматривать соответствующую задачу, определяется конструктивными особенностями рассчитываемого устройства и имеет, в большинстве случаев, достаточно сложную геометрическую форму. Кроме того, коэффициент электропроводности среды зачастую оказывается разрывной функцией, принимающей значения от нуля до бесконечности. Все это заметно осложняет непосредственное применение многих классических численных методов [1, 2], а использование некоторых из них делает просто невозможным. К числу последних относятся все т.н. экономичные алгоритмы [1], основанные на идее пространственной факторизации разностных операторов [1].

Значительный прогресс в разработке численных методов решения практически важных двумерных задач диффузии магнитного поля имевший место в последние годы, был связан с использованием вариационного подхода [3-8] основанного на принципе минимальной диссипации [9]. Вариационный подход приводит к системе разностных уравнений аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение на нерегулярных расчетных сетках, имеющих форму криволинейных четырехугольников. Наиболее важным свойством вариационно-разностных схем является то, что соответствующие им сеточные операторы оказываются симметричными и неотрицательными, что дает возможность использовать для их обращения наиболее экономичные из известных итерационных методов [10, 11].

В настоящей работе рассматриваются два безитерационных безусловно устойчивых алгоритма численного решения уравнения диффузии магнитного поля, в областях сложной формы, основанных на идее метода факторизованных тепловых смещений [12]. Первый из них родственен алгоритмам, базирующимся на локально-одномерных разностных схемах [1], второй - схеме Писмена-Рэнфорда [1].

Оба предложенных метода заметно превосходят вариационно-разностные схемы [3-8] по быстродействию и оказываются значительно более экономичными с точки зрения затрат оперативной памяти.

## § I. Формулировка диффузионной задачи в терминах магнитных омещений

Будем рассматривать диффузию магнитного поля в двумерной области  $G$  заполненной сплошной электропроводящей средой. Этот процесс может быть описан уравнениями:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}, \quad \sigma \vec{E} = \vec{J} \quad (2)$$

здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - напряженности электрического и магнитного поля,  $\vec{J}$  - вектор тока,  $\sigma$  - электропроводность,  $c$  - скорость света в вакууме.

Пусть рассматриваемое магнитное поле лежит в плоскости  $(x, y)$ , где  $x$  - в зависимости от значения индекса  $\ell$  представляет собой либо величину радиуса в цилиндрической геометрии ( $\ell=2$ ), либо обычную декартову переменную ( $\ell=1$ ).

Введем в рассмотрение величину магнитного потока  $\Psi$ . В терминах  $\Psi$  уравнение (1), (2) запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{x^{\ell-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad (3)$$

$$H_x = -\frac{1}{x^{\ell-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad H_y = \frac{1}{x^{\ell-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Дополним уравнение (3) граничными условиями:

$$\Psi|_{\Gamma} = \Psi_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_1 \subset \Gamma \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{\Gamma} = \omega_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_2 \subset \Gamma \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{\Gamma} + \alpha \Psi|_{\Gamma} = \xi_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_3 \subset \Gamma \quad (6)$$

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 = \Gamma, \quad t > 0$$

Начальные условия:  $\Psi|_{t=0} = \Psi_0(x, y) \quad x, y \in G \cup \Gamma$

Введем величину  $\vec{F}$  равенством:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \vec{H} \quad (7)$$

По аналогии с тепловыми смещениями будем называть магнитными смещениями.

Заметим, что  $\vec{F}(x, y, t)$  определяется уравнением (7) с точностью до  $\text{grad} f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  — произвольная функция координат области  $G$

В терминах магнитных смещений уравнения (3)–(6) можно записать как:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \gamma \frac{1}{x^{p-1}} \Psi \quad (8)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial t} = -\frac{1}{x^{p-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial t} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (10)$$

граничные условия будут иметь вид:

$$\Psi|_{\Gamma} = \Psi_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_1 \subset \Gamma \quad (4)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{\xi}_{\gamma_2} = \omega_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_2 \subset \Gamma \quad (5)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{\xi}_{\gamma_3} + \alpha \Psi|_{\Gamma} = \xi_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_3 \subset \Gamma \quad (6)$$

где  $\vec{\xi}$  — единичный вектор, касательный к границе,  $\alpha > 0$

$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 = \Gamma, t > 0.$

Начальные условия:

$$\Psi|_{t=0} = \Psi_0(x, y) \quad x, y \in G \cup \Gamma$$

## § 2. Дискретизация по времени. Вариационный принцип.

Дискретизируя уравнения (7)-(10) по времени, получаем:

$$\frac{\hat{F} - \bar{F}}{\tau} = \bar{H} \quad (II)$$

$$\frac{\partial \hat{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial y} = \nu \frac{1}{x^{l-1}} \hat{\Psi} \quad (I2)$$

$$\frac{\hat{F}_x - \bar{F}_x}{\tau} = -\frac{1}{x^{l-1}} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \quad (I3)$$

$$\frac{\hat{F}_y - \bar{F}_y}{\tau} = \frac{1}{x^{l-1}} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \quad (I4)$$

где  $\tau$  - шаг по времени. Величины не помеченные крышкой соответствуют текущему временному слою, а величины с крышкой последующему. Граничные условия дискретизированные по времени запишутся следующим образом:

$$\hat{\Psi}_{/r} = \hat{\Psi}_r(x, y, t_n) \quad (4)$$

$$\frac{\hat{F} - \bar{F}}{\tau} \bar{F}_{/r} = \hat{\omega}(x, y, t_n) \quad (5)$$

$$\frac{\hat{F} - \bar{F}}{\tau} \bar{F}_{/r} + \alpha \hat{\Psi}_{/r} = \hat{f}_r(x, y, t_n) \quad (6)$$

Умножим скалярно уравнение (I2) на  $x^{l-1} \delta \hat{F}$  ( $\delta \hat{F}$  - произвольная вариация  $\hat{F}$ ) и проинтегрируем по области  $G$ . В результате получим:

$$\delta \Phi(\hat{F}) = \int_G x^{l-1} \left( \delta \hat{F}_x \frac{\hat{F}_x - \bar{F}_x}{\tau} + \delta \hat{F}_y \frac{\hat{F}_y - \bar{F}_y}{\tau} \right) + \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial y} \right) \cdot \delta \left( \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial y} \right) \int dx dy - \oint (\delta \hat{F}_y \hat{\Psi} dy - \delta \hat{F}_x \hat{\Psi} dx) = 0$$

