Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

А.В. Колдоба, О.А. Кузнецов, Ю.А. Повещенко,
Ю.П. Попов, А.А. Самарский

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В КВАЗИЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НАЛИЧ' ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТОГИДРОГ' АМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Препринт № 55 за 1985 г.

Москва

Аннотация

В квазилагранжевых переменных [I] построены полностью консервативные дифференциально-разностные схемы для многомерных уравнений движения сплошной среды при наличии гравитационных и магнитогидродинамических явлений.

Форма изложения материала позволяет считать данную работу инструкцией для администратора предметной области пакета программ ТЕКОН [2].

Содержание

Введение

Как показала практика, принцип полной консервативности [3] является одним из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Однако, построение схем, удовлетворяющих этому принципу, представляет значительные сложности, особенно в случае существенно неодномерных течений [4], а также при учете всевозможных дополнительных факторов таких как источники (стоки) массы, диссипация, магнитная и гравитационная силы, вязкость и т.д.

В данной работе на основе операторного метода строятся разностные схемы для уравнений движения сплошной среды с учетом указанных факторов в квазилагранжевых переменных, обладающие свойством полной консервативности. Широко используется пространственное профилирование при временном центрировании сеточных функций. Этим путем достигается выполнение принципа полной консервативности для разностных схем с переменной массой течения [5], положительность джоулевых источников тепла. Изучен также случай нестационарной тензорной массы квазичастицы. Результаты работы во многом базируются на [6, 7].

Настоящие исследования были выполнены в рамках работ по расширению предметной области пакета программ ТЕКОН [6]. Форма изложения материала позволяет считать данную работу инструкцией для администратора этого пакета.

Авторы благодарны В.М.Чеченкину за интерес к работе и полезные обсуждения, а также А.А.Гуськовой за помощь при оформлении работы.

§ I. Уравнения механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов.

§ I.I. Рассматривается течение, которое может обмениваться массой с источником произвольной природы. Пусть за единицу времени в элемент течения dM поступает GdM единиц массы вещества, обладающих скоростью $\vec{u}_G$.

$$d(dM)=GdMdt$$

Введем Ξ как отношение текущей массы элемента течения к начальной

$$dM=\Xi dM_\emptyset \qquad (1)$$

Очевидно,

$$\frac{d\Xi}{dt}=G\Xi\ , \quad \Xi=exp(\int_{t_\emptyset}^{t}Gd\tau)$$

Кроме того, предположим, что масса элемента течения (квазичастицы) может проявлять тензорные свойства в динамической группе уравнений движения, т.е.

$$dM_\varphi=\Psi dM_\emptyset$$

Здесь $\Psi=\Psi^T>\emptyset$ – симметричный, положительно определенный тензор второго ранга. В частности, может быть $\Psi=\Xi\delta$. δ – метрический тензор.

Уравнения балансов в интегральной форме имеют вид:
объема

$$\int_{\hat{M}}\hat{V}d\hat{M}=\int_M VdM+\int_t^{\hat{t}}d\tau\int_{\Sigma(\tau)}\vec{u}d\vec{\Sigma}$$

импульса

$$\int_{\hat{M}_\varphi}\hat{\vec{u}}d\hat{M}_\varphi=\int_{M_\varphi}\vec{u}dM_\varphi+\int_t^{\hat{t}}d\tau(-\int_{\Sigma(\tau)}Pd\vec{\Sigma}+\int_{\Omega(\tau)}div(-t_g+t_\kappa+t_v)dV+$$

$$\int_{M_\emptyset}\frac{d\Psi}{dt}\vec{u}_G dM_\emptyset+\int_{M_\emptyset}d\vec{f})$$

$$t_g=\frac{1}{4\pi\gamma}(\vec{g}\cdot\vec{g}-\frac{\vec{g}^2}{2}\delta),\quad t_\kappa=\frac{c^2}{4\pi}(\vec{\kappa}\cdot\vec{\kappa}-\frac{\vec{\kappa}^2}{2}\delta)$$

$$t_u=\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{u}}{d\tau}+grad\,\vec{u}\right)$$

$$t_v=2\mu\left(t_u-\frac{1}{3}tr(t_u)\delta\right)+\zeta\, tr(t_u)\delta$$

внутренней энергии

$$\int\limits_{\hat{M}}\hat{E}\,d\hat{M}=\int\limits_{M}E\,dM+\int\limits_{t}^{\hat{t}}d\tau\left(-\int\limits_{M_\phi}P\,\frac{d\Xi V}{dt}\,dM_\phi+\int\limits_{O(\tau)}(D+D_v)\,dV+\int\limits_{M_\phi}dQ\right)$$

$$D=\frac{c^2}{4\pi}\vec{e}\,rot\,\vec{k},\quad D_v=tr(t_v t_u)$$

кинетической энергии

$$\int\limits_{\hat{M}}\hat{\varepsilon}_k\,d\hat{M}=\int\limits_{M}\varepsilon_k\,dM+\int\limits_{t}^{\hat{t}}d\tau\Bigg(\int\limits_{O(\tau)}\vec{u}\left(-grad\,P+div(-t_g+t_k+t_v)\right)dV-$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{M_\phi}\left(\frac{d\Psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_в),(\vec{u}-\vec{u}_в)\right)dM_\phi+\int\limits_{M_\phi}\vec{u}\,d\vec{f}\Bigg)$$

гравитационной энергии

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{M}}\hat{\Phi}\,d\hat{M}=\frac{1}{2}\int\limits_{M}\Phi\,dM+\int\limits_{t}^{\hat{t}}d\tau\left(-\int\limits_{O(\tau)}D_g\,dV+\frac{1}{8\pi\gamma}\int\limits_{\Sigma(\tau)}\begin{vmatrix}\Phi & \vec{g}\,d\vec{s}\\ \frac{d\Phi}{dt} & \frac{d}{dt}(\vec{g}\,d\vec{s})\end{vmatrix}+\int\limits_{M_\phi}\frac{d\Xi}{dt}\Phi\,dM_\phi\right)$$

$$D_g=tr(t_g t_u),\quad \vec{g}=-grad\,\Phi$$

магнитной энергии

$$\frac{c^2}{8\pi}\int\limits_{\hat{O}}\hat{\vec{k}}^2\,d\hat{V}=\frac{c^2}{8\pi}\int\limits_{O}\vec{k}^2\,dV+\int\limits_{t}^{\hat{t}}d\tau\left(\int\limits_{O(\tau)}(D_k-D)\,dV-\int\limits_{\Sigma(\tau)}\vec{q}\,d\vec{s}\right)$$

$$D_k=tr(t_k t_u),\quad \vec{q}=\frac{c^2}{4\pi}(\vec{e}\times\vec{k})$$

полной энергии

$$\int\limits_{\hat{M}}\left(\hat{E}+\hat{\varepsilon}_k+\frac{\hat{\Phi}}{2}+\frac{c^2}{8\pi}\hat{V}\hat{\vec{k}}^2\right)d\hat{M}=\int\limits_{M}\left(E+\varepsilon_k+\frac{\Phi}{2}+\frac{c^2}{8\pi}V\vec{k}^2\right)dM+$$

$$\int\limits_{t}^{\hat{t}}d\tau\Bigg(-\int\limits_{\Sigma(\tau)}P\vec{u}\,d\vec{s}+\int\limits_{\Sigma(\tau)}(-t_g+t_k+t_v)\vec{u}\,d\vec{s}+\frac{1}{8\pi\gamma}\int\limits_{\Sigma(\tau)}\begin{vmatrix}\Phi & \vec{g}\,d\vec{s}\\ \frac{d\Phi}{dt} & \frac{d}{dt}(\vec{g}\,d\vec{s})\end{vmatrix}-$$

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \vec{q}\, d\vec{s} + \int\limits_{M_\phi} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d\Psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_\sigma), (\vec{u}-\vec{u}_\sigma)\right) + \frac{d\Xi}{dt}\Phi\right) dM_\phi + \int\limits_{M_\phi} (dQ + \vec{u}\, d\vec{f}))$$

Здесь $\vec{u}$ – скорость течения, P – давление, V – удельный объем, E – удельная внутренняя энергия, E_k – удельная кинетическая энергия в системе "течение + источник", Φ – гравитационный потенциал, $\vec{g}$ – напряженность гравитационного поля, γ – гравитационная постоянная, $\vec{h}$ – напряженность магнитного поля, деленная на скорость света c, $\vec{e}$ – напряженность электрического поля в системе координат, связанной с движущейся частицей, $\vec{q}$ – вектор Пойтинга, t_g, t_h и t_v – гравитационный, магнитный и вязкий тензоры (μ и φ – первый и второй коэффициенты вязкости), t_u – симметризованный тензор скоростей деформаций, D_g, D_h и D_v – гравитационная, магнитная и вязкая диссипативные функции, D – джоулев нагрев, $d\vec{f}$ – сила, внешняя по отношению к системе, действующая на элемент течения, dQ – интенсивность выделения внутренней энергии в элементе течения. Функцией $tr(\ )$ обозначен след тензорного аргумента, δ – метрический тензор.

