

58



Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Академии наук СССР

ОНТУ

В.М. Головизнин, В.К. Коршунов, А.А. Самарский,  
В.В. Чуданов

МЕТОД ФАКТОРИЗОВАННЫХ  
ТЕПЛОВЫХ СМЕЩЕНИЙ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ  
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ РАСЧЕТНЫХ СЕТКАХ

Препринт № 58 за 1985 г.

Москва

## А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается новый безитерационный метод решения уравнения теплопроводности на нерегулярных расчетных сетках, обладающий свойством асимптотической устойчивости. Метод основан на вариационном принципе Био и идее суммарной аппроксимации. В алгоритмическом плане он может быть отнесен к классу локально-одномерных, однако представления исходных уравнений в терминах т.н. "тепловых смещений" -- величин, вводимых при формулировке соответствующего принципа, избавляет его от большинства недостатков, характерных для традиционных локально-одномерных разностных схем. Метод факторизованных тепловых смещений (или ФТС-метод) является экономичным как по числу затрачиваемых арифметических операций, так и по объему требуемой оперативной памяти и предназначен для решения широкого круга различных технологических задач.

## ВВЕДЕНИЕ

При численном моделировании эволюции сплошной среды в лагранжевых [1] или смешанных эйлерово-лагранжевых [2] переменных расчетные ячейки, как правило, довольно сильно искажаются, и при учете в таких задачах процессов теплопроводности соответствующее уравнение приходится аппроксимировать на сравнительно нерегулярных расчетных сетках. К нерегулярным расчетным ячейкам приводят и различные автоматизированные алгоритмы построения расчетных сеток в областях с криволинейными границами [3,4].

При решении задач теплопроводности предпочтение обычно отдается безусловно устойчивым неявным разностным схемам, при использовании которых, на каждом временном шаге, необходимо решать систему алгебраических уравнений большой размерности. В одномерном случае это легко осуществляется методами протонки, в случае же большего числа измерений — представляет известную трудность.

При решении уравнения теплопроводности в комплексе с другими уравнениями механики сплошной среды весьма желательно, чтобы учет теплопереноса не приводил к слишком большому относительному приросту требуемых вычислительных ресурсов. Алгоритмы, обладающие таким свойством, получили название экономичных [5].

Экономичные методы решения многомерных уравнений теплопроводности основываются, как правило, на идее факторизации разностных операторов и методе суммарной аппроксимации [5]. Примером здесь могут служить т.н. продольно-поперечные и локально-одномерные схемы [5], не требующие дополнительных двумерных массивов с числом арифметических операций, затрачиваемых на один шаг, пропорциональным количеству узлов в расчетной области. Однако схемы с факторизованными операторами имеют серьезные недостатки, связанные, главным образом, с отсутствием сходимости при наличии разрывов в коэффициенте теплопроводности. Кроме того, эти методы не допускают непосредственного распространения на случай неортогональных расчетных сеток.

Перечисленные обстоятельства приводят к тому, что в последнее время все большее распространение получают различные итерационные методы решения неявных уравнений теплопроводности [6-8], к числу которых относится и т.н. "метод Киришоу" [9]. Метод Киришоу, так же как и [6,7] с некоторыми оговорками, также можно отнести к разряду экономичных по числу арифметических

операций, но для его реализации требуется весьма большое дополнительное поле в оперативной памяти ЭВМ (более десятка дополнительных массивов). Следует к тому же отметить, что среднее число операций, затрачиваемых при этом на один узел расчетной сетки (при общем их количестве  $\sim 2 \cdot 10^3$ ) более чем на порядок превышает соответствующий показатель при использовании явных разностных схем газовой динамики в СЭЛ-переменных [2].

Таким образом, задача построения безусловно устойчивых методов решения уравнения теплопроводности на нерегулярных расчетных сетках, сходящихся при наличии произвольных разрывов в коэффициенте теплопроводности и требующих для своей реализации вычислительных ресурсов, сравнимых с затрачиваемыми при использовании явных схем газовой динамики, представляет значительный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

В настоящей работе предлагается новый безитерационный метод решения уравнения теплопроводности на нерегулярных расчетных сетках, обладающий свойством асимптотической устойчивости. Метод основан на вариационном принципе Био [10] и идее суммарной аппроксимации [5]. В алгоритмическом плане он может быть отнесен к классу локально-одномерных, однако представление исходных уравнений в терминах т.н. "теплых смещений" [10] — величин, вводимых при формулировке соответствующего вариационного принципа, избавляет его от большинства недостатков, характерных для традиционных локально-одномерных разностных схем.

Новый алгоритм, получивший название метода факторизованных теплых смещений (ФТС), является экономичным как по числу затрачиваемых арифметических операций, так и по объему требуемой оперативной памяти.

Свойства нового метода иллюстрируются на ряде тестовых расчетов.

§ I. Формулировка уравнения теплопроводности  
в терминах тепловых смещений

Пусть  $G$  — двумерная область (в декартовых координатах  $x, y$ ) с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ , занятая теплопроводящей средой с изотропными теплофизическими свойствами, не зависящими от температуры  $T$ .

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{q} \quad x, y \in G, t > 0 \quad (1)$$

$$\vec{q} = - \chi \operatorname{grad} T \quad (2)$$

с граничными условиями первого и второго рода.

$$T|_{\Gamma} = T_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_1 \subset \Gamma \quad (3)$$

$$-\chi \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = q_{\Gamma}(x, y, t) \quad x, y \in \gamma_2 \subset \Gamma, \gamma_1 \cup \gamma_2 = \Gamma, t > 0 \quad (4)$$

и начальными условиями:

$$T|_{t=0} = T_0(x, y) \quad x, y \in G \cup \Gamma \quad (5)$$

где  $c(x, y)$  и  $\chi(x, y)$  — коэффициенты удельной теплоемкости и теплопроводности соответственно,  $\rho$  — плотность,  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе,  $T_{\Gamma}, q_{\Gamma}, T_0$  — заданные функции.

Введем тепловое смещение  $\vec{H}$  [10] соотношением:  $\vec{q} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , где  $\vec{q}$  — вектор потока тепла.

Запишем через  $\vec{H}$  проинтегрированное по времени уравнение (1) и закон Фурье для потока:

$$\rho c T = - \operatorname{div} \vec{H} \quad (6)$$

$$\operatorname{grad} T = - \frac{1}{\chi} \dot{\vec{H}} \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует уравнение теплопроводности в терминах  $\vec{H}$ :

$$\frac{1}{\chi} \dot{\vec{H}} - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{c \rho} \operatorname{div} \vec{H} \right) = 0 \quad (8)$$

Начальные и граничные условия преобразовываются к виду:

$$T|_{t=0} = T_0(x, y), \quad x, y \in G \cup \Gamma$$

$$T|_{\Gamma} = T_{\Gamma}(x, y, t), \quad x, y \in \gamma_1 \subset \Gamma$$

$$\vec{H}\vec{n}|_{\Gamma} = q_{\Gamma}(x, y, t), \quad x, y \in \gamma_2 \subset \Gamma$$

§ 2. Дискретизация по времени.

Вариационный принцип Био.

Дискретизируем уравнения (6)–(8) по времени следующим образом:

$$\rho c \hat{T} = -\operatorname{div} \hat{H} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\hat{H} - \vec{H}}{\tau} = \operatorname{grad} \hat{T} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\hat{H} - \vec{H}}{\tau} - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\rho c} \operatorname{div} \hat{H} \right) = 0 \quad (11)$$

где  $\tau$  – шаг по времени, величины отмеченные "крышкой", относятся к последующему временному слою, без "крышки" – к текущему.