При граничных условиях второго рода, будет выполнено следующее равенство  $\delta \hat{F}_{/r} \bar{F}_{/r} = 0$ , поэтому  $\delta \Phi(\hat{F})$  можно переписать в виде:

$$\delta \Phi(\vec{F}) = \iint_G x^{\alpha-1} \left\{ \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{F}}{c} \right) \delta \vec{F} + \frac{1}{2c} \delta (\text{rot } \vec{F})^2 \right\} dx dy -$$

$$- \int_{\gamma_1} \hat{\Psi}_r \delta \vec{F} \cdot \vec{F} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{\alpha} \xi_r \delta \vec{F} \cdot \vec{F} ds + \int_{\gamma_3} \frac{1}{c} (\vec{F} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{F} \delta (\vec{F} \cdot \vec{F}) ds = 0 \quad (15)$$

Из (15) с учетом граничных условий (4"), (6") получаем функционал

$$\Phi(\vec{F}) = \iint_G \left\{ \frac{(\vec{F} \cdot \vec{F})^2}{2c} + \frac{1}{2c} (\text{rot } \vec{F})^2 \right\} x^{\alpha-1} dx dy -$$

$$- \int_{\gamma_1} \hat{\Psi}_r \vec{F} \cdot \vec{F} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{\alpha} \xi_r \vec{F} \cdot \vec{F} ds - \int_{\gamma_3} \frac{1}{c} (\vec{F} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{F} ds \quad (16)$$

### § 3. Криволинейная система координат

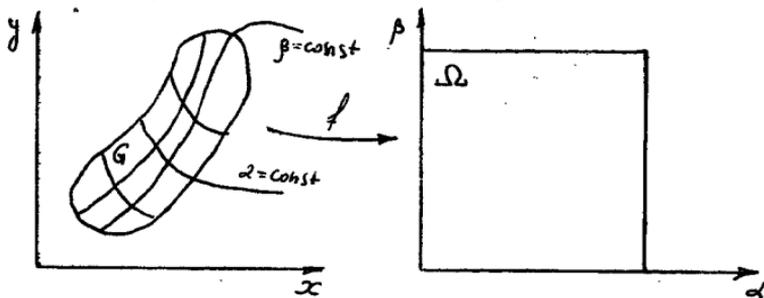


Рис. I

Введем в области  $G$  криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$  и предположим, что область  $G$  допускает взаимно-однозначное отображение  $\{f: xy \rightarrow \alpha, \beta\}$  в единичный квадрат  $\Omega = \{0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$  на плоскости  $(\alpha, \beta)$ , причем Якобиан  $J = \partial(x, y) / \partial(\alpha, \beta) > 0$ .

Запишем выражения, входящие в (16) в локальном ковариантном базисе криволинейной системы координат  $(\alpha, \beta)$ .

Орты ковариантного базиса имеют вид:

$$\vec{h}_\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \frac{1}{l_\alpha}; \quad l_\alpha = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2}$$

$$\vec{h}_\beta = \left( \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \frac{1}{l_\beta}; \quad l_\beta = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2}$$

Выражая  $\vec{F} = (F_x, F_y)$  через ковариантные составляющие

$F_x$  и  $F_y$  :

$$F_x = \frac{1}{j} \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} \alpha F_x - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \rho F_y \right) \quad (17)$$

$$F_y = \frac{1}{j} \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \rho F_y - \frac{\partial x}{\partial \rho} \alpha F_x \right)$$

и подставляя эти соотношения в выражения:

$$\vec{F}^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$\cot \vec{F} = - \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

получаем

$$\vec{F}^2 = \frac{\alpha^2 \rho^2}{y^2} \{ F_x^2 - 2 \cos \varphi(\alpha, \rho) F_x F_y + F_y^2 \} \quad (18)$$

$$\text{ГДЕ } \cos \varphi(\alpha, \rho) = \frac{1}{\alpha \rho} \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)$$

$$\cot \vec{F} = \frac{1}{j} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^{\alpha-1} \rho H_y) - \frac{\partial}{\partial \rho} (x^{\alpha-1} \alpha H_x) \right\} \quad (19)$$

#### § 4. Дискретная квазиодномерная задача

Рассмотрим процесс диффузии магнитного поля внутри одного слоя ячеек (рис.2).

Границу этого слоя будем считать достаточно гладкой. Кроме того, на боковых границах каждой ячейки зададим условия:

$$F_{x, i+1/2} = H_{x, i+1/2},$$

$$F_{y, i+1/2} = H_{y, i+1/2},$$

где  $H_{x, i+1/2}$ ,  $H_{y, i+1/2}$

значения ковариантной составляющей напряженности магнитного поля.

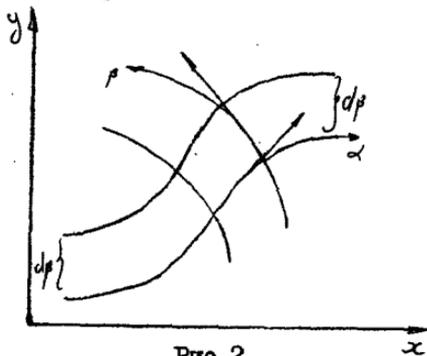


Рис.2

Дискретизируем по пространству слагаемые входящие в функционал (16)

$$\langle\langle \hat{F} - F \rangle\rangle_{i+1/2} = \frac{\langle l_{\alpha} \rangle_i \langle l_{\beta} \rangle_i}{\langle \gamma \rangle_i} \left\{ \langle\langle \hat{F}_{\alpha} - F_{\alpha} \rangle\rangle_{i+1/2} - 2 \langle \cos \varphi(\alpha, \beta) \rangle_{i+1/2} \langle \hat{F}_{\beta} - F_{\beta} \rangle_{i+1/2} \right. \\ \left. \langle \hat{F}_{\beta} - F_{\beta} \rangle_{i+1/2} + \langle\langle \hat{F}_{\beta} - F_{\beta} \rangle\rangle_{i+1/2} \right\} \quad (20)$$

$$\langle \frac{\hat{F}_{\alpha} - F_{\alpha}}{c} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{2c} \left\{ (\hat{F}_{\alpha u i+1/2} - F_{\alpha u i+1/2}) + (\hat{F}_{\alpha d i+1/2} - F_{\alpha d i+1/2}) \right\} = \\ = \frac{1}{2c} (H_{\alpha d i+1/2} + H_{\alpha u i+1/2})$$