Далее, уравнение для потока гравитационного поля через замкнутую поверхность запишется в форме:

$$\int\limits_{\Sigma} \vec{g}\, d\vec{s} = -4\pi\gamma \int\limits_{M} dM$$

В магнитогидродинамическом приближении интегральные уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma} \vec{h}\, d\vec{s} = -\oint\limits_{H_\Sigma} \vec{e}\, d\vec{h}_\Sigma, \quad \int\limits_{\Sigma} X_\Sigma^{-1} \vec{e}\, d\vec{s} = \oint\limits_{H} \vec{h}\, d\vec{h}$$

Здесь X_Σ – положительно определенный тензор магнитной вязкости в среде. Из условия отсутствия магнитных зарядов вытекает также соотношение

$$\int\limits_{\Sigma} \vec{h}\, d\vec{s} = 0$$

§ I.2. В дифференциальной форме уравнения балансов имеют вид:

$$\frac{d\Xi V}{dt} = \Xi V\, div\, \vec{u}$$

$$\frac{d\Psi\vec{u}}{dt} = \Xi V(-grad P + div(-t_g + t_e + t_\nu)) + \frac{d\Psi}{dt}\vec{u}_6 + \frac{d\vec{f}}{dM_\phi}$$

$$\frac{d\Xi E}{dt} = -P\frac{d\Xi V}{dt} + \Xi V(D + D_\nu) + \frac{dQ}{dM_\phi}$$

$$\frac{d\Xi \mathcal{E}_k}{dt} = \Xi V\vec{u}(-grad P + div(-t_g + t_e + t_\nu)) - \frac{1}{2}(\frac{d\Psi}{dt}(\vec{u} - \vec{u}_6), (\vec{u} - \vec{u}_6)) + \vec{u}\frac{d\vec{f}}{dM_\phi}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Xi\Phi}{dt} = \Xi V(-D_g +$$

$$\frac{1}{8\pi\gamma} div(\Phi\frac{d\vec{g}}{dt} - \frac{d\Phi}{dt}\vec{g} + \Phi(-\frac{d\vec{u}}{d\vec{z}} + div\vec{u}\,\delta)\vec{g})) + \frac{d\Xi}{dt}\Phi$$

$$\frac{c^2}{8\pi}\frac{d}{dt}(\Xi V\vec{h}^2) = \Xi V(D_e - D - div\vec{q})$$

$$\frac{d}{dt}(\Xi(E + \mathcal{E}_k + \frac{\Phi}{2} + \frac{c^2}{8\pi}V\vec{h}^2)) = \Xi V div((-P\delta - t_g + t_e + t_\nu)\vec{u} +$$

$$\frac{1}{8\pi\gamma}(\Phi\frac{d\vec{g}}{dt} - \frac{d\Phi}{dt}\vec{g} + \Phi(-\frac{d\vec{u}}{d\vec{z}} + div\vec{u}\,\delta)\vec{g}) - \vec{q}) +$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{d\Psi}{dt}(\vec{u} - \vec{u}_6), (\vec{u} - \vec{u}_6)) + \frac{d\Xi}{dt}\Phi + \frac{dQ}{dM_\phi} + \vec{u}\frac{d\vec{f}}{dM_\phi}$$

Мы воспользовались тождествами

$$(\vec{u}, \frac{d\Psi\vec{u}}{dt}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Psi\vec{u}, \vec{u}) + \frac{1}{2}(\frac{d\Psi}{dt}\vec{u}, \vec{u})$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{s}) = (-grad\vec{u} + div\vec{u}\,\delta)\,d\vec{s}$$

Здесь по определению

$$\frac{d\Xi\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Psi\vec{u}, \vec{u}) - \frac{1}{2}(\frac{d\Psi}{dt}\vec{u}_6, \vec{u}_6)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы описывает изменение кинетической энергии течения, а второе изменение кинетической энергии источника вследствие взаимодействия "течение-источник". Член $-\frac{1}{2}(\frac{d\Psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_G),(\vec{u}-\vec{u}_G))$ в правой части уравнения баланса кинетической энергии дает скорость диссипации при $\frac{d\Psi}{dt}>\emptyset$ (производства при $\frac{d\Psi}{dt}<\emptyset$) кинетической энергии в системе "течение + источник". Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$div\vec{g}=-4\pi\gamma/V,\ \vec{g}=-grad\,\Phi \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения Максвелла для электромагнитного поля в магнитогидродинамическом приближении имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}-rot(\vec{u}\times\vec{h})=-rot\vec{e},\ \ \vec{e}=X_{\varepsilon}\,rot\,\vec{h} \tag{3}$$

Кроме того $div\,\vec{h}=\emptyset$.

Отметим также, что $D\geq\emptyset$ и $D_v\geq\emptyset$.

§ 2. <u>Полностью консервативная дифференциально-разностная схема.</u>

§ 2.I. Некоторые определения. Метрический оператор.

§ 2.I.I. Назовем сеткой ($\ell, \nu, \ldots$). ($\varphi, \psi, \ldots$) множество индексов, упорядоченных в систему базисов ($\varphi, \psi, \ldots$).

В каждом базисе введем систему контра- и ковариантных векторов по правилу:

$$(\vec{e}(\ell(\varphi)), \vec{e}'.\varphi(\nu))=\delta^{\nu(\varphi)}_{\ell(\varphi)}$$

Значения индексов $\ell(\varphi), \nu(\varphi)$ принадлежат базису φ . Штрихом помечаются величины, отнесенные к ковариантному базису. Конкатенация (символ "точка внизу") с переменной φ подчеркивает зависимость вектора $\vec{e}'.\varphi$ от базиса.

Векторное поле $\vec{h}$ в базисе φ определим из соотношений:

$$\vec{h}.\varphi=\sum_{\ell(\varphi)} h.\varphi(\ell)\vec{e}(\ell)$$

$$\vec{h}'.\varphi=\sum_{\nu(\varphi)} h'(\nu)\vec{e}'.\varphi(\nu)$$

$$\vec{h}.\varphi=\vec{h}'.\varphi \tag{I}$$

$$h.\varphi=Gr.\varphi^{-1}h' \tag{2}$$

или

$$\vec{h}'.\varphi = \sum_{l(\varphi),\nu(\varphi)} Gr.\varphi^{-1}(l,\nu)h'(\nu)\vec{e}(l)$$

Здесь $Gr.\varphi$ – матрица Грама в контравариантном базисе. Ее представление в ковариантном базисе следует из равенств:

$$\vec{e}'.\varphi(\nu) = \sum_{l(\varphi)} Gr.\varphi^{-1}(l,\nu)\vec{e}(l)$$

$$Gr'.\varphi = Gr.\varphi^{-1}$$

Компоненты векторного поля $h'(l)$ на сетке будем называть ковариантными. Поставим в соответствие каждому базису φ его меру $V.\varphi > \emptyset$ и определим скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_l$ на сетке:

$$(h_1,h_2)_l = \sum_l V.l\, h_1(l)h_2(l)$$

$$V.l = \sum_{\varphi(l)} V.\varphi > \emptyset$$

Конструкция вида $\sum_{\varphi(l)}$ означает суммирование по φ содержащим индекс l. Для векторных полей $\vec{h}$ и $\vec{g}$ составим скалярное произведение:

$$(\bar{h},g')_l = \sum_\varphi V.\varphi \sum_{l(\varphi)} h.\varphi(l)g'(l)$$

Здесь по определению

$$\bar{h}(l) = V.l^{-1}\sum_{\varphi(l)} V.\varphi\, h.\varphi(l)$$

или

$$\bar{h}(l) = V.l^{-1}\sum_{\varphi(l)} V.\varphi \sum_{\nu(\varphi)} Gr'.\varphi(l,\nu)h'(\nu) \qquad (3)$$

т.е.

$$\bar{h} = G h' \qquad (4)$$

Таким образом, на сетке определен самоосопряженный, положительно определенный метрический оператор $G:(l)\to(l)$, $G=G^*>\emptyset$, область определения и область значений которого – сеточные функции, определенные на (l) .

Компоненты векторного поля $\vec{k}(l)$ на сетке будем называть представлением в среднем. Метрический оператор G взаимно однозначно связывает ковариантное и среднее представления векторных полей на сетке.

§ 2.I.2. Сетка считается квазирегулярной (см. Рис. I) с порядком регулярности h^m, если для любого индекса $l \in (l)$ и любых прилежащих к нему базисов $\varphi(l), \psi(l)$ существует взаимнооднозначное соответствие $\nu.\varphi \leftrightarrow \nu.\psi$ входящих в эти базисы индексов, т.ч. в некоторой норме справедливо равенство:

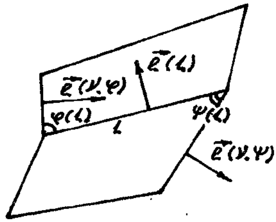

Рис. I.

$$\|\vec{e}(\nu.\varphi) - \vec{e}(\nu.\psi)\| = O(h^m)$$

Здесь h – параметр малости на сетке (мелкость разбиения, слабая неортогональность ортов в базисах и т.д.). Заметим, что сетка квазирегулярна всегда, если любой ее индекс $l \in (l)$ входит лишь в один базис $\varphi(l)$. Для векторного поля $\vec{g} = const$ на квазирегулярной сетке имеет место соотношение

$$|\vec{k}.\varphi(l) - \vec{k}(l)| = O(h^m)$$

Рассмотрим теперь на квазирегулярной сетке другой способ введения самосопряженного, положительно определенного метрического оператора $H : (l) \to (l)$, $H = H^* > 0$. Он связан с иной аппроксимацией скалярного произведения:

$$(\vec{k}, g')_l = \sum_{\varphi} V.\varphi \sum_{l(\varphi), \nu(\varphi)} G\tau.\varphi(l,\nu)\vec{k}(l)\bar{g}(\nu)$$

Здесь

$$g'(l) = V.l^{-1} \sum_{\varphi(l)} V.\varphi \sum_{\nu(\varphi)} G\tau.\varphi(l,\nu)\bar{g}(\nu) \qquad (I)$$

т.е.

$$g' = H\bar{g} \qquad (2)$$

Строго говоря, такая аппроксимация непрерывного аналога скалярного произведения $\int_{\sigma}(\vec{k},\vec{g})\,dV$ имеет место лишь на квазирегулярной сетке (в остальных случаях построенный метрический оператор будем называть H приближением оператора G^{-1}). При этом приближенное выполнение равенств (I) + (4) пункта § 2.I.I. следует понимать в обобщенном смысле, связанном с представлением векторных полей на всей сетке, а не в локальных базисах. Остальные из выше приведенных формул остаются справедливыми, если в них заменить $\vec{h}.\varphi$ на $\vec{h}$.