Умножая уравнение (11) скалярно на произвольную вариацию  $\delta \hat{H}$  и интегрируя по области  $G$  получаем:

$$\iint_G \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\hat{H} - \vec{H}}{\tau} \delta \hat{H} + \delta \left[ \frac{1}{2\rho c} (\operatorname{div} \hat{H})^2 \right] \right\} dv + \oint_{\Gamma} \delta \hat{H} \vec{n} ds = 0 \quad (12)$$

Это соотношение представляет собой вариационный принцип Био для теплопроводности [10]. Заметим, что при граничном условии (4)

$\delta \hat{H} \vec{n}|_{\gamma_2} = 0$ , поэтому выражение (12) можно переписать в виде:

$$\iint_G \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\hat{H} - \vec{H}}{\tau} \delta \hat{H} + \delta \left[ \frac{1}{2\rho c} (\operatorname{div} \hat{H})^2 \right] \right\} dv + \oint_{\Gamma} K(x, y) \delta \hat{H} \vec{n} ds = 0 \quad (13)$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x, y \in \gamma_2 \\ 1, & \text{при } x, y \in \gamma_1 \end{cases}$$

Из (13) получаем функционал:

$$\Phi(\hat{H}) = \iint_G \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{(\hat{H} - \vec{H})^2}{2\tau} + \frac{1}{2\rho c} (\operatorname{div} \hat{H})^2 \right\} dv + \oint_{\Gamma} K \hat{H} \vec{n} ds \quad (14)$$

который достигает стационарного значения на уравнении (II) с граничными условиями (3) и (4).

### § 3. Криволинейная система координат

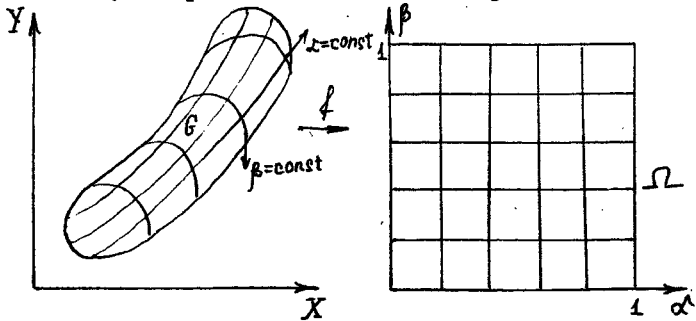


Рис. I.

Введем в области  $G$  криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$  и предположим, что область  $G$  допускает взаимно-однозначное отображение  $\{f: X, Y \rightarrow \alpha, \beta\}$  в единичный квадрат  $\Omega = \{0 \leq \alpha \leq 1; 0 \leq \beta \leq 1\}$  на плоскости  $(\alpha, \beta)$ , причем Якобиан

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\alpha, \beta)} > 0.$$

Запишем выражения, входящие в (I4), в локальном контравариантном базисе криволинейной системы координат  $(\alpha, \beta)$ .

Орты контравариантного базиса имеют вид:

$$\vec{n}_\alpha = \frac{1}{l_\alpha} \left( \frac{\partial Y}{\partial \alpha}; -\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right); \quad l_\alpha = \sqrt{\left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)^2}$$

$$\vec{n}_\beta = \frac{-1}{l_\beta} \left( \frac{\partial Y}{\partial \beta}; -\frac{\partial X}{\partial \beta} \right); \quad l_\beta = \sqrt{\left( \frac{\partial X}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right)^2}$$

где  $l_\alpha, l_\beta$  — коэффициенты Ламе криволинейной системы координат.

Выражая  $\vec{H} = (H_x, H_y)$  через контравариантные составляющие  $H^\alpha$  и  $H^\beta$ :

$$H_x = -\frac{1}{J} \left( \frac{\partial X}{\partial \beta} l_\alpha H^\alpha + \frac{\partial X}{\partial \alpha} l_\beta H^\beta \right)$$

$$H_y = -\frac{1}{j} \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} l_\alpha H^\alpha + \frac{\partial y}{\partial \alpha} l_\beta H^\beta \right)$$

и подставляя эти соотношения в выражения:

$$\vec{H}^2 = H_x^2 + H_y^2$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial x} H_x + \frac{\partial}{\partial y} H_y$$

получаем (сделав замену  $H^\alpha = -H^\alpha$ ;  $H^\beta = -H^\beta$ ):

$$\vec{H}^2 = \frac{l_\alpha^2 l_\beta^2}{j^2} \left\{ (H^\alpha)^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) H^\alpha H^\beta / l_\beta + (H^\beta)^2 \right\} \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{x^{l-1} y} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^{l-1} l_\beta H^\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} (x^{l-1} l_\alpha H^\alpha) \right] \quad (16)$$

где  $l$  - индекс геометрии задачи ( $l=1$  - для случая плоской симметрии,  $l=2$  - для осевой симметрии).

#### § 4. Дискретная квазиодномерная задача

Рассмотрим процесс теплопроводности вдоль слоя ячеек (рис.2).

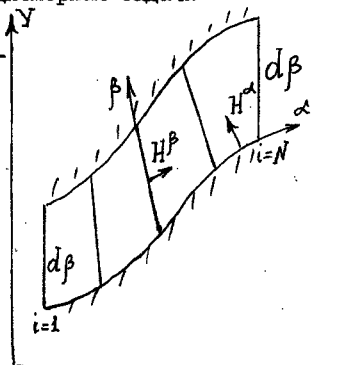
Границу этого слоя будем считать достаточно гладкой и теплоизолированной, т.е.  $H^\alpha = 0$ .

Будем относить компоненты тепловых смещений к центрам граней, а величины  $T, \alpha, c$  - к центрам ячеек.

Аппроксимируем функционал (14) выражением:

$$\Phi(\hat{H}) = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{\langle \langle (\hat{H} - H) \rangle \rangle_{i+1/2}^2}{2\tau\alpha} + \frac{1}{2\rho c} \langle \operatorname{div} \hat{H} \rangle_{i+1/2}^2 \right\} V_{i+1/2} \quad (17)$$

$$+ K_N \langle \langle X \rangle \rangle_N h_p \langle l_\beta \rangle_N \hat{H}_N^\beta T_N - K_1 \langle \langle X \rangle \rangle_1 h_p \langle l_\beta \rangle_1 \hat{H}_1^\beta T_1$$





где  $\langle \cdot \rangle, \langle \cdot \rangle$  - некоторые разностные операторы от соответствующих сеточных функций;  $V_{i+1/2}$  - объем  $i$ -той ячейки;

$$K_1, K_N = \begin{cases} 0 & \text{при условии (4) на границе} \\ 1 & \text{при условии (3) на границе;} \end{cases}$$

$h_\alpha, h_\beta$  - размеры ячеек в координатах  $(\alpha, \beta)$ .

Поскольку  $H^\alpha \equiv 0$ , то из (15) имеем:

$$\langle \langle (\hat{H} - \bar{H})^2 \rangle \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{SQ_{i+1/2}} h_\alpha^2 \langle l_\alpha \rangle_i^2 h_\beta^2 \langle l_\beta \rangle_i^2 \langle \langle (\hat{H}^\beta - H^\beta)^2 \rangle \rangle_{i+1/2} \quad (18)$$

где  $SQ_{i+1/2}$  - площадь  $i$ -той ячейки.