где  $F_{\alpha u i+1/2}$ ,  $F_{\alpha d i+1/2}$  — магнитные смещения на верхней и нижней гранях  $i$ -той ячейки. С учетом принятых обозначений (20) приобретает вид:

$$\langle\langle \hat{F} - F \rangle\rangle_{i+1/2} = \frac{\langle l_{\alpha} \rangle_i \langle l_{\beta} \rangle_i}{\langle \gamma \rangle_i} \left\{ (H_{\alpha d i+1/2} + H_{\alpha u i+1/2}) \frac{2\pi^2}{z} - 2 \langle \cos \varphi(\alpha, \beta) \rangle_{i+1/2} \right. \\ \left. \cdot \frac{c}{z} (H_{\alpha u i+1/2} + H_{\alpha d i+1/2}) \langle \hat{F}_{\beta} - F_{\beta} \rangle_{i+1/2} + \langle\langle \hat{F}_{\beta} - F_{\beta} \rangle\rangle_{i+1/2} \right\} \quad (21)$$

Рассмотрим соотношение для  $\langle \text{rot } \hat{F} \rangle_{i+1/2}$ :

$$\langle \text{rot } \hat{F} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{\langle \gamma \rangle_i h_{\alpha} h_{\beta}} \left\{ \langle x_{i+1/2} \rangle_{h_{\beta}}^{l_{\beta}-1} \langle l_{\beta} \rangle_{i+1/2} \hat{F}_{\beta i+1/2} - \langle x_i \rangle_{h_{\beta}}^{l_{\beta}-1} \langle l_{\beta} \rangle_i \hat{F}_{\beta i} - \right. \\ \left. - (\langle x_{u i+1/2} \rangle_{h_{\alpha}}^{l_{\alpha}-1} \langle l_{\alpha} \rangle_{u i+1/2} \hat{F}_{\alpha u i+1/2} - \langle x_{d i+1/2} \rangle_{h_{\alpha}}^{l_{\alpha}-1} \langle l_{\alpha} \rangle_{d i+1/2} \hat{F}_{\alpha d i+1/2}) \right\} \quad (22)$$

В силу произвола в определении  $\hat{F}$  будем полагать  $F_{\alpha d i+1/2}$  и  $F_{\alpha u i+1/2}$  равными нулю, тогда из соотношений:

$$\frac{1}{\tau} (\hat{F}_{nd(i+1/2)} - F_{nd(i+1/2)}) = H_{nd(i+1/2)}$$

$$\frac{1}{\tau} (\hat{F}_{nu(i+1/2)} - F_{nu(i+1/2)}) = H_{nu(i+1/2)}$$

имеем  $\hat{F}_{nd(i+1/2)} = \tau \cdot H_{nd(i+1/2)}$ ,  $\hat{F}_{nu(i+1/2)} = \tau \cdot H_{nu(i+1/2)}$

В этом случае соотношение (22) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \text{rot } \hat{F} \rangle_{i+1/2}^2 &= \frac{1}{\langle J_{i+1/2}^2 h_a^2 h_p^2 \rangle} \left\{ \left( \langle x_{i+1} \rangle_{hp} \langle l_p \rangle_{i+1} \hat{F}_{pi+1} - \langle x_i \rangle_{hp} \langle l_p \rangle_i \hat{F}_{pi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tau \left( \langle x_{ui+1/2} \rangle_{ha} \langle l_a \rangle_{ui+1/2} H_{nu(i+1/2)} - \langle x_{di+1/2} \rangle_{ha} \langle l_a \rangle_{di+1/2} H_{nd(i+1/2)} \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Функционал (16) дискретизированный по пространству (с учетом (21) и (23)) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{F}) &= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ G_{i+1/2} \frac{1}{2} [(\hat{F}_{pi+1} - F_{pi+1})^2 + (\hat{F}_{pi} - F_{pi})^2] - 2 G_{i+1/2} \cdot Z_{i+1/2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} (H_{di+1/2} + H_{ui+1/2}) \tau \cdot \frac{1}{2} [(\hat{F}_{pi+1} - F_{pi+1}) + (\hat{F}_{pi} - F_{pi})] + \\ &\quad + L_{i+1/2} (S_{i+1} \hat{F}_{pi+1} - S_i \hat{F}_{pi})^2 - 2 L_{i+1/2} (S_{i+1} \hat{F}_{pi+1} - S_i \hat{F}_{pi}) \cdot \\ &\quad \cdot (S_{ui+1/2} H_{nu(i+1/2)} - S_{di+1/2} H_{nd(i+1/2)}) \tau + A_{i+1/2} \left. \right\} + \\ &\quad + K_N^2 S_N \hat{F}_{pN} \hat{Y}_N - K_S^1 S_1 \hat{F}_{p1} \hat{Y}_1 + K_N^3 S_N \hat{F}_{pN} \hat{\xi}_N \frac{1}{2} - K_S^3 S_1 \hat{F}_{p1} \hat{\xi}_1 \frac{1}{2} + \\ &\quad + K_N^3 \frac{1}{2\tau} (\hat{F}_{pN} - F_{pN})^2 S_N + K_S^3 \frac{1}{2\tau} (\hat{F}_{p1} - F_{p1})^2 S_1. \end{aligned} \quad (24)$$

$$K_{1(N)}^1 = \begin{cases} 1 & \text{при граничных условиях I-го рода} \\ 0 & \text{при граничных условиях 3-го рода} \end{cases}$$

$$K_{1(N)}^3 = \begin{cases} 1 & \text{при граничных условиях 3-го рода} \\ 0 & \text{при граничных условиях I-го рода} \end{cases}$$

где

$$G_{i+1/2} = \frac{V_{i+1/2}}{2\tau} \cdot \frac{(L_{i-1}^2 + L_i^2)(L_{di}^2 + L_{di}^2)}{4SQ_{i+1/2}^2}$$

$$P_{i+1/2} = \frac{V_{i+1/2}}{V_{i+1/2} SQ_{i+1/2}^2}$$

$$L_i = \sqrt{(x_{ui} - x_{di})^2 + (y_{ui} - y_{di})^2}$$

$$L_{di} = \sqrt{(x_{di-1} - x_{di})^2 + (y_{di-1} - y_{di})^2}$$

$$L_{ui} = \sqrt{(x_{ui-1} - x_{ui})^2 + (y_{ui-1} - y_{ui})^2}$$

$$S_i = \frac{1}{2} (x_{di}^{t-1} + x_{ui}^{t-1}) \cdot L_i$$

$$S_{ui+1/2} = \frac{1}{2} (x_{ui+1}^{t-1} + x_{ui}^{t-1}) \cdot L_{ui}$$

$$S_{di+1/2} = \frac{1}{2} (x_{di+1}^{t-1} + x_{di}^{t-1}) \cdot L_{di}$$

$$Z_{i+1/2} = \frac{DXA_{i+1/2} \cdot DXB_{i+1/2} + DYA_{i+1/2} \cdot DYB_{i+1/2}}{LA_{i+1/2} \cdot LB_{i+1/2}} \quad (24^*)$$

$$DXA_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(x_{di-1} - x_{di}) + (x_{ui-1} - x_{ui})]$$

$$DXB_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(x_{ui+1} - x_{di+1}) + (x_{ui} - x_{di})]$$

$$DYA_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(y_{di-1} - y_{di}) + (y_{ui-1} - y_{ui})]$$

$$DYB_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(y_{ui+1} - y_{di+1}) + (y_{ui} - y_{di})]$$

$$L A_{i+1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} (L_{ui}^2 + L_{di}^2)}$$

$$L B_{i+1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} (L_i^2 + L_{i+1}^2)}$$