В дальнейшем ограничимся случаем квазирегулярной сетки с метрическим оператором

$$Gm=\{G(\underset{\varphi}{U}(V.\varphi,\ Gz{:}\varphi))^{-1}\,|\,H(\underset{\varphi}{U}(V.\varphi,\ Gz.\varphi))\}:(L)\to(L)$$

§ 2.2. Полнсотью консервативную дифференциально-разностную схему для системы уравнений § I получим воспользовавшись операторным подходом.

Область течения разобьем (см. Рис. 2) на ячейки (Ω), к которым будем относить термодинамические величины (P,V,E), гравитационный потенциал Φ, гравитационную D_g, магнитную D_h и вязкую D_v диссипативные функции, джоулев нагрев D, начальную M_0 и текущие M, M_φ масcон ячеек, величины G, Ξ, Q, тензор Ψ и другие объекты.

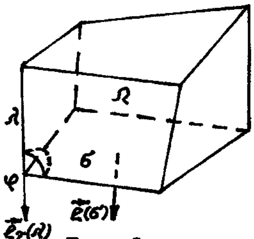

Рис. 2.

Ячейки (Ω) образованы множеством граней $(б)$. Последние являются индексами сетки $(б).(\varphi)$, упорядоченными в некоторую систему базисов (φ). При этом каждая грань входит хотя бы в один базис, а грани, образующие базис, принадлежат одной и той же ячейке, т.е. $б(\varphi(\Omega))\in(б(\Omega))$. Контравариантные орты $\vec{e}(б)$ базисов направлены по нормалям к граням $б$.

На сетке $(б).(\varphi)$ задаются напряженности гравитационного $\vec{g}$ и магнитного $\vec{h}$ полей, вектор Пойтинга $\vec{q}$, гравитационный $t_g.\varphi$, магнитный $t_h.\varphi$ и вязкий $t_v.\varphi$ тензоры, симметризованный тензор скоростей деформаций $t_u.\varphi$ и другие объекты.

Наряду с сеткой $(б).(\varphi)$ введем также сетку $(\lambda).(\varphi)$, состоящую из набора граней $(б)$. Эти грани образованы множеством ребер (λ), являющихся индексами сетки, упорядоченными в систему базисов (φ), соответствующую прежней сетке $(б).(\varphi)$. При этом каждое ребро входит хотя бы в один базис, а ребра, образующие базис, принадлежат одной и той же ячейке, т.е. $\lambda(\varphi(\Omega))\in(\lambda(\Omega))$. Контравариантные орты $\vec{e}_\tau(\lambda)$ базисов направлены вдоль ребер λ.

Аналогичным образом строится поверхностная сетка $(\partial\lambda).(\partial\varphi)$, состоящая из набора граничных граней $(\partial б)$. Ее грани образуют множество граничных ребер $(\partial\lambda)$, являющихся индексами сетки, упорядоченными в систему поверхностных базисов $(\partial\varphi)$ на единицу меньшей размерности. Каждое граничное ребро входит хотя бы в один поверхностный базис, а граничные ребра, образующие этот базис, принадлежат одной и той же граничной грани, т.е. $\partial\lambda(\partial\varphi(\partial\sigma)) \in (\partial\lambda(\partial\sigma))$. Контравариантные орты $\vec{e}_\tau(\partial\lambda)$ поверхностных базисов направлены вдоль граничных ребер $\partial\lambda$ по касательным к поверхности.

На сетке $(\lambda).(\varphi)$ задается напряженность электричеокого поля $\vec{e}$, тензор магнитной вязкооти X_τ и другие объекты. На сетке $(\partial\lambda).(\partial\varphi)$ задается тангенциальная компонента напряженности магнитного поля $\vec{h}.\tau$. На системе базисов (φ) определены скалярн: гравитационная $D_g.\varphi$, магнитная $D_h.\varphi$ и вязкая $D_\gamma.\varphi$, диссипативные функции, джоулев нагрев $D.\varphi$, начальная $M_\emptyset.\omega$, текущая $M.\omega$ массовые и объемные $V.\omega, V.\varphi$ базисные меры, первый $\mu.\varphi$ и второй $\gamma.\varphi$ коэффициенты вязкости и другие объекты.

В вершинах ячеек (Ω) раоположены узлы (ω), к которым будем относить поля радиус-векторов $\vec{r}$, скоростей $\vec{u}, \vec{u}_\sigma$, внешние силы $\vec{f}, \vec{f}_n$, действующие на узел, нормаль $\vec{n}$, кинетическую энергию ε_k, приузловые массы $m_\emptyset, m, m_\varphi$ и объем v, величину ξ (аппроксимация Ξ в узле сетки), тензор ψ (аппроксимация Ψ в узле сетки) и другие объекты.

Если один из описанных выше элементов дискретной области граничный, то перед ним может стоять символ ∂, например, $\partial\sigma$. Будем помнить еще об одном правиле: большими буквами записываются величины, относящиеся к ячейкам, малыми – все остальные. Наконец, в качестве значения конструкции

'<объект> : <булевокое выражение>'

берется <объект>, если <булевское выражение> есть "истина" и <пусто>, если – "ложь". Например, определим тангенциальную и нормальную составляющие вектора $\delta\vec{r}$ по формулам:

$$\delta\vec{r}.\tau = \delta\vec{r}\,' - (\delta\vec{r}, \vec{n})\vec{n} : \vec{n}\,'$$

$$\delta\vec{r}.n = \delta\vec{r} - \delta\vec{r}.\tau$$

В случае, если нормаль $\vec{n}$ в данном узле не задана, $\delta\vec{r}.\tau = \delta\vec{r}$, $\delta\vec{r}.n = \emptyset$. Здесь и далее мы будем широко пользоваться символом "точка внизу" для обозначения смысловой конкатенации объектов различной природы в единый идентификатор.

Опишем элементы объема и массы в изучаемой дискретной среде

$$v=\sum_{V(\omega)} V.\omega\ ,\quad V=\sum_{\omega(\Omega)} V.\omega$$

$$m=\sum_{M(\omega)} M.\omega\ ,\quad M=\sum_{\omega(\Omega)} M.\omega$$

$$m_\phi=\sum_{M_\phi(\omega)} M_\phi.\omega\ ,\quad M_\phi=\sum_{\omega(\Omega)} M_\phi.\omega$$

$$m=\xi m_\phi\ ,\quad M=\Xi M_\phi$$

$$\xi=m_\phi^{-1}\sum_{\Omega(\omega)}(\Xi.\omega M_\phi.\omega)_\Omega\ ,\quad \Xi=M_\phi^{-1}\sum_{\omega(\Omega)}\Xi.\omega M_\phi.\omega$$

Конструкция вида $\sum\limits_{V(\omega)}$ означает суммирование по V прилежащим к ω.

Кроме того, для тензорной массы

$$m_\psi=\sum_{M_\Psi(\omega)} M_\Psi.\omega\ ,\quad M_\Psi=\sum_{\omega(\Omega)} M_\Psi.\omega$$

$$m_\psi=\psi m_\phi,\quad M_\Psi=\Psi M_\phi$$

$$\psi=m_\phi^{-1}\sum_{\Omega(\omega)}(\Psi.\omega M_\phi.\omega)_\Omega\ ,\quad \Psi=M_\phi^{-1}\sum_{\omega(\Omega)}\Psi.\omega M_\phi.\omega$$

В случае, когда масса в динамической группе уравнений движения скаляр, положим

$$m_\psi=m\delta,\quad M_\Psi=M\delta$$

$$\psi=\xi\delta,\quad \Psi=\Xi\delta$$

§ 2.3. Введем оператор $DIV\ :\ (\omega)\to(\Omega)$ по формуле:

$$DIV\,\delta\vec{z}=V^{-1}\sum_{\omega(\Omega)}\left(\frac{\partial V}{\partial\vec{z}},\delta\vec{z}\right)_\omega$$

Здесь $\delta\vec{z}$ интерпретируется как скорость. Моделируя интегральное соотношение

$$\int_\sigma grad P\,\delta\vec{z}\,dV+\int_\sigma P\,div\,\delta\vec{z}\,dV=\int_\Sigma P\,\delta\vec{z}\,d\vec{s}$$

определим оператор $GRAD\ :\ (\Omega)\to(\omega)$ из тождества:

$$\sum_{\omega}((GRAD\,P,\delta\vec{z})v)_{\omega}+\sum_{\Omega}P_{\Omega}\sum_{\omega(\Omega)}\left(\frac{\partial V}{\partial\vec{z}},\delta\vec{z}\right)_{\omega}=$$

$$\left\{\sum_{\partial\omega}p_{\partial\omega}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{z}_{\partial\omega}}\sum_{V(\partial\omega)}V,\delta\vec{z}_{\partial\omega}\right)\Big|-\sum_{\partial\sigma}P.\partial\sigma\sum_{\partial\omega(\partial\sigma)}\left(\frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial\vec{z}},\delta\vec{z}\right)_{\partial\omega}\right\}$$

$$GRAD\,P=-v^{-1}\left(\sum_{\Omega(\omega)}\left(P\frac{\partial V}{\partial\vec{z}}\right)_{\Omega}+\left\{-p_{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\vec{z}_{\partial\omega}}\sum_{V(\partial\omega)}V\,\Big|\,\sum_{\partial\sigma(\partial\omega)}P.\partial\sigma\frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial\vec{z}}\right\}\right)$$

Значением конструкции $\{\ldots|\ldots\}$ может быть любой из объектов, разделенных вертикальной чертой. Величины p и $P.\partial\sigma$, $V.\partial\sigma$ определены в граничных узлах $(\partial\omega)$ и гранях $(\partial\sigma)$ соответственно.