Будем рассматривать два возможных вида выражения:

$$\langle \langle (\hat{H}^\beta - H^\beta)^2 \rangle \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{4} [(\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta) \cdot (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta)]^2 \quad (19)$$

$$\langle \langle (\hat{H}^\beta - H^\beta)^2 \rangle \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta)^2 + (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta)^2] \quad (20)$$

Поскольку тепловое смещение  $\hat{H}$  определяется с точностью до  $\text{rot } \psi(x, y, t)$  (см. (9)), где  $\psi(x, y, t)$  - произвольная функция, то при аппроксимации  $\text{div } \hat{H}$ , без ограничения общности можно положить  $H^\alpha = 0$  на нижних и верхних гранях ячеек. Тогда из (16) получаем:

$$\langle \text{div } \hat{H} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{V_{i+1/2}} (\langle X^{l-1} \rangle_{i+1} h_\beta \langle l_\beta \rangle_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - \langle X^l \rangle_i h_\beta \langle l_\beta \rangle_i \hat{H}_i^\beta) \quad (21)$$

Запишем функционал (17) в терминах контравариантных компонент  $H^\beta$  и  $H^\beta$ . В случае аппроксимации (20) получаем:

$$\Phi(\hat{H}) = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ G_{i+1/2} \frac{1}{2} [(\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta)^2 + (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta)^2] + P_{i+1/2} (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta)^2 \right\} + K_N S_N \hat{H}_N^\beta T_N - K_1 S_1 \hat{H}_1^\beta T_1 \quad (22)$$

где

$$G_{i+1/2} = \frac{V_{i+1/2}}{2\tau \kappa_{i+1/2}} \frac{(L_{i+1}^2 + L_i^2)(L_{H_i}^2 + L_{B_i}^2)}{4SQ_{i+1/2}}; \quad P_{i+1/2} = \frac{1}{C_{i+1/2} V_{i+1/2}}; \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$S_i = \frac{(X_{H_i}^{l-1} + X_{B_i}^{l-1})}{2} \cdot \sqrt{(X_{B_i} - X_{H_i})^2 + (Y_{B_i} - Y_{H_i})^2}; \quad i = \overline{1, N}$$

$$L_i = \sqrt{(X_{B_i} - X_{H_i})^2 + (Y_{B_i} - Y_{H_i})^2}; \quad i = \overline{1, N} \quad (22^*)$$

$$L_{Ni} = \sqrt{(X_{Ni+1} - X_{Ni})^2 + (Y_{Ni+1} - Y_{Ni})^2}, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$L_{Vi} = \sqrt{(X_{Vi+1} - X_{Vi})^2 + (Y_{Vi+1} - Y_{Vi})^2}, \quad i = \overline{1, N-1}$$

$X_{Ni}, Y_{Ni}$  и  $X_{Vi}, Y_{Vi}$  — координаты (соответственно нижнего и верхнего) узлов  $i$ -той грани.

Разностный аналог уравнения (II) следует из условия минимума функционала (22):

$$\frac{\partial \Phi(\hat{H})}{\partial \hat{H}_i^P} = 0, \quad i = \overline{1, N} \quad (23)$$

или

$$\begin{aligned} & (G_{i+1/2} + G_{i-1/2})(\hat{H}_i^P - H_i^P) - 2P_{i+1/2}S_i(S_{i+1}\hat{H}_{i+1}^P - S_i\hat{H}_i^P) + \\ & + 2P_{i-1/2}S_i(S_i\hat{H}_i^P - S_{i-1}\hat{H}_{i-1}^P) + K_N S_N T_N \delta_i^N - K_1 S_1 T_1 \delta_i^1 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{где } \delta_i^K = \begin{cases} 0, & i \neq K \\ 1, & i = K \end{cases}$$

В случае аппроксимации (I9) уравнение (23) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(G_{i+1/2} + G_{i-1/2})(\hat{H}_i^P - H_i^P) + \frac{1}{2}G_{i+1/2}(\hat{H}_{i+1}^P - H_{i+1}^P) + \frac{1}{2}G_{i-1/2}(\hat{H}_{i-1}^P - \\ & - H_{i-1}^P) - 2P_{i+1/2}S_i(S_{i+1}\hat{H}_{i+1}^P - S_i\hat{H}_i^P) + 2P_{i-1/2}S_i(S_i\hat{H}_i^P - S_{i-1}\hat{H}_{i-1}^P) + \\ & + K_N S_N T_N \delta_i^N - K_1 S_1 T_1 \delta_i^1 = 0, \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (25)$$

Решать уравнение (24), (25) можно методом прогонки, учитывая, что поле  $\hat{H}$  определяется из уравнений:

$$\begin{aligned} C_{i+1/2} T_{i+1/2} &= \frac{1}{V_{i+1/2}} (S_{i+1} H_{i+1}^P - S_i H_i^P) \\ H_1^P &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

по известному полю температур на каждом временном слое.

§ 5. Дискретная квазиодномерная задача с потоками на границах

Предположим теперь, что границы слоя ячеек (рис.3) не являются теплоизолированными, а потоки через нижнюю и верхнюю грани каждой ячейки заданы, т.е.

$$\vec{Q}_{Ni+1/2} \vec{n}_{Ni+1/2} = Q_{Ni+1/2}^{\alpha} \vec{n}_{Ni+1/2}^{\alpha}; \vec{Q}_{Bi+1/2} \vec{n}_{Bi+1/2} = Q_{Bi+1/2}^{\alpha} \vec{n}_{Bi+1/2}^{\alpha}$$

Из (15) получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\hat{H} - \bar{H})^2 \rangle\rangle_{i+1/2} &= \frac{\langle \langle \lambda_{\alpha}^2 \rangle_i \langle \lambda_{\beta}^2 \rangle_i \rangle}{\langle J_i^2 \rangle} \left\{ \langle\langle (\hat{H}^{\alpha} - H^{\alpha})^2 \rangle\rangle_{i+1/2} + \langle\langle (\hat{H}^{\beta} - H^{\beta})^2 \rangle\rangle_{i+1/2} \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\langle \lambda_{\alpha} \rangle_i \langle \lambda_{\beta} \rangle_i} \cdot \langle \hat{H}^{\alpha} - H^{\alpha} \rangle_{i+1/2} \cdot \langle \hat{H}^{\beta} - H^{\beta} \rangle_{i+1/2} \left( \langle \frac{\partial X}{\partial \alpha} \rangle_i \langle \frac{\partial X}{\partial \beta} \rangle_i + \langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \rangle_i \langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \rangle_i \right) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что

$$\langle \hat{H}^{\alpha} - H^{\alpha} \rangle_{i+1/2} = \frac{(H_{Bi+1/2}^{\alpha} - H_{Bi+1/2}^{\alpha}) + (H_{Ni+1/2}^{\alpha} - H_{Ni+1/2}^{\alpha})}{2\tau} = \frac{Q_{Bi+1/2}^{\alpha} + Q_{Ni+1/2}^{\alpha}}{2}$$