Здесь  $(x_{di}, y_{di})$  и  $(x_{ui}, y_{ui})$  - координаты (соответственно нижнего и верхнего) узлов  $i$ -той грани,  $S Q_{i+1/2}$  - площадь  $i$ -той ячейки,  $V_{i+1/2}$  - объем  $i$ -той ячейки,  $A_{i+1/2}$  - величина независящая от  $\hat{F}_p$ .

Разностное уравнение следует из условия:

$$\frac{\partial \Phi(\hat{F})}{\partial \hat{F}_{pi}} = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

и записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & (G_{i+1/2} + G_{i-1/2}) (\hat{F}_{pi} - F_{pi}) - 2 P_{i+1/2} S_i (S_{i+1} \hat{F}_{pi+1} - S_i \hat{F}_{pi}) + \\ & + 2 P_{i-1/2} S_i (S_i \hat{F}_{pi} - S_{i-1} \hat{F}_{pi-1}) + B_{i+1/2} + B_{i-1/2} + C_{i+1/2} - C_{i-1/2} + \\ & + K_N^1 S_N \hat{\Psi}_N \delta_i^N - K_1^1 S_1 \hat{\Psi}_1 \delta_i^1 + K_N^3 S_N \hat{\xi}_N \frac{1}{\alpha_N} \delta_i^N - \\ & - K_1^3 S_1 \hat{\xi}_1 \frac{1}{\alpha_1} \delta_i^1 + K_N^3 \tau (\hat{F}_{pN} - F_{pN}) S_N \delta_i^N + K_1^3 \tau (\hat{F}_{p1} - F_{p1}) \delta_i^1 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

где  $B_{i+1/2} = -Z_{i+1/2} \frac{1}{2} (H_{adi+1/2} + H_{aui+1/2})$

$$B_{i-1/2} = -Z_{i+1/2} \frac{1}{2} (H_{adi-1/2} + H_{aui-1/2})$$

$$C_{i+1/2} = -2 P_{i-1/2} S_i (S_{ui+1/2} H_{aui+1/2} - S_{di+1/2} H_{adi+1/2}) \tau$$

Решать уравнение (25) можно методом прогонки, учитывая, что поле  $F_p$  определяется из уравнений:

$$\begin{cases} \Psi_{i+1/2} = \frac{1}{2} \frac{(x_{i+1})^{y_{i+1}} + (x_i)^{y_i}}{S Q_{i+1/2}} (S_{i+1} F_{pi+1} - S_i F_{pi}) \\ F_{p1} = 0 \end{cases}$$

по известным значениям  $\Psi$  на каждом временном слое.

## § 5. Двумерная задача диффузии

Будем считать, что в области  $G$  вместе с начальными и граничными условиями, описанными в § I, задается или вычисляется по известному начальному распределению  $\Psi_0(x, y)$ , одна из ковариантных составляющих напряженности магнитного поля  $H_x$  или  $H_y$ .

В зависимости от того какая компонента напряженности определена, выбираем соответствующие ей слои ячеек, например, если задана  $H_x$ , то выбираем слои  $\beta = \text{const}$  рис.3.

Для каждого такого слоя ( $\beta = \text{const}$ ) решаем квазиодномерную задачу.

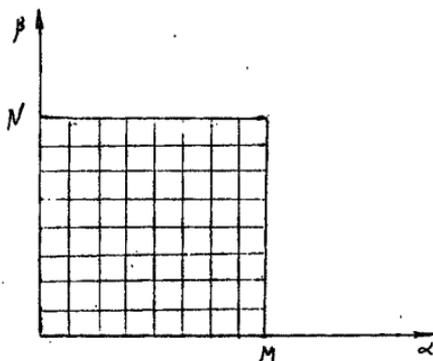


Рис.3

При этом будем использовать соотношение (20) аппроксимирующее  $(\hat{F} - \bar{F})^2$  и следующее выражение для  $\text{rot } \hat{F}$ :

$$\langle \text{rot } \hat{F} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{S} g_{i+1/2} \left\{ \langle x_{i-1} \rangle^{t-1} h_p \langle l_p \rangle_{i+1/2} \hat{F}_{p,i+1} - \langle x_i \rangle^{t-1} h_p \langle l_p \rangle_{i+1/2} \hat{F}_{p,i} - \langle x_{i+1/2} \rangle^{t-1} h_a \langle l_a \rangle_{i+1/2} \hat{F}_{a,i+1/2} - \langle x_{i+1/2} \rangle^{t-1} h_a \langle l_a \rangle_{i+1/2} \hat{F}_{a,i+1/2} \right\}$$

аппроксимирующее  $\text{rot } \hat{F}$  на некотором промежуточном временном слое.

В силу имеющегося произвола в определении  $\hat{F}$  (с точностью до  $\text{grad } f(x, y, t)$ ) полагаем  $\hat{F}_a$  равным нулю. Тогда

$$\langle \omega \hat{\mathcal{F}} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{S_{i+1/2}} \left\{ \langle \chi_{i+1} \rangle_{h_p} \langle \rho \rangle_{i+1} \hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1} - \langle \chi_i \rangle_{h_p} \langle \rho \rangle_i \hat{\mathcal{F}}_{\rho i} \right\} \quad (26)$$

В этом случае функционал  $\Phi_\beta(\hat{\mathcal{F}})$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(\hat{\mathcal{F}}) = & \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ G_{i+1/2} \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1})^2 + (\hat{\mathcal{F}}_{\rho i} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho i})^2] - 2 G_{i+1/2} Z_{i+1/2} \right. \\ & \cdot \frac{1}{2} (H_{\alpha u i+1/2} + H_{\alpha d i+1/2}) \varepsilon \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1}) + (\hat{\mathcal{F}}_{\rho i} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho i})] + \\ & + P_{i+1/2} (S_{i+1} \hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1} - S_i \hat{\mathcal{F}}_{\rho i})^2 + A_{i+1/2} \left. \right\} + K_N^4 S_N \hat{\mathcal{F}}_{\rho N} \hat{\Psi}_N - K_1^4 S_1 \hat{\mathcal{F}}_{\rho 1} \hat{\Psi}_1 + \\ & + K_N^3 S_N \hat{\mathcal{F}}_{\rho N} \hat{\xi}_N \frac{1}{\alpha_N} - K_1^3 S_1 \hat{\mathcal{F}}_{\rho 1} \hat{\xi}_1 \frac{1}{\alpha_1} + K_N^3 \frac{1}{2\varepsilon} (\hat{\mathcal{F}}_{\rho N} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho N})^2 S_N + \\ & + K_1^3 \frac{1}{2\varepsilon} (\hat{\mathcal{F}}_{\rho 1} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho 1})^2 S_1 \end{aligned}$$