§ 2.4. Поставим в соответствие каждой ячейке ее объем $V=\sum_{\varphi(\Omega)}V.\varphi>\emptyset$, а каждой грани – ее удельную площадь $s>\emptyset$, т.е. площадь грани σ деленную на длину орта $\vec{e}(\sigma)$, равную $\sqrt{(\vec{e}(\sigma),\vec{e}(\sigma))}$.

Введем оператор $DIV\;:\;(\sigma)\to(\Omega)$ по формуле:

$$DIV\,\vec{g}=V^{-1}\sum_{\sigma(\Omega)}sign.\sigma(\Omega)g'(\sigma)s(\sigma)$$

$sign.\{\sigma(\Omega)|\partial\sigma\}=\{$ '+ : < нормаль внешняя >' |

'–: < нормаль внутренняя >' $\}1$

Под скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ будем понимать

$$(\Phi_1,\Phi_2)_{\Omega}=\sum_{\Omega}(V\Phi_1\Phi_2)_{\Omega}$$

Моделируя интегральное соотношение

$$\int_{\Theta}grad\,\Phi\vec{k}\,dV+\int_{\Theta}\Phi\,div\,\vec{k}\,dV=\int_{\Sigma}\Phi\vec{k}\,d\vec{s}$$

определим оператор $GRAD\;:\;(\Omega)\to(\sigma)$ из тождества:

$$(\overline{GRAD\,\Phi},k')_{\sigma}+(\Phi,DIV\,\vec{k})_{\Omega}=$$

$$\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\ \Phi.\partial\sigma\ h'(\partial\sigma) s(\partial\sigma)$$

$$\overline{GRAD\,\Phi} = \frac{\Delta\Phi}{h'}$$

$$\Delta\Phi = -\sum_{\Omega(\sigma)} sign.\sigma(\Omega)\,\Phi_\Omega + sign.\partial\sigma\ \Phi.\partial\sigma$$

$$h' = s^{-1} V.\sigma$$

∂ ::= { '∂_ϕ : < неперввая краевая задача >' |
'∂_1: < первая краевая задача >' }

На граничной грани $\partial\sigma$ считается заданной величина $\{\Phi.\partial_1\sigma \mid GRAD\,\Phi'(\partial_\phi\sigma)\}$.

§ 2.5. Выражение для изменения гравитационной энергии с учетом (I) из § I.I. и (I), (2) из § I.2. имеет вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M \Phi\,dM = -\int_\Omega D_g\,dV + \frac{1}{8\pi\gamma}\int\sum \begin{vmatrix} \Phi & \vec{g}\,d\vec{s} \\ \frac{d\Phi}{dt} & \frac{d}{dt}(\vec{g}\,d\vec{s}) \end{vmatrix} + \int_{M_\phi} \frac{d\Xi}{dt}\Phi\,dM_\phi$$

Моделируя это интегральное соотношение определим на сетке $(\sigma).(\varphi)$ симметризованный тензор скоростей деформаций $t^g_u.\varphi$.

Уравнения (2) из § I.2. запишутся в форме:

$$DIV\,\vec{g} = -4\pi\gamma M/V, \quad \vec{g} = -\overline{GRAD\,\Phi} \qquad (I)$$

Положим $\vec{g}_1 = -\overline{GRAD\,\frac{d\Phi}{dt}}$, тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Phi, M/V)_\Omega = -\frac{1}{8\pi\gamma}\left(\frac{d\Phi}{dt}, DIV\,\vec{g}\right)_\Omega + \frac{1}{2}\sum_\Omega\left(\frac{d\Xi}{dt}\Phi M_\phi\right)_\Omega =$$

$$-\frac{1}{8\pi\gamma}(\Phi, DIV\,\vec{g}_1)_\Omega - \frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\left(\frac{d\Phi.\partial\sigma}{dt}g(\partial\sigma) - \Phi.\partial\sigma\,g_1(\partial\sigma)\right)s(\partial\sigma) + \frac{1}{2}\sum_\Omega\left(\frac{d\Xi}{dt}\Phi M_\phi\right)_\Omega$$

Дифференцируя (I) по времени, получим

$$(\Phi, DIV\,\vec{g}_1)_\Omega = 2\sum_\varphi V.\varphi \sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)} \vec{g}(\sigma)\vec{g}(\sigma')(t^g_{u(-1/2)}.\varphi)_{\sigma\sigma'} +$$

$$\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\,\phi.\partial\sigma\,\frac{d}{dt}(\overset{\downarrow}{G}RAD\,\phi'(\partial\sigma)\overset{\downarrow}{s}(\partial\sigma)) - 4\pi\gamma\sum_{\Omega}\left(\frac{d\Xi}{dt}\phi M_\phi\right)_\Omega$$

$$(t^g_{u(-1/2)}.\varphi)_{\sigma\sigma'} = -\frac{h'(\sigma)h'(\sigma')}{2V.\varphi}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{Gr.\varphi(\sigma,\sigma')}{h'(\sigma)h'(\sigma')}V.\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\overset{\downarrow}{G}RAD\,\phi'(\sigma)\overset{\downarrow}{s}(\sigma)) = \sum_{\varphi(\sigma)}\sum_{\sigma'(\varphi)}\Delta\phi(\sigma')\,\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{Gr.\varphi(\sigma,\sigma')}{h'(\sigma)h'(\sigma')}V.\varphi\right)}$$

Символом "стрелка вниз" под знаком оператора в векторном анализе обычно указываются величины, на которые этот оператор действует. Следуя здесь этому правилу, мы хотим подчеркнуть, что потенциал ϕ не дифференцируется. Окончательно

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\phi, M/V)_\Omega = -\sum_{\varphi} D_g.\varphi\,V.\varphi +$$

$$\frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma \begin{vmatrix} \phi.\partial\sigma & g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma) \\ \dfrac{d\phi.\partial\sigma}{dt} & \dfrac{d}{dt}(g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma)) \end{vmatrix} + \sum_{\Omega}\left(\frac{d\Xi}{dt}\phi M_\phi\right)_\Omega$$

$$D_g.\varphi = \frac{1}{4\pi\gamma}\sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)} \bar{g}(\sigma)\bar{g}(\sigma')(t^g_{u(-1/2)}.\varphi)_{\sigma\sigma'},$$

Поскольку

$$D_g = \frac{1}{4\pi\gamma}tr(\vec{g}\cdot\vec{g}(t_u - \tfrac{1}{2}tr(t_u)\delta))$$

заключаем, что величина $(t^g_{u(-1/2)}.\varphi)_{\sigma\sigma'}$ аппроксимирует ковариантный тензор $(t_u - 1/2\,tr(t_u)\delta)_{\sigma\sigma'}$ на сетке $(\sigma).(\varphi)$. Отсюда

$$(t_u)_{\sigma\sigma'} \triangleq (t^g_u.\varphi)_{\sigma\sigma'} = -\frac{h'(\sigma)h'(\sigma')}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{Gr.\varphi(\sigma,\sigma')}{h'(\sigma)h'(\sigma')}\right)$$

на сетке $(\sigma).(\varphi)$.

§ 2.5.1. Пусть $V.\partial\sigma > \emptyset$ – объем фиктивной ячейки $\Omega.\partial\sigma$ (см. рис. 3), опирающейся на граничную грань $\partial\sigma$. $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$ – исходный фиктивный базис в этой ячейке с индексами $(\sigma) \in \varphi$, $\sigma ::= \{\partial\sigma \,|\, \sigma' \,|\, \sigma''\}$. Фиктивному базису φ поставим в соответствие прилежащую к нему часть площади граничной грани

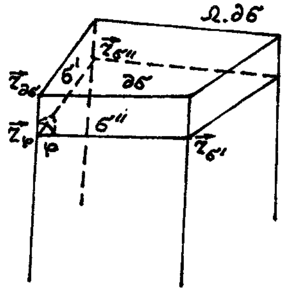

Рис. 3.

$$\vec{s}.\varphi = -\frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial \vec{r}_{\varphi}}$$

На граничной грани $\partial\sigma$ справедливо соотношение

$$s(\partial\sigma)e(\partial\sigma) = \sum_{\varphi(\partial\sigma)} s.\varphi > 0$$

Здесь $s(\sigma) > 0$ – удельная площадь грани σ, т.е. площадь грани σ деленная на длину орта $e(\sigma) = \sqrt{(\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\sigma))} > 0$.