где  $H_{Bi+1/2}^{\alpha}$ ,  $H_{Ni+1/2}^{\alpha}$  — тепловые смещения на верхней и нижней грани  $i$ -той ячейки, поэтому (27) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\hat{H} - \bar{H})^2 \rangle\rangle_{i+1/2} &= \frac{\langle \langle \lambda_{\alpha}^2 \rangle_i \langle \lambda_{\beta}^2 \rangle_i \rangle}{\langle J_i^2 \rangle} \left\{ \left( \frac{Q_{Bi+1/2}^{\alpha} + Q_{Ni+1/2}^{\alpha}}{2} \right)^2 \tau^2 + \langle\langle (\hat{H}^{\beta} - H^{\beta})^2 \rangle\rangle_{i+1/2} \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\langle \lambda_{\alpha} \rangle_i \langle \lambda_{\beta} \rangle_i} \tau \left( \frac{Q_{Bi+1/2}^{\alpha} + Q_{Ni+1/2}^{\alpha}}{2} \right) \langle \hat{H}^{\beta} - H^{\beta} \rangle_{i+1/2} \left( \langle \frac{\partial X}{\partial \alpha} \rangle_i \langle \frac{\partial X}{\partial \beta} \rangle_i + \langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \rangle_i \langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \rangle_i \right) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим соотношение для  $\langle \text{div} \hat{H} \rangle_{i+1/2}$

$$\begin{aligned} \langle \text{div} \hat{H} \rangle_{i+1/2} &= \frac{1}{V_{i+1/2}} \left\{ \langle X \rangle_{i+1}^{\beta-1} h_{\beta} \langle \lambda_{\beta} \rangle_{i+1} \hat{H}_{i+1}^{\beta} - \langle X \rangle_i^{\beta+1} h_{\beta} \langle \lambda_{\beta} \rangle_i \hat{H}_i^{\beta} \right. \\ &+ \left. \langle X \rangle_{i+1/2}^{\alpha-1} h_{\alpha} \langle \lambda_{\alpha} \rangle_{i+1/2} \hat{H}_{i+1/2}^{\alpha} - \langle X \rangle_{i+1/2}^{\alpha+1} h_{\alpha} \langle \lambda_{\alpha} \rangle_{i+1/2} \hat{H}_{i+1/2}^{\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

В силу произвола в определении  $\bar{H}$  будем полагать  $H_{Ni+1/2}^{\alpha}$  и  $H_{Bi+1/2}^{\alpha}$  равными нулю, тогда из соотношений:

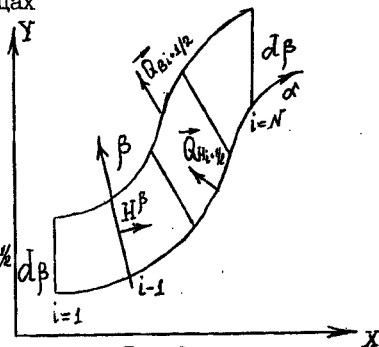


Рис.3

$$\frac{\hat{H}_{Ni+1/2}^\alpha - H_{Ni+1/2}^\alpha}{\tau} = Q_{Ni+1/2}^\alpha ; \quad \frac{\hat{H}_{Bi+1/2}^\alpha - H_{Bi+1/2}^\alpha}{\tau} = Q_{Bi+1/2}^\alpha$$

имеем  $\hat{H}_{Ni+1/2}^\alpha = Q_{Ni+1/2}^\alpha \cdot \tau$  ;  $\hat{H}_{Bi+1/2}^\alpha = Q_{Bi+1/2}^\alpha \cdot \tau$

Поэтому соотношение (29) переписывается следующим образом:

$$\langle \text{div } \vec{H} \rangle_{i+1/2} = \frac{1}{V_{i+1/2}} \left\{ \langle X \rangle_{i+1}^{t-1} h_\beta \langle l_\beta \rangle_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - \langle X \rangle_i^{t-1} h_\beta \langle l_\beta \rangle_i \hat{H}_i^\beta \right\} + \langle X_{Bi+1/2} \rangle_{i+1/2}^{t-1} h_\alpha \langle l_\alpha \rangle_{Bi+1/2} Q_{Bi+1/2}^\alpha - \langle X \rangle_{Ni+1/2}^{t-1} h_\alpha \langle l_\alpha \rangle_{Ni+1/2} Q_{Ni+1/2}^\alpha \tau \} \quad (30)$$

Функционал (17) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{H}) = & \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ G_{i+1/2} \cdot \frac{1}{4} \left[ (\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta) + (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta) \right]^2 + G_{i+1/2} \cdot \mathcal{L}_{i+1/2} \cdot \tau \cdot \right. \\ & \frac{Q_{Bi+1/2} + Q_{Ni+1/2}}{2} \cdot \left[ (\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta) + (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta) \right] + P_{i+1/2} \cdot (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta)^2 \\ & \left. + 2P_{i+1/2} (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta) (S_{Bi+1/2} Q_{Bi+1/2}^\alpha - S_{Ni+1/2} Q_{Ni+1/2}^\alpha) \tau + A_{i+1/2} \right\} + \\ & + K_N S_N \hat{H}_N^\beta T_N - K_1 S_1 \hat{H}_1^\beta T_1 \end{aligned}$$

где  $\mathcal{L}_{i+1/2} = (DX_{Ai+1/2} + DX_{Bi+1/2} + DY_{Ai+1/2} + DY_{Bi+1/2}) / (LA_{i+1/2} + LB_{i+1/2})$

$$DX_{Ai+1/2} = [(X_{Ni+1} - X_{Ni}) + (X_{Bi+1} - X_{Bi})] / 2$$

$$DX_{Bi+1/2} = [(X_{Bi} - X_{Ni}) + (X_{Bi+1} - X_{Ni+1})] / 2$$

$$DY_{Ai+1/2} = [(Y_{Ni+1} - Y_{Ni}) + (Y_{Bi+1} - Y_{Bi})] / 2$$

$$DY_{Bi+1/2} = [(Y_{Bi} - Y_{Ni}) + (Y_{Bi+1} - Y_{Ni+1})] / 2$$

(30)\*

$$LA_{i+1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} (LB_{i+1/2}^2 + LH_{i+1/2}^2)}$$

$$LB_{i+1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (X_{Bi} - X_{Ni})^2 + (Y_{Bi} - Y_{Ni})^2 + (X_{Bi+1} - X_{Ni+1})^2 + (Y_{Bi+1} - Y_{Ni+1})^2 \}}$$

$$S_{Bi+1/2} = \frac{1}{2} (X_{Bi+1}^{t-1} + X_{Bi}^{t-1}) LB_{i+1/2} ;$$

$$S_{Ni+1/2} = \frac{1}{2} (X_{Ni+1}^{l-1} + X_{Ni}^{l-1}) L_{Ni} ; \quad i = \overline{1, N-1}$$

$A_{i+1/2}$  - величина, независящая от  $\hat{H}_i^p$ .