где величины  $G_{i+1/2}$ ,  $P_{i+1/2}$ ,  $Z_{i+1/2}$ ,  $S_i$  определяются по формулам (24<sup>ж</sup>) с учетом следующего соответствия индексов:  
( j - номер слоя  $\beta = \text{const}$  )

$$j \leftrightarrow d; \quad j+1 \leftrightarrow u \quad \text{или} \quad (i,j) \leftrightarrow (i,d); \quad (i,j+1) \leftrightarrow (i,u)$$

Из требования  $\partial \Phi_\beta(\hat{\mathcal{F}}) / \partial \hat{\mathcal{F}}_{\rho i} = 0 \quad i = 1, \dots, N$ , получаем разностное уравнение:

$$\begin{aligned} & (G_{i+1/2} + G_{i-1/2}) (\hat{\mathcal{F}}_{\rho i} - \hat{\mathcal{F}}_{\rho i}) - 2 P_{i+1/2} S_i (S_{i+1} \hat{\mathcal{F}}_{\rho i+1} - S_i \hat{\mathcal{F}}_{\rho i}) + \\ & + 2 P_{i-1/2} S_i (S_i \hat{\mathcal{F}}_{\rho i} - S_{i-1} \hat{\mathcal{F}}_{\rho i-1}) + B_{i+1/2} + B_{i-1/2} + \\ & + (K_N^4 S_N \hat{\Psi}_N + K_N^3 S_N \frac{1}{\alpha_N} \hat{\xi}_N) \delta_i^N - (K_1^4 S_1 \hat{\Psi}_1 + K_1^3 S_1 \frac{1}{\alpha_1} \hat{\xi}_1) \delta_i^1 + \end{aligned} \quad (27)$$

$$+ \kappa_N^2 \frac{1}{\tau} (\hat{F}_{\beta N} - \bar{F}_{\beta N}) S_N \delta_i^N + \kappa_1^2 \frac{1}{\tau} (\hat{F}_{\beta 1} - \bar{F}_{\beta 1}) S_1 \delta_i^1 = 0.$$

Начальные условия, определяются из соотношений:

$$\begin{cases} \Psi_{i+1/2} = \frac{1}{2} \frac{\langle x_{i+1} \rangle^{l-1} + \langle x_i \rangle^{l-1}}{S Q_{i+1/2}} (S_{i+1} \hat{F}_{\beta i+1} - S_i \hat{F}_{\beta i}) \\ \hat{F}_{\beta 1} = 0 \end{cases} \quad (27^*)$$

Решая (27) методом прогонки, находим  $\hat{F}_{\beta}$  по которым вычисляем  $\tilde{\Psi}$  и  $\tilde{H}_{\beta}$  (в каждом слое ячеек  $\beta = \text{const}$ ):

$$\tilde{\Psi}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \frac{\langle x_{i+1} \rangle^{l-1} + \langle x_i \rangle^{l-1}}{S Q_{i+1/2}} (S_{i+1} \hat{F}_{\beta i+1} - S_i \hat{F}_{\beta i})$$

$$\tilde{H}_{\beta i} = (\hat{F}_{\beta i} - \bar{F}_{\beta i}) / \tau$$

Полученные величины  $\tilde{\Psi}$  и  $\tilde{H}_{\beta}$  являются промежуточными значениями при вычислении  $\Psi$  и  $H_{\alpha}$  и поэтому необходимы в качестве начальных условий для решения аналогичной квазиодномерной задачи по слоям ( $\alpha = \text{const}$ ). В последнем случае будем использовать следующую аппроксимацию для  $\text{rot } \hat{F}$ :

$$\langle \text{rot } \hat{F} \rangle_{j+1/2} = \frac{1}{S Q_{j+1/2}} \{ \langle x_{j+1} \rangle^{l-1} h_{\alpha} \langle \omega \rangle_{j+1} \hat{F}_{\alpha j+1} - \langle x_j \rangle^{l-1} h_{\alpha} \langle \omega \rangle_j \hat{F}_{\alpha j} \}$$

Выражение для аппроксимации  $(\hat{F} - \bar{F})^2$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \langle (\hat{F} - \bar{F})^2 \rangle_{j+1/2} &= \frac{\langle \omega \rangle_j^2 \langle \omega \rangle_{j+1}^2}{\langle \gamma \rangle_j^2} \left\{ (H_{\beta u j+1/2} + H_{\beta d j+1/2})^2 \frac{\tau^2}{4} - \right. \\ &- 2 \langle \cos \varphi(\alpha, \beta) \rangle_{j+1/2} \frac{\tau}{2} (H_{\beta u j+1/2} + H_{\beta d j+1/2}) \langle \hat{F}_{\alpha} - \bar{F}_{\alpha} \rangle_{j+1/2} + \\ &+ \langle (\hat{F}_{\alpha} - \bar{F}_{\alpha})^2 \rangle_{j+1/2} \left. \right\} \quad j = 1, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Функционал  $\hat{\Phi}_\alpha(\hat{\mathcal{F}})$  представляется как:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_\alpha(\hat{\mathcal{F}}) = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ G_{j+1/2} Z_{j+1/2} \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{F}}_{2j+1} - \hat{\mathcal{F}}_{2j})^2 + (\hat{\mathcal{F}}_{2j} - \hat{\mathcal{F}}_{2j-1})^2] - \right. \\ & - 2 G_{j+1/2} Z_{j+1/2} \frac{1}{2} (-\tilde{H}_{\beta u_{j+1/2}} - \tilde{H}_{\beta d_{j+1/2}}) \tilde{c} \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{F}}_{2j+1} - \hat{\mathcal{F}}_{2j}) + (\hat{\mathcal{F}}_{2j} - \hat{\mathcal{F}}_{2j-1})] + \\ & + P_{j+1/2} (S_{j+1} \hat{\mathcal{F}}_{2j+1} - S_j \hat{\mathcal{F}}_{2j})^2 + A_{j+1/2} \left. \right\} + \\ & + (K_M^1 S_M \hat{\mathcal{F}}_M + K_M^3 S_M \frac{1}{\alpha_M} \hat{\xi}_M) \hat{\mathcal{F}}_M - \\ & - (K_1^1 S_1 \hat{\mathcal{F}}_1 + K_1^3 S_1 \frac{1}{\alpha_1} \hat{\xi}_1) \hat{\mathcal{F}}_1 + \\ & + K_M^3 \frac{1}{\alpha c} (\hat{\mathcal{F}}_{2M} - \hat{\mathcal{F}}_M)^2 S_M + K_1^3 \frac{1}{\alpha c} (\hat{\mathcal{F}}_{21} - \hat{\mathcal{F}}_1)^2 S_1 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $G_{j+1/2}$ ,  $P_{j+1/2}$ ,  $Z_{j+1/2}$ ,  $S_j$  можно вычислять по формулам (24<sup>\*\*</sup>), если двумерные индексы соответствующие слою  $\alpha = const$ , преобразовать в двумерные индексы, используемые в (27) по следующему правилу (рис. 4)