Вводя толщину фиктивной ячейки $h'(\partial\sigma) > 0$, определим объемные меры в фиктивных базисах

$$V.\varphi = h'(\partial\sigma)s.\varphi/e(\partial\sigma) > 0$$

На граничной грани $\partial\sigma$ справедливо соотношение

$$V.\partial\sigma = \sum_{\varphi(\partial\sigma)} V.\varphi = h'(\partial\sigma)s(\partial\sigma)$$

Всюду в дальнейшем считается $h'(\partial\sigma) \to 0$. Далее, определим величины $h'.\varphi = s^{-1}V.\varphi$ и поставим в соответствие каждому ребру его удельную длину $h_{\tau} > 0$, т.е. длину ребра λ, деленную на длину орта $e_{\tau}(\lambda) = \sqrt{(\vec{e}_{\tau}(\lambda), \vec{e}_{\tau}(\lambda))}$.

Раосмотрим аппроксимацию

$$\int_{\Sigma} t_g \vec{u}\, d\vec{s} = -\int_{\Theta} D_g\, dV =$$

$$-\frac{1}{4\pi\gamma}\int_{\Theta} tr(\vec{g}\cdot\vec{g}(t_u - \frac{1}{2}tr(t_u)\delta))dV \triangleq -\sum_{(\varphi)\subset(\Omega.\partial\sigma)} D_{g\varphi} V.\varphi$$

$$D_{g\varphi} = \frac{1}{4\pi\gamma}\sum_{\sigma_1(\varphi),\sigma_2(\varphi)} \vec{g}(\sigma_1)\vec{g}(\sigma_2)(t^{g}_{u(-1/2)\varphi})_{\sigma_1\sigma_2}$$

$$(t^{g}_{u(-1/2)\varphi})_{\sigma_1\sigma_2} = -\frac{h'(\sigma_1)h'(\sigma_2)}{2V.\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{G\tau_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2)}{h'(\sigma_1)h'(\sigma_2)}V.\varphi\right)$$

Здесь Θ – область фиктивных ячеек $(\Omega.\partial\sigma)$. На внешних гранях этих ячеек $\vec{u} = 0$, а $\vec{g}$ постоянно в пределах базиса $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$.

$$h'(\sigma') = \sum_{\varphi(\sigma')} h'.\varphi(\sigma')$$

$$h'.\varphi(\sigma') = \frac{1}{h_\tau(\sigma'')e_\tau(\sigma'')} \frac{\cos \widehat{\vec{e}(\partial\sigma)\vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)} e(\partial\sigma)}{h'(\partial\sigma)|\sin \widehat{\vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)\vec{e}'.\varphi(\sigma'')}|} V.\varphi =$$

$$\frac{1}{h_\tau(\sigma'')e_\tau(\sigma'')} \frac{\cos \widehat{\vec{e}(\partial\sigma)\vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)}}{|\sin \widehat{\vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)\vec{e}'.\varphi(\sigma'')}|} s.\varphi$$

Поскольку все величины в последнем выражении кроме $\vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)$ меняются плавно при $h'(\partial\sigma) \to \emptyset$, интерес при взятии производной по времени представляет лишь

$$\frac{d}{dt} \cos \widehat{\vec{e}\,\vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)} = -\frac{sign.\partial\sigma}{h'(\partial\sigma)e'.\varphi(\partial\sigma)} (\vec{u}_\varphi, \frac{\vec{e}}{e}.\tau'_{\partial\sigma(\varphi)})$$

$$\vec{e}.\tau'_{\partial\sigma(\varphi)} = \vec{e} - (\vec{e}, \vec{n}'_{\partial\sigma(\varphi)})\vec{n}'_{\partial\sigma(\varphi)}, \quad \vec{n}'_{\partial\sigma(\varphi)} = \vec{e}'.\varphi(\partial\sigma)/e'.\varphi(\partial\sigma)$$

$$\vec{e} ::= \{\vec{e}(\partial\sigma) \mid \vec{e}'.\varphi(\sigma'')\}$$

При $h'(\partial\sigma) \to \emptyset$

$$\frac{d}{dt} h'(\partial\sigma) = s(\partial\sigma)^{-1} \frac{d}{dt} V.\partial\sigma = -s(\partial\sigma)^{-1} \sum_{\varphi(\partial\sigma)} (\vec{s}.\varphi, \vec{u}_\varphi)$$

$$\frac{d}{dt} h'.\varphi(\partial\sigma) = s.\varphi(\sum_{\varphi(\partial\sigma)} s.\varphi)^{-1} \frac{d}{dt} h'(\partial\sigma)$$

Далее,

$$G\tau_\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = (\vec{e}_\varphi(\sigma_1), \vec{e}_\varphi(\sigma_2))$$

$$\vec{e}_\varphi(\partial\sigma) = \vec{e}(\partial\sigma), \quad \vec{e}_\varphi(\sigma') = \vec{s}_\varphi(\sigma')/s_\varphi(\sigma')$$

$$\vec{s}_\varphi(\sigma') = sign.\varphi(\partial\sigma, \sigma', \sigma'') sign.\partial\sigma\, sign.\sigma''(\Omega.\partial\sigma)((\vec{\tau}_{\partial\sigma} - \vec{\tau}_\varphi) \times (\vec{\tau}_{\sigma''} - \vec{\tau}_\varphi))$$

$sign.\varphi(\partial\sigma, \sigma', \sigma'') = \{$'+:< правая система>'|'-:< левая система >'}1

$$\vec{\tau}_{\partial\sigma} - \vec{\tau}_\varphi = sign.\partial\sigma\, h(\partial\sigma)\vec{e}'_\varphi(\partial\sigma), \quad \frac{\vec{\tau}_{\sigma''} - \vec{\tau}_\varphi}{|\vec{\tau}_{\sigma''} - \vec{\tau}_\varphi|} = -sign.\sigma''(\Omega.\partial\sigma)\vec{e}'_\varphi(\sigma'')/e'_\varphi(\sigma'')$$

При $h'(\partial\sigma)\to\emptyset$

$$\frac{d}{dt}\vec{s}_\varphi(\sigma')=-\mathrm{sign}.\varphi(\partial\sigma,\sigma',\sigma'')\,\mathrm{sign}.\partial\sigma\,\mathrm{sign}.\sigma''(\Omega.\partial\sigma)(\vec{u}_\varphi\times(\vec{r}_{\sigma''}-\vec{r}_\varphi))$$

$$\frac{d}{dt}s_\varphi(\sigma')=-\mathrm{sign}.\varphi(\partial\sigma,\sigma',\sigma'')\,\mathrm{sign}.\partial\sigma\,\mathrm{sign}.\sigma''(\Omega.\partial\sigma)((\vec{u}_\varphi\times(\vec{r}_{\sigma''}-\vec{r}_\varphi)),\vec{e}_\varphi(\sigma'))$$

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi(\sigma')=\frac{\mathrm{sign}.\varphi(\partial\sigma,\sigma',\sigma'')\,\mathrm{sign}.\partial\sigma}{h'(\partial\sigma)\sqrt{\det\|Gr'_{(\partial\sigma,\sigma'').\varphi}\|}}(\vec{u}_\varphi\times\vec{e}_\varphi{}'(\sigma'')).\tau_{\sigma'(\varphi)}$$

$$\det\|Gr'_{(\partial\sigma,\sigma'').\varphi}\|=(\vec{e}_\varphi{}'(\partial\sigma),\vec{e}_\varphi{}'(\partial\sigma))(\vec{e}_\varphi{}'(\sigma''),\vec{e}_\varphi{}'(\sigma''))\sin^2\widehat{\vec{e}_\varphi{}'(\partial\sigma)\vec{e}_\varphi{}'(\sigma'')}$$

$$(\vec{u}_\varphi\times\vec{e}_\varphi{}'(\sigma'')).\tau_{\sigma'(\varphi)}=(\vec{u}_\varphi\times\vec{e}_\varphi{}'(\sigma''))-((\vec{u}_\varphi\times\vec{e}_\varphi{}'(\sigma'')),\vec{e}_\varphi(\sigma'))\vec{e}_\varphi(\sigma')$$

Здесь $\vec{e}_\varphi{}'$ – сопряженный вектор, соответствующий вектору $\vec{e}_\varphi$ в исходном (контравариантном) базисе.

Наконец, при $h'(\partial\sigma)\to\emptyset$

$$\frac{d}{dt}V.\varphi=\frac{s.\varphi}{e(\partial\sigma)}\frac{d}{dt}h'(\partial\sigma)$$

Итак,

$$\int_\Sigma t_g\vec{u}\,d\vec{s}\triangleq\sum_{(\varphi)\subset(\Omega.\partial\sigma)}\{-D_{g\varphi}V.\varphi\,|\,t_g.\varphi\vec{u}_\varphi\vec{s}.\varphi\}=\sum_{\partial\omega}(\vec{u},\vec{f}_{\partial g})_{\partial\omega}$$

$$t_g.\varphi=\frac{1}{4\pi\gamma}\left(\vec{g}.\varphi\cdot\vec{g}.\varphi-\frac{\vec{g}.\varphi^2}{2}\delta\right),\quad \vec{g}.\varphi=\sum_{\sigma\in\varphi}\vec{g}(\sigma)\vec{e}(\sigma)$$

Здесь $-\vec{f}_{\partial g}$ – поверхностная гравитационная сила, действующая на узел $\partial\omega$.