Разностное уравнение следует из условия:

$$\frac{\partial \Phi(\hat{H})}{\partial \hat{H}_i^p} = 0 \quad i = \overline{1, N}$$

В случае аппроксимации (19) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{G_{i+1/2} + G_{i-1/2}}{2} (\hat{H}_i^p - H_i^p) + \frac{G_{i+1/2}}{2} (\hat{H}_{i+1}^p - H_{i+1}^p) + \frac{G_{i-1/2}}{2} (\hat{H}_{i-1}^p - H_{i-1}^p) - \\ & - 2P_{i+1/2} S_i (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^p - S_i \hat{H}_i^p) + 2P_{i-1/2} S_i (S_i \hat{H}_i^p - S_{i-1} \hat{H}_{i-1}^p) + \end{aligned} \quad (31)$$

$$+ B_{i+1/2} + F_{i-1/2} - F_{i+1/2} + K_N S_N T_N \delta_i^N - K_1 S_1 T_1 \delta_i^1 = 0, \quad i = \overline{1, N}$$

$$\text{где } B_{i+1/2} = G_{i+1/2} \tilde{z}_{i+1/2} \frac{Q_{Bi+1/2}^\alpha + Q_{Hi+1/2}^\alpha}{2} + G_{i-1/2} \tilde{z}_{i-1/2} \frac{Q_{Bi-1/2}^\alpha + Q_{Hi-1/2}^\alpha}{2}$$

$$F_{i+1/2} = 2P_{i+1/2} S_i (S_{Bi+1/2} Q_{Bi+1/2}^\alpha - S_{Hi+1/2} Q_{Hi+1/2}^\alpha) \tau$$

В случае аппроксимации (20) разностное уравнение запишется в виде:

$$\begin{aligned} & (G_{i+1/2} + G_{i-1/2}) (\hat{H}_i^p - H_i^p) - 2P_{i+1/2} S_i (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^p - S_i \hat{H}_i^p) + \\ & + 2P_{i-1/2} S_i (S_i \hat{H}_i^p - S_{i-1} \hat{H}_{i-1}^p) + B_{i+1/2} + F_{i+1/2} + \\ & + K_N S_N T_N \delta_i^N - K_1 S_1 T_1 \delta_i^1 = 0, \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (31), (32) также как (24), (25) можно решать методом прогонки с учетом уравнений (26) для определения  $\hat{H}_i^p$ ,  $i = \overline{1, N}$

## § 6 Устойчивость

Для исследования устойчивости полученных разностных уравнений рассмотрим уравнение (II), записанное в терминах сеточных операторов  $GRAD$  и  $DIV$  (определенных в соответствующих областях) [12] :

$$\frac{\hat{H} - \bar{H}}{\tau} = \frac{\alpha}{c\rho} \text{GRAD}(\text{DIV} \hat{H}) \quad (33)$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$B \vec{H}_t + A \vec{H} = 0 \quad (34)$$

где  $B = E + \tau L$ ,  $A = L$

$$L(\cdot) = -\frac{\alpha\tau}{c\rho} \text{GRAD}(\text{DIV}(\cdot)); \vec{H}_t^T = \frac{1}{\tau} (\hat{H}_1 - \bar{H}_1, \dots, \hat{H}_N - \bar{H}_N)$$

$$\vec{H}^T = (\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_N)$$

$E$  - единичный оператор

Поскольку оператор  $A$  - самосопряжен, положительно определен, не зависит от времени, и при любых  $\tau$ ,  $B \gg 0.5\tau A$ , то система разностных уравнений является безусловно устойчива (см. [5]).

### § 7. Двумерная задача теплопроводности

Будем считать, что в области  $G$  вместе с начальными и граничными условиями, описанными в § I, задается или вычисляется по известному начальному распределению температуры  $T_0(X, Y)$  одна из контравариантных составляющих теплового потока -  $Q^\alpha$  или  $Q^\beta$ .

В зависимости от того какая компонента потока определена, выбираем соответствующие ей слои ячеек, например, если задана  $Q^\alpha$ , то выбираем слои ( $\beta = \text{const}$ ) (рис. 4). Для каждого такого слоя ( $\beta = \text{const}$ ) решаем соответствующую квазиодномерную задачу

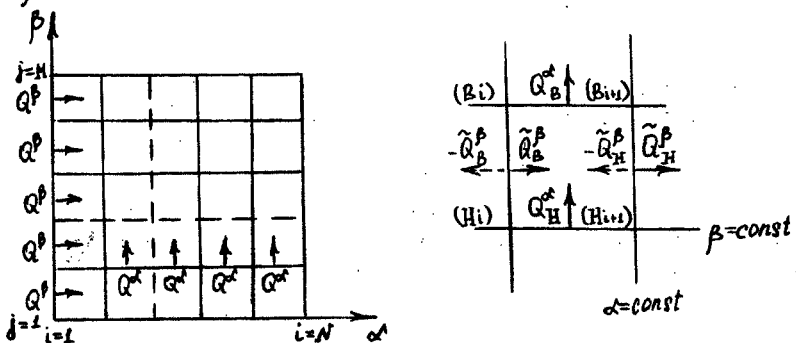


Рис. 4

При этом будем использовать соотношение (27), аппроксимирующее  $(\vec{H} - \vec{H})^2$ , и следующее выражение для  $\langle \text{div } \vec{H} \rangle$ :

$$\langle \text{div } \vec{H} \rangle_{i-1/2} = \frac{1}{V_{i+1/2}} \left\{ \left[ \langle X \rangle_{i+1}^{l_1} h_p \langle l_p \rangle_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - \langle X \rangle_i^{l_1} h_p \langle l_p \rangle_i \hat{H}_i^\beta \right] + \right. \\ \left. + \left[ \langle X_B \rangle_{i+1/2}^{l_1} h_\alpha \langle l_\alpha \rangle_{B_{i+1/2}} H_{B_{i+1/2}}^\alpha - \langle X_H \rangle_{i+1/2}^{l_1} h_\alpha \langle l_\alpha \rangle_{H_{i+1/2}} H_{H_{i+1/2}}^\alpha \right] \right\}, \quad i=1, \overline{N-1}$$

аппроксимирующее  $\text{div } \vec{H}$  на некотором промежуточном временном слое. В силу имеющегося произвола в определении  $\vec{H}$  (с точностью до  $\text{rot } \psi(x, y, t)$ , где  $\psi(x, y, t)$  — произвольная функция) полагаем  $H^\alpha$  равными нулю. Тогда:

$$\langle \text{div } \vec{H} \rangle_{i-1/2} = \frac{1}{V_{i+1/2}} \left\{ \langle X \rangle_{i+1}^{l_1} h_p \langle l_p \rangle_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - \langle X \rangle_i^{l_1} h_p \langle l_p \rangle_i \hat{H}_i^\beta \right\}, \quad i=1, \overline{N-1} \quad (35)$$

В этом случае функционал  $\Phi_\beta(\vec{H})$  представляется в виде (аппроксимация (20)):

$$\Phi_\beta(\vec{H}) = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ G_{i+1/2} \frac{1}{2} \left[ (\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta)^2 + (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta)^2 \right] + G_{i-1/2} \cdot Z_{i-1/2} \cdot \right. \\ \cdot \frac{Q_{B_{i+1/2}} + Q_{H_{i+1/2}}}{2} \left[ (\hat{H}_{i+1}^\beta - H_{i+1}^\beta) \cdot (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta) \right] + P_{i-1/2} (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta)^2 \\ \left. + A_{i+1/2} \right\} + K_N S_N \hat{H}_N^\beta T_N - K_1 S_1 \hat{H}_1^\beta T_1$$

где величины  $G_{i+1/2}$ ,  $P_{i-1/2}$ ,  $Z_{i-1/2}$ ,  $S_i$  определяются по формулам (22\*) и (30\*) с учетом следующего соответствия индексов:

$$j \rightarrow H, j+1 \rightarrow B \quad \text{или} \quad \Delta(i, j) \rightarrow (i, H); (i, j+1) \rightarrow (i, B)$$