$$\begin{aligned} (i, j) & \leftrightarrow (a, c) \\ (i, j+1) & \leftrightarrow (a, c+1) \\ (i+1, j) & \leftrightarrow (d, c) \\ (i+1, j+1) & \leftrightarrow (d, c+1) \end{aligned}$$

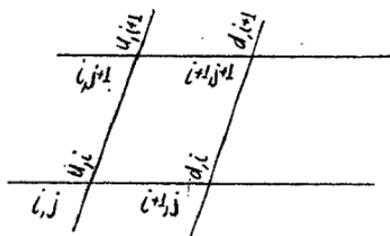


Рис. 4

При этом  $i$  будет изменяться от 1 до  $M-1$

Разностное уравнение получаем из условия минимума функционала  $\hat{\Phi}_\alpha(\hat{\mathcal{F}})$  т.е.

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_\alpha(\hat{\mathcal{F}})}{\partial \hat{\mathcal{F}}_j} = 0 \quad j = 1, \dots, M$$

Откуда следует:

$$\begin{aligned}
 & (G_{j+1/2} + G_{j-1/2})(\hat{F}_{\alpha j} - F_{\alpha j}) - 2P_{j+1/2}(S_{j+1}\hat{F}_{\alpha j+1} - S_j\hat{F}_{\alpha j})S'_j + \\
 & + 2P_{j+1/2}S_j(S_j\hat{F}_{\alpha j} - S_{j-1}\hat{F}_{\alpha j-1}) + B_{j+1/2} + B_{j-1/2} + \\
 & + (K_M^1 S_M \hat{\Psi}_M + K_M^3 S_M \hat{\xi}_M \frac{1}{\alpha_M}) \delta_i^M - \\
 & - (K_1^1 S_1 \hat{\Psi}_1 + K_1^3 S_1 \frac{1}{\alpha_1} \hat{\xi}_1) \delta_i^1 + \\
 & + K_M^3 \frac{1}{\varepsilon} (\hat{F}_{\alpha M} - F_{\alpha M}) S_M \delta_i^M + K_1^3 \frac{1}{\varepsilon} (\hat{F}_{\alpha 1} - F_{\alpha 1}) S_1 \delta_i^1 = 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

Начальные значения  $F_{\alpha j}$  определяются по вычисленному ранее  $\hat{\Psi}$  :

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_{j+1/2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\langle x_{j+1} \rangle^{l-1} + \langle x_j \rangle^{l-1}}{S Q_{j+1/2}} [S_{j+1} \hat{F}_{\alpha j+1} - S_j \hat{F}_{\alpha j}] \\ \hat{F}_{\alpha 1} = 0 \end{cases}$$

Решая (28) методом прогонки находим  $\hat{F}_{\alpha}$  и вычисляем  $\hat{\Psi}$  и  $H_{\alpha}$  :

$$\begin{aligned}
 \hat{\Psi}_{j+1/2} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\langle x_{j+1} \rangle^{l-1} + \langle x_j \rangle^{l-1}}{S Q_{j+1/2}} [S_{j+1} \hat{F}_{\alpha j+1} - S_j \hat{F}_{\alpha j}] \\
 H_{\alpha j} &= (\hat{F}_{\alpha j} - F_{\alpha j}) / \varepsilon
 \end{aligned}$$

Полученные значения  $\hat{\Psi}$  и  $H_{\alpha}$  (в каждом слое  $\alpha = \text{const}$ ) являются искомыми значениями магнитного потока и ковариантной составляющей напряженности магнитного поля на следующем временном слое во всей области

Рассмотрим другую схему для решения двумерной задачи, которая в алгоритмическом плане аналогична схеме Писмена-Рэкфорда.

$$\begin{aligned} \langle\langle \hat{F} - F \rangle\rangle_{i+1/2} = & \frac{\langle\langle \hat{F}_i^2 \rangle\rangle_{i+1/2}}{\langle\langle F_i^2 \rangle\rangle_{i+1/2}} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 (H_{2i+1/2} + H_{2i-1/2})^2 - \right. \\ & - 2 \langle \cos \varphi \rangle_{i+1/2} \frac{\tau}{2} \cdot \frac{1}{2} (H_{2i+1/2} + H_{2i-1/2}) \langle \hat{F}_i^2 - F_i^2 \rangle_{i+1/2} + \\ & \left. + \langle\langle \hat{F}_i - F_i \rangle\rangle_{i+1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \langle \cot \hat{F} \rangle_{i+1/2} = & \frac{1}{S_{i+1/2}} \left\{ \langle x_{i+1} \rangle_{h_p} \langle \rho \rangle_{i+1} \hat{F}_{pi+1} - \langle x_i \rangle_{h_p} \langle \rho \rangle_i \hat{F}_{pi} - \right. \\ & \left. - \langle x_{i+1/2} \rangle_{h_a} \langle \rho \rangle_{i+1/2} \hat{F}_{di+1/2} - \langle x_{i-1/2} \rangle_{h_a} \langle \rho \rangle_{i-1/2} \hat{F}_{di-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

При этом будем полагать, что

$F_{2i+1/2} = H_{2i+1/2} \frac{\tau}{2}$ ;  $F_{2i-1/2} = 0$ ;  $F_{2i+1/2} = -H_{2i+1/2} \frac{\tau}{2}$ ;  $F_{2i-1/2} = 0$ ,  
тогда (30) можно записать как:

$$\langle \cot \hat{F} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{S_{i+1/2}} \left[ \langle x_{i+1} \rangle_{h_p} \langle \rho \rangle_{i+1} \hat{F}_{pi+1} - \langle x_i \rangle_{h_p} \langle \rho \rangle_i \hat{F}_{pi} \right].$$