Моделируя интегральное соотношение

$$\int_\omega D_g\,dV+\int_\omega\vec{u}\,\mathrm{div}\,t_g\,dV=\int_\Sigma t_g\vec{u}\,d\vec{s}$$

определим оператор $-DIT.t_g:(\sigma)\to(\omega)$, аппроксимирующий отнормированную на объем гравитационную силу $-\mathrm{div}\,t_g$, из тождества:

$$\sum_\varphi D_g.\varphi V.\varphi+\sum_\omega((\vec{u},DIT.t_g)v)_\omega=\sum_{\partial\omega}(\vec{u},\vec{f}_{\partial g})_{\partial\omega}$$

собирая множители при $\vec{u}$ в узлах (ω).

§ 2.6. Поставим в соответствие каждому ребру его удельную длину $h_\tau > 0$, т.е. длину ребра λ, деленную на длину орта $\vec{e}_\tau(\lambda)$, равную $\sqrt{(\vec{e}_\tau(\lambda), \vec{e}_\tau(\lambda))}$. Далее, каждому поверхностному базису $\partial\varphi$ поставим в соответствие его меру $s.\partial\varphi > 0$, т.е. прилежащую к поверхностному базису $\partial\varphi$ часть площади граничной грани $\partial\sigma$. На граничных гранях справедливо соотношение

$$\sqrt{(\vec{e}(\partial\sigma), \vec{e}(\partial\sigma))}\, s(\partial\sigma) = \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} s.\partial\varphi > 0$$

Определим также величины:

$$s.\partial\lambda = \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} s.\partial\varphi > 0$$

$$h'_\lambda = h_\tau^{-1} s.\partial\lambda$$

Введем, наконец, оператор $ROD : (\lambda) \to (\sigma)$ по формуле (см. Рис. 4):

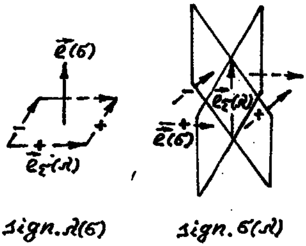

Рис. 4.

$$ROD\, \vec{e}\,' = s^{-1} \sum_{\lambda(\sigma)} sign.\lambda(\sigma) e'(\lambda) h_\tau(\lambda)$$

$$sign.\{\lambda(\sigma) | \sigma(\lambda) | \partial\lambda(\partial\varphi)\} =$$

{'+ : < правая система >' | '- : < левая система >'}$

При определении знака $sign.\partial\lambda(\partial\varphi)$ орт $\vec{e}_\tau(\partial\lambda)$ считается первым, а добавленный к поверхностному базису $\partial\varphi$ орт внешней нормали колинеарный '$\vec{e}(\partial\sigma) : \partial\varphi(\partial\sigma)$' считается последним.

Воспользуемся теперь интегральным соотношением

$$\int_\Omega \vec{e}\, rot\vec{k}\, dV - \int_\Omega \vec{k}\, rot\vec{e}\, dV = \int_\Sigma (\vec{k}.\tau \times \vec{e})\, d\vec{s} \qquad (I)$$

где

$$\vec{k}.\tau = \vec{k} - \frac{(\vec{k}, \vec{e}_\Sigma)}{(\vec{e}_\Sigma, \vec{e}_\Sigma)} \vec{e}_\Sigma$$

$\vec{e}_\Sigma$ – нормаль к поверхности Σ, замыкающей область Ω. Оператор $ROG: ((\sigma) \cup (\partial\lambda)) \to (\lambda)$ определим из разностного аналога (I):

$$(e', \overline{ROG\vec{k}})_\lambda - (\vec{k}, ROD\vec{e}\,')_\sigma = \sum_{\partial\lambda} e'(\partial\lambda) h_\Sigma(\partial\lambda)(\vec{k} d\vec{h})_\Sigma(\partial\lambda) \qquad (2)$$

$$(\vec{k} d\vec{h})_\Sigma(\partial_\Sigma\lambda) = -h_\Sigma'(\partial\lambda) s.\partial\lambda^{-1} \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} \frac{sign.\partial\lambda(\partial\varphi)s.\partial\varphi}{\sqrt{det\|G\tau_\Sigma.\partial\varphi\|}} \vec{k}.\tau'(\partial\lambda') : \partial\lambda'(\partial\varphi) \neq \partial\lambda' \qquad (3)$$

Здесь

$$det\|G\tau_\Sigma.\partial\varphi\| = {}'(\vec{e}_\Sigma(\partial\lambda), \vec{e}_\Sigma(\partial\lambda))(\vec{e}_\Sigma(\partial\lambda'), \vec{e}_\Sigma(\partial\lambda'))sin^2 \widehat{\vec{e}_\Sigma(\partial\lambda)\vec{e}_\Sigma(\partial\lambda')} : \partial\lambda(\partial\varphi) \neq \partial\lambda'(\partial\varphi)'$$

определитель матрицы Грама в поверхностном базисе $\partial\varphi$. Отсюда

$$\overline{ROG\vec{k}} = s_\tau'^{\,-1}\Big(\sum_{\sigma(\lambda)} sign.\sigma(\lambda)\vec{k}(\sigma)h'(\sigma) + (\vec{k} d\vec{h})_\Sigma(\partial\lambda)\Big)$$

$$s_\tau' = h_\tau^{-1} V.\lambda$$

На граничном ребре $\partial\lambda$ считается заданной величина $\{(\vec{k} d\vec{h})_\Sigma(\partial_\Sigma\lambda) \mid ROG\vec{k}'(\partial_\Sigma\lambda)\}$. Граничная циркуляция $(\vec{k} d\vec{h})_\Sigma(\partial_\Sigma\lambda)$ соответствующая первой краевой задаче, может определяться на основании равенств типа (3).

Индексом τ помечаются величины, отнесенные к сетке $(\lambda).(\varphi)$, например,

$$Gm_\tau = \{G_\tau(\underset{\varphi}{U}(V.\varphi, G\tau_\tau.\varphi))^{-1} \mid H_\tau(\underset{\varphi}{U}(V.\varphi, G\tau_\tau.\varphi))\} : (\lambda) \to (\lambda)$$

§ 2.6.I. Рассмотрим случай анизотропной магнитной вязкости в среде.

Положим

$$\overline{ROG\vec{k}}.\varphi = \{\sum_{\lambda(\varphi)} ROG\vec{k}'(\lambda)\vec{e}_\tau'.\varphi(\lambda) \mid \sum_{\lambda(\varphi)} \overline{ROG\vec{k}}(\lambda)\vec{e}_\tau(\lambda)\}$$

и будем считать, что в некотором ортонормированном базисе

$$\vec{f}_\tau.\varphi(\lambda)=\{\sum_{\lambda'(\varphi)} c_\tau.\varphi(\lambda',\lambda)\vec{e}_\tau(\lambda') \mid \sum_{\lambda'(\varphi)} c_\tau'.\varphi(\lambda',\lambda)\vec{e}_\tau'.\varphi(\lambda')\}$$

$$c_\tau'.\varphi = c_\tau.\varphi^{-T}$$

$$(\vec{f}_\tau.\varphi(\lambda), \vec{f}_\tau.\varphi(\lambda')) = \delta_{\lambda(\varphi)\lambda'(\varphi)}$$

т.е.

$$\{G\tau_\tau'.\varphi = c_\tau.\varphi\, c_\tau.\varphi^T$$

$$\vec{e}_\tau'.\varphi(\lambda) = \sum_{\lambda'(\varphi)} c_\tau.\varphi^T(\lambda',\lambda)\vec{f}_\tau.\varphi(\lambda') \mid \qquad (1)$$

$$G\tau_\tau.\varphi = c_\tau'.\varphi\, c_\tau'.\varphi^T$$

$$\vec{e}_\tau(\lambda) = \sum_{\lambda'(\varphi)} c_\tau'.\varphi^T(\lambda',\lambda)\vec{f}_\tau.\varphi(\lambda')\}$$

связанном с исходным базисом матрицей $\{c_\tau.\varphi \mid c_\tau'.\varphi\}$, задана напряженность

$$\overrightarrow{ROG_X\vec{R}}.\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)} X_\tau.\varphi(\lambda,\lambda')(\overrightarrow{ROG\vec{R}}.\varphi, \vec{f}_\tau.\varphi(\lambda'))\vec{f}_\tau.\varphi(\lambda)$$