Из требования  $\frac{\partial \Phi_\beta(\vec{H})}{\partial \hat{H}_i^\beta} = 0$  получаем разностное уравнение:

$$(G_{i+1/2} + G_{i-1/2}) (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta) - 2 P_{i+1/2} S_i (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta) - \\ + 2 P_{i-1/2} S_i (S_i \hat{H}_i^\beta - S_{i-1} \hat{H}_{i-1}^\beta) + B_{i+1/2} + K_N S_N T_N \delta_i^N - K_1 S_1 T_1 \delta_i^1 = 0, \quad i=1, \overline{N} \quad (36)$$

с начальными условиями, определенными из соотношений:

$$C_{i+1/2} T_{i+1/2} = \frac{1}{V_{i+1/2}} (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta)$$

$$H_1^\beta = 0, \quad i = 1, \overline{N-1}$$

Решая (36) методом прогонки, находим  $\hat{H}^\beta$ , откуда определяем  $\tilde{T}$  и  $\tilde{Q}^\beta$  (в каждом слое ячеек  $\beta = \text{const}$ ):

$$\tilde{T}_{i+1/2} = \frac{1}{C_{i+1/2} V_{i+1/2}} (S_{i+1} \hat{H}_{i+1}^\beta - S_i \hat{H}_i^\beta), \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$\tilde{Q}_i^\beta = (\hat{H}_i^\beta - H_i^\beta) / \tau, \quad i = \overline{1, N}$$

Полученные величины  $\tilde{T}$  и  $\tilde{Q}^\beta$  являются промежуточными значениями при вычислении  $\hat{T}$  и  $\hat{Q}^\beta$  и поэтому необходимы в качестве начальных условий для решения аналогичной квазиодномерной задачи по слоям  $\alpha = \text{const}$ . В последнем случае будем использовать следующую аппроксимацию для  $\text{div } \hat{H}$ :

$$\langle \text{div } \hat{H} \rangle_{j+1/2} = \frac{1}{V_{j+1/2}} \left\{ \langle X \rangle_{j+1} h_\alpha \langle l_\alpha \rangle_{j+1} \hat{H}_{j+1}^\alpha - \langle X \rangle_j h_\alpha \langle l_\alpha \rangle_j \hat{H}_j^\alpha \right\}, \quad j = \overline{1, M-1}$$

в каждом слое  $\alpha = \text{const}$ .

Выражение для аппроксимации  $(\hat{H} - \bar{H})^2$  будет иметь вид:

$$\langle (\hat{H} - \bar{H})^2 \rangle_{j+1/2} = \frac{\langle l_\alpha \rangle_j \langle l_\alpha \rangle_{j+1}}{\langle X \rangle_j^2} \left\{ \left( \frac{Q_{V_{j+1/2}}^\beta - Q_{H_{j+1/2}}^\beta}{2} \right)^2 \tau^2 + 2 \frac{\langle \frac{\partial X}{\partial x} \rangle_j \langle \frac{\partial l_\alpha}{\partial x} \rangle_{j+1} + \langle \frac{\partial X}{\partial x} \rangle_{j+1} \langle \frac{\partial l_\alpha}{\partial x} \rangle_j}{\langle l_\alpha \rangle_j \langle l_\alpha \rangle_{j+1}} \cdot \tau \left( \frac{Q_{V_{j+1/2}}^\beta - Q_{H_{j+1/2}}^\beta}{2} \langle \hat{H}^\alpha - H^\alpha \rangle_{j+1/2} + \langle (\hat{H}^\alpha - H^\alpha)^2 \rangle_{j+1/2} \right) \right\}, \quad j = \overline{1, M-1}$$

Функционал  $\Phi_\alpha(\hat{H})$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\hat{H}) = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ G_{j+1/2} \frac{1}{2} [(\hat{H}_{j+1}^\alpha - H_{j+1}^\alpha)^2 + (\hat{H}_j^\alpha - H_j^\alpha)^2] + G_{j+1/2} \tilde{z}_{j+1/2} \right. \\ & \left. - \frac{(\tilde{Q}_{V_{j+1/2}}^\beta + \tilde{Q}_{H_{j+1/2}}^\beta)}{2} [(\hat{H}_{j+1}^\alpha - H_{j+1}^\alpha) + (\hat{H}_j^\alpha - H_j^\alpha)] + P_{j+1/2} (S_{j+1} \hat{H}_{j+1}^\alpha - S_j \hat{H}_j^\alpha)^2 \right. \\ & \left. + A_{j+1/2} \right\} + K_M S_M \hat{H}_M^\alpha T_M - K_1 S_1 \hat{H}_1^\alpha T_1 \end{aligned}$$

$$K_1, K_M = \begin{cases} 0, & \text{при условии (3) на границе} \\ 1, & \text{при условии (4) на границе} \end{cases}$$

Коэффициенты  $G_{j+1/2}$ ,  $P_{j+1/2}$ ,  $S_j$ ,  $\tilde{z}_{j+1/2}$  можно вычислить по формулам (22\*) и (30\*), если двумерные индексы  $(i, j)$ , соответствующие слою  $\alpha = \text{const}$ , преобразовать в двумерные индексы, используемые в формулах (22\*) и (30\*), по следующему правилу (рис.5):



$$\begin{aligned}(i, j) &\rightarrow (B, i) \\(i, j+1) &\rightarrow (B, i+1) \\(i+1, j) &\rightarrow (H, i) \\(i+1, j+1) &\rightarrow (H, i+1)\end{aligned}$$

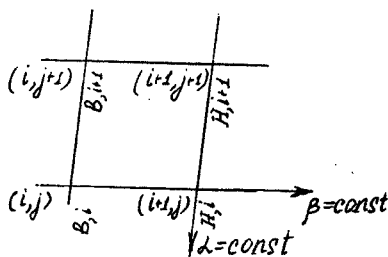


Рис. 5

при этом  $j$  - будет изменяться от 1 до  $M-1$

Разностное уравнение получаем из условия минимума функционала  $\hat{\Phi}_\alpha(\hat{H})$  т.е.

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_\alpha(\hat{H})}{\partial \hat{H}_j^\alpha} = 0, \quad j = \overline{1, M}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned}(G_{j+1/2} + G_{j-1/2})(\hat{H}_j^\alpha - \hat{H}_j^{\alpha'}) - 2P_{j+1/2} S_j (S_{j+1} \hat{H}_{j+1}^\alpha - S_j \hat{H}_j^{\alpha'}) + \\ + 2P_{j-1/2} S_j (S_j \hat{H}_j^\alpha - S_{j-1} \hat{H}_{j-1}^\alpha) + B_{j+1/2} K_M S_M T_M \delta_j^\alpha - K_1 S_1 T_1 \delta_j^\alpha = 0, j = \overline{1, M}\end{aligned}$$

Начальные значения  $\hat{H}_j^\alpha$  определяются по вычисленному ранее полю температур  $T$ :

$$\begin{cases} C_{j+1/2} \tilde{T}_{j+1/2} = \frac{1}{V_{j+1/2}} (S_{j+1/2} \hat{H}_{j+1}^\alpha - S_j \hat{H}_j^\alpha) \\ \hat{H}_1^\alpha = 0 \end{cases}, \quad j = \overline{1, M-1}$$

Решая (37) методом прогонки находим  $\hat{H}_j^\alpha$ , откуда вычисляем  $T$  и  $\hat{Q}_j^\alpha$ :

$$\begin{aligned}\hat{T}_{j+1/2} &= \frac{1}{C_{j+1/2} V_{j+1/2}} (S_{j+1} \hat{H}_{j+1}^\alpha - S_j \hat{H}_j^\alpha) \\ \hat{Q}_j^\alpha &= (\hat{H}_j^\alpha - \hat{H}_j^{\alpha'}) / \tau\end{aligned}$$

Полученные значения  $\hat{T}$  и  $\hat{Q}_j^\alpha$  в каждом слое  $\alpha = const$ , являются искомыми значениями температуры и контравариантной составляющей потока  $\hat{Q}_j^\alpha$  на следующем временном слое во всей области  $G$ . На этом шаг по времени завершается.