Функционал  $\Phi_p(\hat{F})$  с учетом (29) и (30) будет записываться:

$$\begin{aligned} \Phi_p(\hat{F}) = & \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ G_{i+1/2} \frac{1}{2} \left[ (\hat{F}_{pi+1} - F_{pi+1})^2 + (\hat{F}_{pi} - F_{pi})^2 \right] - \right. \\ & - 2 G_{i+1/2} \tau \cdot \frac{1}{2} (H_{2i+1/2} + H_{2i-1/2}) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ (\hat{F}_{pi+1} - F_{pi+1}) + (\hat{F}_{pi} - F_{pi}) \right] + \\ & \left. + P_{i+1/2} (S_{i+1} + \hat{F}_{pi+1} - S_i - \hat{F}_{pi})^2 + A_{i+1/2} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (K_N^1 S_N \hat{\Psi}_N + K_N^3 S_N \frac{1}{\alpha_N} \hat{\xi}_N) \hat{F}_{pN} - (K_1^1 S_1 \hat{\Psi}_1 + K_1^3 S_1 \frac{1}{\alpha_1} \hat{\xi}_1) \hat{F}_{p1} + \\
 & + K_1^3 \frac{1}{\epsilon} (\hat{F}_{p1} - F_{p1})^2 S_1 + K_N^3 \frac{1}{\epsilon} (\hat{F}_{pN} - F_{pN})^2 S_N
 \end{aligned}$$

Разностное уравнение получаемое из условия минимума  $\hat{\Phi}_p(\hat{F})$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 & (G_{i-1/2} + G_{i+1/2}) (\hat{F}_{pi} - F_{pi}) - 2 P_{i-1/2} S_i (S_{i-1} \hat{F}_{pi-1} - S_i \hat{F}_{pi}) + \\
 & + 2 P_{i-1/2} S_i (S_i \hat{F}_{pi} - S_{i-1} \hat{F}_{pi-1}) + \frac{1}{2} B_{i-1/2} + \frac{1}{2} B_{i+1/2} + \\
 & + (K_N^1 S_N \hat{\Psi}_N + K_N^3 S_N \frac{1}{\alpha_N} \hat{\xi}_N) \delta_i^N - (K_1^1 S_1 \hat{\Psi}_1 + K_1^3 S_1 \frac{1}{\alpha_1} \hat{\xi}_1) \delta_i^1 + \quad (31) \\
 & + K_1^3 \frac{1}{\epsilon} (\hat{F}_{p1} - F_{p1}) S_1 \delta_i^1 + K_N^3 \frac{1}{\epsilon} (\hat{F}_{pN} - F_{pN}) S_N \delta_i^N = 0
 \end{aligned}$$

Начальные условия определяются из соотношений

$$\Psi_{p_{i+1/2}} = \frac{1}{2} \frac{\langle x_{i+1/2} \rangle + \langle x_i \rangle}{S Q_{i+1/2}} \left\{ (S_{i-1} \hat{F}_{pi+1} - S_i \hat{F}_{pi}) + (S_{i+1/2} \mu_{i+1/2} - S_{i-1/2} \mu_{i-1/2}) \frac{\epsilon}{2} \right\},$$

$$\hat{F}_{p1} = 0$$

Решая (31) методом прогонки вычисляем  $\hat{F}_p$ , по которым находим  $\Psi_{p_{i+1/2}}$  и  $H_p$ :

$$\hat{\Psi}_{p_{i+1/2}} = \frac{1}{2} \frac{\langle x_{i+1/2} \rangle + \langle x_i \rangle}{S Q_{i+1/2}} \left\{ S_{i-1} \hat{F}_{pi-1} - S_i \hat{F}_{pi} \right\}$$

$$H_{pi} = (\hat{F}_{pi} - F_{pi}) \frac{1}{\epsilon}$$

Величины  $\hat{F}_{p_{i+1/2}}$  и  $H_{pi}$  соответствуют временному слою  $t_i - \epsilon/2$  и кроме того являются начальными условиями для решения такой же квазиодномерной задачи по слоям  $p = \text{const}$ , которую можно решить используя следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned}
& (G_{j+1/2} + G_{j-1/2})(\hat{F}_{dj} - \hat{F}_{dj}) - 2P_{j+1/2}(S_{j+1}\hat{F}_{dj+1} - S_j\hat{F}_{dj})S_j + \\
& + 2P_{j-1/2}S_j(S_j\hat{F}_{dj} - S_{j-1}\hat{F}_{dj-1}) + \frac{1}{2}B_{j+1/2} + \frac{1}{2}B_{j-1/2} + \\
& + \delta_j^m(K_m^1 S_m \hat{\Psi}_m - K_m^3 S_m \frac{1}{\alpha_m} \hat{\xi}_m) - \delta_j^1(K_1^1 S_1 \hat{\Psi}_1 + K_1^3 S_1 \frac{1}{\alpha_1} \hat{\xi}_1) + \\
& + K_1^3 \frac{2}{\epsilon} (\hat{F}_{\alpha 1} - \hat{F}_{\beta 1}) S_1 \delta_1^1 - K_m^3 \frac{2}{\epsilon} (\hat{F}_{\alpha m} - \hat{F}_{\beta m}) S_m \delta_i^m = 0 \quad (32)
\end{aligned}$$

Решив уравнение (32) находим  $\hat{F}_{dj}$  ( в каждом слое  $d = const$  ), по которым вычисляем  $\hat{\Psi}_{dj}$  и  $\hat{H}_{dj}$ . Значение этих величин будут соответствовать следующему временному слою  $t_{n+1}$ .

Из описания методов решения двумерной задачи можно заметить, что для ее реализации на ЭВМ требуется всего одна подпрограмма решения квазиодномерной задачи диффузии магнитного поля в произвольном слое расчетных ячеек. Эта подпрограмма будет последовательно вызываться сначала для расчета диффузии в слоях  $\beta = const$ , затем для решения соответствующей квазиодномерной задачи в слоях  $d = const$ .

## § 6. Примеры расчетов

Задача диффузии магнитного поля (в случае плоской симметрии,  $\ell=1$ ) в алгоритмическом и программном отношении, с точностью до замены переменных, совпадает с задачей теплопроводности, описанной в [12]. По этой причине решение тестовой задачи о точечном источнике [12], применительно к магнитному полю, в точности совпадает с результатами, приведенными в [12]. Специфика диффузии векторных полей проявляется только в случае осевой симметрии ( $\ell=2$ ). Для того, чтобы проиллюстрировать работоспособность предложенных алгоритмов в этом случае, приведем следующий расчет.