или

$$\overrightarrow{ROG_X\vec{R}}.\varphi = \{\sum_{\lambda(\varphi)} ROG_X\vec{R}.\varphi(\lambda)\vec{e}_\tau(\lambda) \mid \sum_{\lambda(\varphi)} ROG_X\vec{R}'.\varphi(\lambda)\vec{e}_\tau'.\varphi(\lambda)\}$$

$$\{ROG_X\vec{R}.\varphi = G\tau_{X\tau}'.\varphi ROG\vec{R}'$$

$$G\tau_{X\tau}'.\varphi = c_\tau.\varphi X_\tau.\varphi\, c_\tau.\varphi^T \mid$$

$$ROG_X\vec{R}'.\varphi = G\tau_{X\tau}.\varphi\,\overrightarrow{ROG\vec{R}}$$

$$G\tau_{X\tau}.\varphi = c_\tau'.\varphi X_\tau.\varphi\, c_\tau'.\varphi^T\}$$

Здесь $X_\tau.\varphi$ – тензор магнитной вязкости в базисе $\vec{f}_\tau.\varphi$. Если матрица $X_\tau.\varphi = X_\tau.\varphi^T$, то ее без ущерба для общности можно считать в дальнейшем диагональной с вещественными собственными значениями $x_{f\tau}.\varphi$, расположенными на диагонали, а $\vec{f_\tau}.\varphi$ – базисом из соответствующих собственных векторов, направленных вдоль главных осей тензора $X_\tau.\varphi$. Из (I) следует

$$\{G\tau_{X\tau}'.\varphi(\lambda,\lambda')=(\vec{e_\tau}'.\varphi(\lambda),X_\tau.\varphi\,\vec{e_\tau}'.\varphi(\lambda'))|$$

$$G\tau_{X\tau}.\varphi(\lambda,\lambda')=(\vec{e_\tau}(\lambda),X_\tau.\varphi\,\vec{e_\tau}(\lambda'))\}$$

Рассмотрим аппроксимирующую непрерывный аналог скалярного произведения $\int\limits_V(X_\tau\vec{e},\vec{e_1})dV$ квадратичную форму, в которой роль матрицы Грама играет $\{G\tau_{X\tau}'.\varphi|G\tau_{X\tau}.\varphi\}$:

$$\{(\overline{e_{X\tau}},e_1')_\lambda=\sum_\varphi V.\varphi\sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)}G\tau_{X\tau}'.\varphi(\lambda,\lambda')\,e'(\lambda')\,e_1'(\lambda)|$$

$$(\overline{e_1},e_{X\tau}')_\lambda=\sum_\varphi V.\varphi\sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)}G\tau_{X\tau}.\varphi(\lambda,\lambda')\,\overline{e_1}(\lambda)\,\overline{e}(\lambda')\}$$

Здесь

$$\{\overline{e_{X\tau}}(\lambda)=V.\lambda^{-1}\sum_{\varphi(\lambda)}V.\varphi\sum_{\lambda'(\varphi)}G\tau_{X\tau}'.\varphi(\lambda,\lambda')\,e'(\lambda')\,|$$

$$e_{X\tau}'(\lambda)=V.\lambda^{-1}\sum_{\varphi(\lambda)}V.\varphi\sum_{\lambda'(\varphi)}G\tau_{X\tau}.\varphi(\lambda,\lambda')\,\overline{e}(\lambda')\}$$

т.е.

$$\{\overline{e_{X\tau}}=G_{X\tau}e'\,|$$

$$e_{X\tau}'=H_{X\tau}\overline{e}\}$$

В дальнейшем под метрическим оператором магнитной вязкости будем понимать

$$Gm_{X\tau}=\{G_\tau^{-1}G_{X\tau}(\bigcup_\varphi(V.\varphi,G\tau_{X\tau}'.\varphi))G_\tau^{-1}|H_{X\tau}(\bigcup_\varphi(V.\varphi,G\tau_{X\tau}.\varphi))\}:(\lambda)\to(\lambda)$$

$Gm_{X\tau}=Gm_{X\tau}^*$, если в каждом базисе $X_\tau.\varphi=X_\tau.\varphi^T$. $Gm_{X\tau}>\emptyset$ и, следовательно, существует $\{G_{X\tau}^{-1}|H_{X\tau}^{-1}\}$, если в каждом базисе $X_\tau.\varphi\geq\emptyset$ и каждое ребро λ входит хотя бы в один базис $\varphi(\lambda)$, т.ч. $X_\tau.\varphi>\emptyset$.

Оператор $ROG_X:((6)\,U(\partial\lambda))\to(\lambda)$ определим по формуле:

$$\{\overline{ROG_X \vec{k}} = G_{X\tau} \cdot ROG\vec{k}'$$

$$ROG_X\vec{k}' = G_\tau^{-1} G_{X\tau} G_\tau^{-1} \overline{ROG\vec{k}} \;|$$

$$ROG_X\vec{k}' = H_{X\tau} \overline{ROG\vec{k}}\,\}$$

При этом справедливо тождество

$$(ROG_X\vec{k}', \overline{ROG\vec{k}_1})_\lambda - (\vec{k}_1, (ROD\,ROG_X\vec{k})')_\sigma = \sum_{\partial\lambda} ROG_X\vec{k}'(\partial\lambda) h_\tau(\partial\lambda)(\vec{k}_1 d\vec{h})_\tau(\partial\lambda)$$

На граничном ребре $\partial\lambda$ считается заданной величина $\{(\vec{k}d\vec{h})_\tau(\partial_1\lambda)|$ $ROG_X\vec{k}'(\partial_\phi\lambda)\}$. Граничная циркуляция $(\vec{k}d\vec{h})_\tau(\partial_1\lambda)$ соответствующая первой краевой задаче может определяться на основании равенств типа (3) из § 2.6.

Всюду в дальнейшем предполагается $X_\tau . \varphi \geq \emptyset$ и, следовательно, $Gm_{X\tau} \geq \emptyset$.

§ 2.7. Уравнения Маковелла (3) из § I.2. запишутся в форме:

$$\frac{d}{dt}(\vec{k}'s) = -s\,ROD\vec{e}', \quad e' = Gm_{X\tau} \overline{ROG\vec{k}} \qquad (I)$$

Из первого из них следует $\frac{d}{dt}(VDIV\vec{k}) = \emptyset$. Предполагая отсутствие магнитных зарядов в ячейке в начальный момент, получим, что $DIV\vec{k} = \emptyset$ всегда в этой ячейке.

Из (I) с учетом (2) из § 2.6. получим

$$\frac{c^2}{4\pi}\sum_\sigma V.\sigma\,\vec{k}(\sigma)s(\sigma)^{-1}\frac{d}{dt}(\vec{k}'(\sigma)s(\sigma)) = -(\int_0 D\,dV)_\Delta - (\int_\Sigma \vec{q}\,d\vec{s})_\Delta$$

$$(\int_0 D\,dV)_\Delta = \frac{c^2}{4\pi}(Gm_{X\tau}\overline{ROG\vec{k}}, \overline{ROG\vec{k}})_\lambda = \sum_\varphi D.\varphi\,V.\varphi \geq \emptyset$$

$$\{D.\varphi = \frac{c^2}{4\pi}\sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)} G\tau_{X\tau}'.\varphi(\lambda,\lambda')e_1'(\lambda)e_1'(\lambda') \geq \emptyset, \quad e_1' = G_\tau^{-1}\overline{ROG\vec{k}} \;|$$

$$D.\varphi = \frac{c^2}{4\pi}\sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)} G\tau_{X\tau}.\varphi(\lambda,\lambda')\bar{e}_1(\lambda)\bar{e}_1(\lambda') \geq \emptyset, \quad \bar{e}_1 = \overline{ROG\vec{k}}\,\}$$

$$(\int_\Sigma \vec{q}\,d\vec{s})_\Delta = -\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\partial\lambda} e'(\partial\lambda)\,h_\tau(\partial\lambda)(\vec{k}d\vec{h})_\tau(\partial\lambda)$$

Выражение для изменения магнитной энергии на сетке $(\sigma).(\varphi)$ для случая $Gm = G^{-1}$ имеет вид:

$$\frac{c^2}{8\pi}\frac{d}{dt}(\bar{h},h')_\sigma = \frac{c^2}{4\pi}\sum_\sigma V.\sigma\,\bar{h}(\sigma)\Delta(\sigma)^{-1}\frac{d}{dt}(h'(\sigma)\Delta(\sigma)) +$$

$$\frac{c^2}{4\pi}\sum_\sigma V.\sigma\,\bar{h}(\sigma)h'(\sigma)\Delta(\sigma)\frac{d}{dt}(\Delta(\sigma)^{-1}) + \frac{c^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\sum_\sigma \overset{\downarrow}{V.\sigma}\,\overset{\downarrow}{G}h'(\sigma)h'(\sigma) =$$

$$\frac{c^2}{4\pi}\sum_\sigma V.\sigma\,\bar{h}(\sigma)\Delta(\sigma)^{-1}\frac{d}{dt}(h'(\sigma)\Delta(\sigma)) + \sum_\varphi D_h.\varphi\, V.\varphi$$

$$D_h.\varphi = \frac{c^2}{4\pi}\sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)} h'(\sigma)h'(\sigma')(t^h_{u(-1/2)}.\varphi)^{\sigma\sigma'}$$

$$(t^h_{u(-1/2)}.\varphi)^{\sigma\sigma'} = \frac{V.\varphi}{2h'.\varphi(\sigma)h'.\varphi(\sigma')}\frac{d}{dt}\left(\frac{h'.\varphi(\sigma)h'.\varphi(\sigma')Gr'.\varphi(\sigma,\sigma')}{V.\varphi}\right)$$

$$(t^h_u.\varphi)^{\sigma\sigma'} = \frac{1}{2h'.\varphi(\sigma)h'.\varphi(\sigma')}\frac{d}{dt}(h'.\varphi(\sigma)h'.\varphi(\sigma')Gr'.\varphi(\sigma,\sigma'))$$

$$h'.\varphi = \Delta^{-1}V.\varphi$$

символом "стрелка вниз" здесь подчеркивается, что дифференцируется лишь величина $V.\sigma$ и метрический оператор G. Окончательно

$$\frac{c^2}{8\pi}\frac{d}{dt}(Gh',h')_\sigma = \sum_\varphi D_h.\varphi\, V.\varphi - \left(\int_\Omega D\,dV\right)_\Delta - \left(\int_\Sigma \vec{q}\,d\vec{S}\right)_\Delta$$

Поскольку

$$D_h = \frac{c^2}{4\pi}tr\left(\vec{h}\cdot\vec{h}\left(t_u - \frac{1}{2}tr(t_u)\delta\right)\right)$$

заключаем, что величины $(t^h_{u(-1/2)}.\varphi)^{\sigma\sigma'}$ и $(t^h_u.\varphi)^{\sigma\sigma'}$ аппроксимируют на сетке $(\sigma).(\varphi)$ контравариантный тензор $(t_u - 1/2\,tr(t_u)\delta)^{\sigma\sigma'}$ и контравариантный симметризованный тензор скоростей деформаций $(t_u)^{\sigma\sigma'}$ соответственно.