Из описания метода решения двумерной задачи можно заметить, что для его реализации на ЭВМ требуется только одна подпрограмма решения квазиодномерной задачи теплопроводности в произвольном слое расчетных ячеек. Эта подпрограмма будет последовательно вызываться сначала для расчета теплопроводности в слоях  $\beta = \text{const}$ , затем для решения соответствующей квазиодномерной задачи в слоях  $\lambda = \text{const}$ .

### § 9. Примеры тестовых расчетов

Предложенный метод опробован на ряде тестовых расчетов

I. Одномерная задача на установление:

$$0 \leq x \leq l; \quad T(x)|_{t=0} = 300; \quad T(0,t) = 1000; \quad T(l,t) = 300$$

Исследовалось влияние способа аппроксимации члена  $(\vec{H} - \vec{H})^2$  на качество решения. Рис. 8 показывает, что в случае аппроксимации (19) решение не удовлетворяет принципу максимума (на некоторых временных слоях возникает немонотонный профиль температуры). В случае аппроксимации (20) (рис. 7) на каждом временном слое профиль температуры остается монотонный. На этом основании все последующие расчеты проводились при аппроксимации (20).

II. Исследовалась сходимость двумерного алгоритма на задаче с разрывным коэффициентом теплопроводности, когда линия разрыва пересекает границы слоев ячеек под углом  $45^\circ$ .

Заметим, что расчеты задач с разрывным коэффициентом теплопроводности по традиционному локально-одномерным схемам приводят к удовлетворительным результатам только в тех случаях, когда линии разрывов параллельны направлениям соответствующих прогонок. В факторизованных алгоритмах, оперирующих с сеточными значениями поля температур, последнее условие обеспечивает непрерывность векторного поля тепловых потоков.

Проводилось десять тестовых расчетов при следующих условиях:

$$\text{Расчетная область } G_K = \{0 \leq x \leq l_K; \quad 0 \leq y \leq l_K\}$$

где  $K$  - номер расчета,  $l_K = l_0/K$ ,  $l_0 = 1$ ,  $K = 1, \dots, 10$

Расчетная сетка в каждом случае ортогональна:

$$N = M = 25 \quad h_K = l_K / (N-1)$$

Начальные и граничные условия выбирались таким образом, чтобы в каждой области  $G_K$  была стационарная температура, а изотермы были параллельны линии разрыва коэффициента теплопроводности, которая определяется уравнением:  $y = l_K - x$ . Заметим, что в каждом случае изотерма на линии разрыва имела одно и то же

значение.

Коэффициент теплопроводности задавался следующим образом:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha_1, & x < y \\ \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, & x = y \\ \alpha_2, & x > y \end{cases}$$

Результаты численного счета (в каждом случае) показывают, что изотерма, соответствующая температуре на линии разрыва сдвигается в величину  $\delta T_k$ .

Экспериментальная зависимость  $\delta T(h_k)$  приведена на рис.9.

Полученная зависимость  $\delta T_k(h_k) \sim O(h)$  свидетельствует о том, что предложенная в настоящей работе разностная схема обеспечивает сходимость  $O(h)$  при разрывных коэффициентах  $\alpha(x, y)$  также и в случаях, когда линия разрыва пересекает границы ячеек под некоторым углом.

### III. Задача о мгновенном точечном источнике [II] :

Тестовые расчеты проводились на следующих расчетных сетках:

1. а) Ортогональная сетка  $M=N=41$ ,  $h_x = h_y = 0.05$

б) Косоугольная сетка (рис.6):

$$N=M=41, h_x = h_y = 0.05, \operatorname{tg} \alpha = 4$$

в) Косоугольная сетка:

$$N=M=41, h_x = h_y = 0.05, \operatorname{tg} \alpha = 1$$

2. Граничные условия:

$$\vec{W}(x, y, t) \vec{n} |_{\Gamma} = 0, t > 0, \vec{W} - \text{тепловой поток.}$$

3. Источник тепла  $Q$  (в момент  $t=0$ ) помещался в ячейку (30,40)

$$Q = T_0 \rho c h_x h_y; T_0 = 1000, \rho c = 4$$

Эта задача имеет аналитическое решение [II] :

$$T(x, y, t) = \frac{T_0 \rho c h_x h_y}{4\pi x} \exp\left(-\frac{((x-x')^2 + (y-y')^2)\rho c}{4xt}\right)$$

где  $x', y'$  - координаты источника.

Результаты численных расчетов для каждого случая а), б), в) приведены в виде изотерм на рис.11,12,13 соответственно. Изотермы соответствуют следующим значениям температуры

$$T(I) = 0.01 I^2 \frac{T_0}{t^*}, \quad t^* = 0.05$$

где  $I$  - номер изотермы.

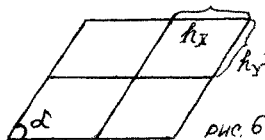


рис.6

На рис.10 показано распределение температуры на верхней границе области. Сплошная линия соответствует аналитическому решению, крестики - случаю а), кружки - случаю б), звездочки - случаю в).

IV. Задача об остывании пластины.

Расчетная область  $G = \{-l \leq X \leq l, -l \leq Y \leq l\}$

Начальные условия  $T(X, Y, 0) = 1, X, Y \in G$

Граничные условия  $T(X, Y, t)|_{\Gamma} = 0, t > 0, X, Y \in \Gamma$

Задача имеет аналитическое решение:

$$T(X, Y, t) = \psi(X, l, t) \cdot \psi(Y, l, t)$$

где 
$$\psi(X, l, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{\lambda(2n+1)^2 \pi^2 t}{4l^2}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi X}{2l}$$

$\lambda$  - коэффициент температуропроводности.

Задача решалась на ортогональной сетке:

$$N = M = 41; h_x = h_y = 0.025; l = 0.25 \text{ с шагом по времени } \tau = 0.01$$

Численные результаты приводятся на рис.14.

Изотермы соответствуют значениям: 0.9, ..., 0.3

Аналитическое решение приводится на рис.15

где изотермы соответствуют тем же значениям.