а) Расчетная область

$$G(x, y) = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$$

$$X = \quad ; Y = \quad$$

б) Ортогональная сетка

$$N = 20; M = 60$$

в) Граничные условия:

$$x=0; \Psi(0, y)=0; t>0$$

$$x=X; \Psi(X, y) =$$

$$\begin{cases} y < y_1, \Psi(X, y) = a \\ y_1 \leq y \leq y_2, \Psi(X, y) = a + (b-a) \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ y_2 \leq y \leq Y, \Psi(X, y) = b \end{cases}$$

$$a=1, b=3, y_1=, y_2=, t>0$$

$$y=0; \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0; t>0$$

$$y=Y; \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0; t>0$$

г) Начальные условия

$$\Psi(x, y, 0) = 0; x, y \in G$$

$$\text{Магнитная вязкость } \gamma = 1$$

Искалось стационарное решение методом установления с шагом по времени  $\tau = 0.1$ . Для достижения точности в три значащие цифры потребовалось 10 шагов. На рис.6 приведены силовые линии рассчитанного магнитного поля.

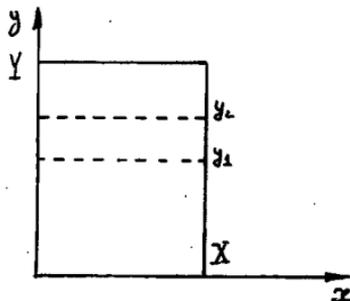


рис.5

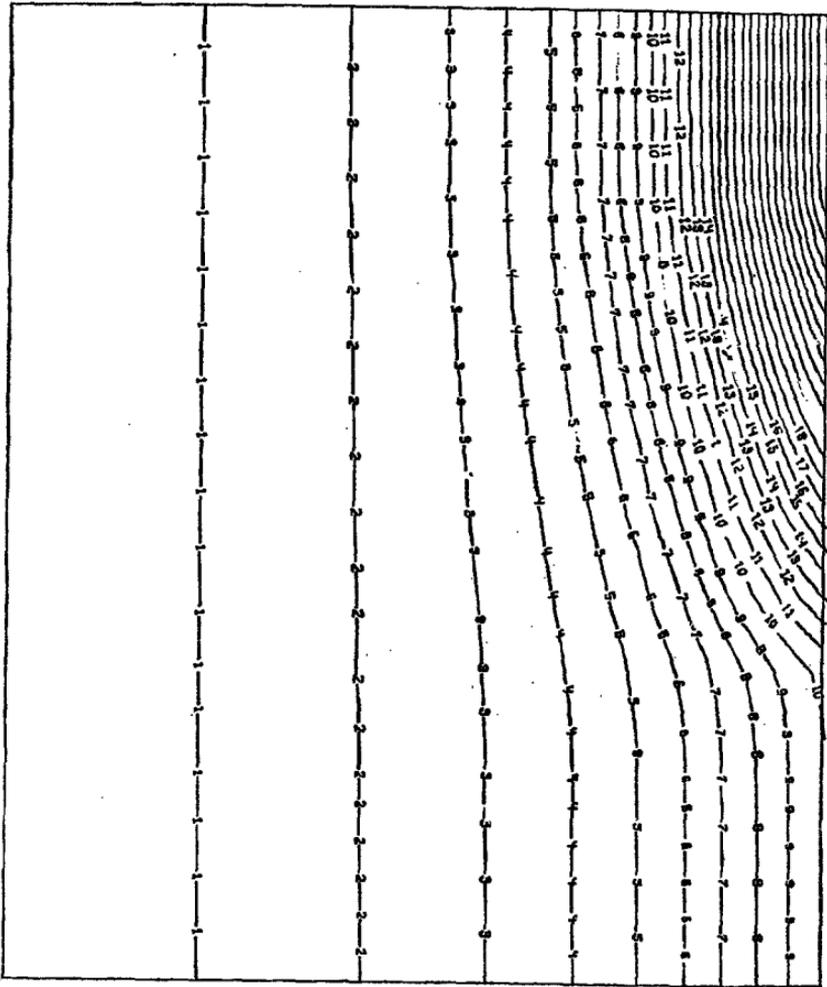


Рис. 6

## Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем - М.:Наука, 1977, 656 с
2. Таран М.Д., Фаворский А.П. Численное моделирование двумерной диффузии магнитного поля в среде с неоднородной электропроводностью. - М.: препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1978, № 51.
3. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения диффузии магнитного поля. - М.:препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1979, № 179, 20 с.
4. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Вариационно-потокосые разностные схемы для уравнения диффузии электромагнитного поля. ДАН СССР, 1980, т.254, № 6, с.1388-1390.
5. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений диффузии магнитного поля. Дифференциальные уравнения, 1982, т.18, № 7, с.1229-1240.
6. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Разностные схемы для уравнения диффузии электромагнитного поля с анизотропным коэффициентом проводимости.- М.: препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 4, 1980.
7. Коршия Т.К. Численное моделирование диффузионных процессов в анизотропных средах. Труды ИПМ им.И.Н.Векуа Тбилисского гос.университета, 1983, 13, с.141-179.
8. Коршия Т.К. Численное моделирование некоторых двумерных задач диффузии электромагнитного поля. Труды ИПМ им. И.Н. Векуа Тбилисского гос.университета, 1983, 13, с.141-179.
9. Бис.М. Вариационные принципы в теории теплообмена.-М.: Энергия, 1975, - 208 с.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978, 600 с.
11. *Kershaw D. The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the iterative solution of System of linear equations. J. Comput. Phys. v26, n1, 1978, p 43-65.*
12. Головинин В.М., Коршунов В.К., Самарский А.А., Чудаков В.В. Метод факторизованных тепловых смещений для решения двумерных задач теплопроводности на нерегулярных расчетных сетках.

- М.: препринт ИГиМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, № 52 ,  
25 с.

Головизин Василий Михайлович, Коршунов Владимир Константино-  
вич, Самарский Александр Андреевич, Чуданов Владимир Василье-  
вич "Об экономичных алгоритмах расчета диффузии магнитного по-  
ля на неортогональных сетках."

Редактор В.А. Гасялов.

Корректор С.И. Ткаченко.

Подписано к печати 09.10.85 г. № Т - 21007. Заказ № 394.

Формат бумаги 60x90 1/16. Тираж 195 экз.

Объем 1,4 уч.-издл. Цена 10 коп.

055 (02)2

Отпечатано на ротавриантах в Институте прикладной математики АН СССР



Москва, Мясуская пл. 4.