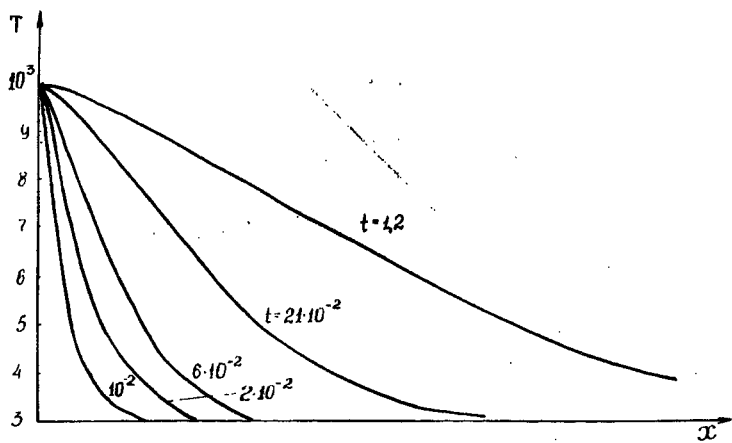


Рис. 7

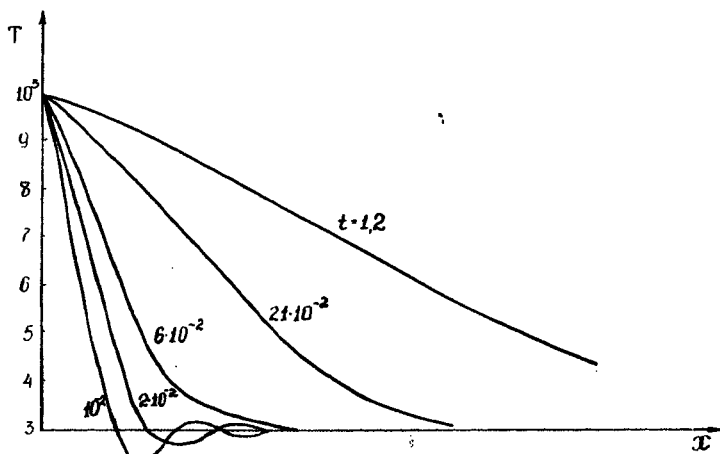


Рис. 8

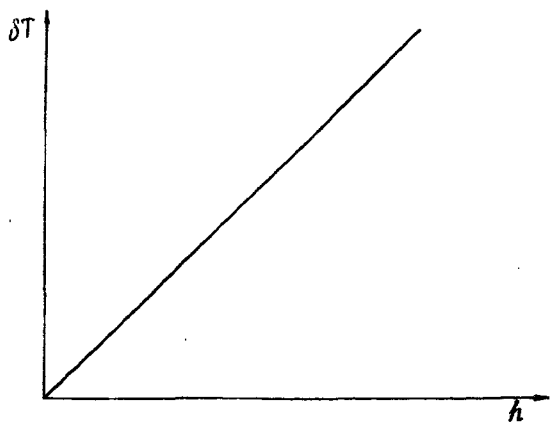


Рис. 9

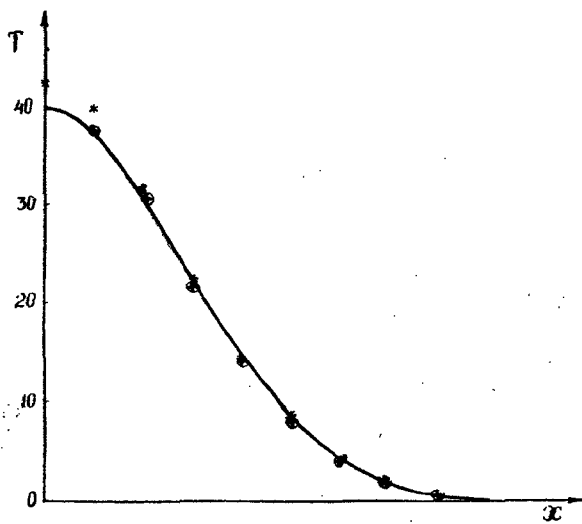


Рис. 10

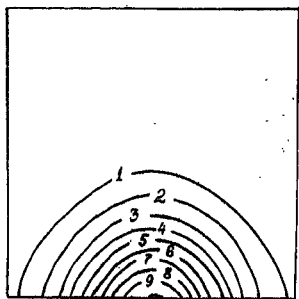


Рис. II

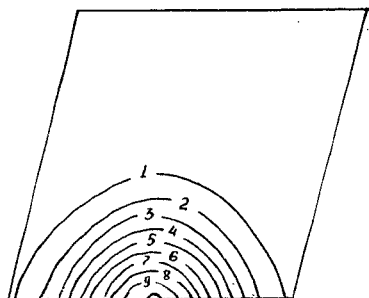


Рис. I2

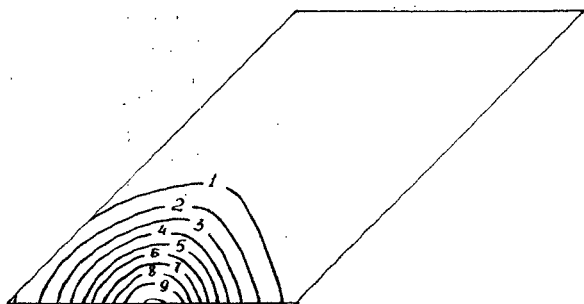


Рис. I3

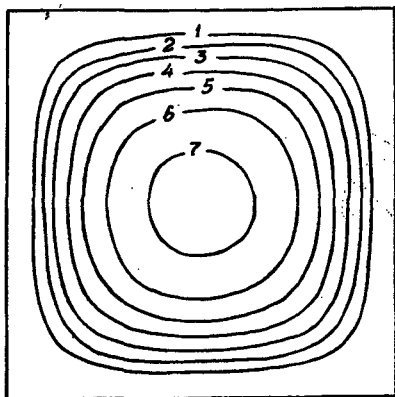


Рис. 14

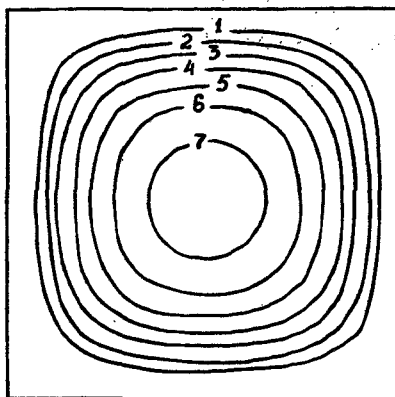


Рис. 15



## ЛИТЕРАТУРА

- I. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П.  
Вариационный подход к построению конечноразностных моделей в гидродинамике. ДАН СССР, т.235, № 6, 1977, с.1285-1288.
2. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю.  
Двумерная полностью консервативная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. М.:препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 11, 1985 г.
3. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток. ЖВМ и МФ, 1967, т.7, № 5, с.1031-1059.
4. Головизнин В.М., Симачева О.Г. Об одном методе построения расчетных сеток в областях с криволинейными границами. ЖВМ и МФ, 1983, т.23, № 5, с.1245-1248.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977, -656с.
6. Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Алгоритм численного решения второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на прямоугольной сетке - М.: препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 113, 1978, 31 с.
7. Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Вариационно-разностные схемы для уравнений теплопроводности на нерегулярных сетках. ДАН СССР, 1979, т.246, № 6, с.1342-1345.
8. Головизнин В.М., Рязанов М.А. О решении нестационарных задач теплопроводности вариационно-разностным методом. Диффер. уравнения, 1983, т.19, № 5, с.860-869.
9. *Kershaw D. The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for iterative Solution of system of linear equations. J. of Comput. Phys, v. 26, N1, 1978, p. 43-65.*
10. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. - М.: Энергия, 1975 - 208 с.
11. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964, 497 с.
12. В.М. Головизнин, В.К. Коршунов, М.Д. Таран. Об аппроксимации дифференциальных операторов на косоугольных нерегулярных расчетных сетках. Препринт ИПМ АН СССР 1980 № 157