§ 2.7.I. Также как и в § 2.5.I. рассмотрим аппроксимацию

$$\int_{\Sigma} t_k \vec{u}\, d\vec{s} = -\int_{\mathcal{O}} D_k\, dV = -\frac{c^2}{4\pi}\int_{\mathcal{O}} tr(\vec{k}\cdot\vec{k}(t_u - \frac{1}{2}tr(t_u)\delta))dV \triangleq -\sum_{(\varphi)\subset(\Omega.\partial\sigma)} D_{k\varphi} V.\varphi$$

$$D_{k\varphi} = \frac{c^2}{4\pi}\sum_{\sigma_1(\varphi),\sigma_2(\varphi)} k'(\sigma_1)k'(\sigma_2)(t^{k}_{u(-1/2)\varphi})^{\sigma_1\sigma_2}$$

$$(t^{k}_{u(-1/2)\varphi})^{\sigma_1\sigma_2} = \frac{V.\varphi}{2h'.\varphi(\sigma_1)h'.\varphi(\sigma_2)}\frac{d}{dt}\left(\frac{h'.\varphi(\sigma_1)h'.\varphi(\sigma_2)G\tau'_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2)}{V.\varphi}\right)$$

$$G\tau'_{\varphi} = G\tau_{\varphi}^{-1}$$

Здесь $\mathcal{O}$ – область фиктивных ячеек $(\Omega.\partial\sigma)$. На внешних гранях этих ячеек $\vec{u} = \emptyset$, а $\vec{k}$ постоянно в пределах базиса $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$.

Итак,

$$\int_{\Sigma} t_k \vec{u}\, d\vec{s} \triangleq \sum_{(\varphi)\subset(\Omega.\partial\sigma)} \{-D_{k\varphi}V.\varphi \mid t_k.\varphi\vec{u}_{\varphi}\vec{s}.\varphi\} = \sum_{\partial\omega}(\vec{u}, \vec{f}_{\partial k})_{\partial\omega}$$

$$t_k.\varphi = \frac{c^2}{4\pi}(\vec{k}'.\varphi\cdot\vec{k}'.\varphi - \frac{\vec{k}'.\varphi^2}{2}\delta), \quad \vec{k}'.\varphi = \sum_{\sigma(\varphi)} k'(\sigma)\vec{e}'.\varphi(\sigma)$$

Здесь $\vec{f}_{\partial k}$ – поверхностная магнитная сила, действующая на узел $\partial\omega$.

Моделируя интегральное соотношение

$$\int_{\mathcal{O}} D_k\, dV + \int_{\mathcal{O}} \vec{u}\, div\, t_k\, dV = \int_{\Sigma} t_k \vec{u}\, d\vec{s}$$

определим оператор $DIT.t_k : (\sigma) \to (\omega)$, аппроксимирующий отнормированную на объем силу Лоренца $div\, t_k$, из тождества :

$$\sum_{\varphi} D_k.\varphi V.\varphi + \sum_{\omega}((\vec{u}, DIT.t_k)v)_{\omega} = \sum_{\partial\omega}(\vec{u}, \vec{f}_{\partial k})_{\partial\omega}$$

собирая множители при $\vec{u}$ в узлах (ω).

§ 2.8. В базисе $\varphi \in \Omega$ введем вязкую диссипативную функцию

$$D_v.\varphi = \sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)} (t_v.\varphi)^{\sigma\sigma'} (t_u.\varphi)_{\sigma\sigma'}$$

$$(t_u.\varphi)_{\sigma\sigma'} = \{ (t_u^g.\varphi)_{\sigma\sigma'} \mid \sum_{\sigma''(\varphi),\sigma'''(\varphi)} Gz.\varphi(\sigma,\sigma'') Gz.\varphi(\sigma',\sigma''') (t_u^k.\varphi)^{\sigma''\sigma'''} \}$$

Величина $(t_v.\varphi)^{\sigma\sigma'}$ аппроксимирует контравариантный вязкий тензор $(t_v)^{\sigma\sigma'}$ на сетке $(\sigma).(\varphi)$.

Аналогично, в фиктивном базисе $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$ введем вязкую диссипативную функцию

$$D_{v\varphi} = \sum_{\sigma_1(\varphi),\sigma_2(\varphi)} (t_{v\varphi})^{\sigma_1\sigma_2} (t_{u\varphi})_{\sigma_1\sigma_2}$$

$$(t_{u\varphi})_{\sigma_1\sigma_2} = \{ (t_{u\varphi}^g)_{\sigma_1\sigma_2} \mid \sum_{\sigma_3(\varphi),\sigma_4(\varphi)} Gz_\varphi(\sigma_1,\sigma_3) Gz_\varphi(\sigma_2,\sigma_4) (t_{u\varphi}^k)^{\sigma_3\sigma_4} \}$$

$$(t_{u\varphi}^g)_{\sigma_1\sigma_2} = -\frac{h'(\sigma_1)h'(\sigma_2)}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{Gz_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)}{h'(\sigma_1)h'(\sigma_2)} \right)$$

$$(t_{u\varphi}^k)^{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{2h'.\varphi(\sigma_1)h'.\varphi(\sigma_2)} \frac{d}{dt} (h'.\varphi(\sigma_1)h'.\varphi(\sigma_2) Gz'_\varphi(\sigma_1,\sigma_2))$$

Величина $(t_{v\varphi})^{\sigma_1\sigma_2}$ аппроксимирует контравариантный тензор $(t_v)^{\sigma_1\sigma_2}$ в фиктивном базисе $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$.

Рассмотрим аппроксимацию

$$\int_\Sigma t_v \vec{u}\, d\vec{\Sigma} = -\int_\Theta D_v dV \triangleq -\sum_{(\varphi)\subset(\Omega.\partial\sigma)} D_{v\varphi} V.\varphi$$

Здесь Θ – область фиктивных ячеек $(\Omega.\partial\sigma)$. На внешних гранях этих ячеек $\vec{u} = \emptyset$, а t_v постоянно в пределах базиса $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$.

Итак,

$$\int_\Sigma t_v \vec{u}\, d\vec{\Sigma} \triangleq \sum_{(\varphi)\subset(\Omega.\partial\sigma)} \{ -D_{v\varphi} V.\varphi \mid t_v.\varphi' \vec{u}_\varphi \vec{\Sigma}.\varphi \} = \sum_{\partial\omega} (\vec{u}, \vec{f}_{\partial v})_{\partial\omega}$$

Величина $t_v.\varphi'$ – тензор, определенный в базисе $\varphi' \in \Omega(\partial\sigma)$ смежном фиктивному базису $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$ относительно грани $\partial\sigma$.
$\vec{f}_{\partial v}$ – поверхностная вязкая сила, действующая на узел $\partial\omega$.

Моделируя интегральное соотношение

$$\int_{\omega} D_{v} dV + \int_{\omega} \vec{u}\, div\, t_{v} dV = \int_{\Sigma} t_{v} \vec{u}\, d\vec{s}$$

определим оператор $DIT.t_{v} : (\sigma) \to (\omega)$, аппроксимирующий отнормированную на объем вязкую силу $div\, t_{v}$, из тождества:

$$\sum_{\varphi} D_{v}.\varphi\, V.\varphi + \sum_{\omega} ((\vec{u}, DIT.t_{v}) v)_{\omega} = \sum_{\partial\omega} (\vec{u}, \vec{f}_{\partial v})_{\partial\omega}$$

собирая множители при $\vec{u}$ в узлах (ω).

Положим теперь

$$(t_{v}.\varphi)^{\sigma\sigma'} = 2\mu.\varphi((t_{u}.\varphi)^{\sigma\sigma'} - \frac{1}{3} tr(t_{u}.\varphi) Gr!.\varphi(\sigma,\sigma')) + \xi.\varphi\, tr(t_{u}.\varphi) Gr!.\varphi(\sigma,\sigma')$$

$$(t_{u}.\varphi)^{\sigma\sigma'} = \sum_{\sigma''(\varphi),\sigma'''(\varphi)} Gr!\varphi(\sigma,\sigma'') Gr!\varphi(\sigma',\sigma''')(t_{u}.\varphi)_{\sigma''\sigma'''},\quad tr(t_{u}.\varphi) = Gr!\varphi(\sigma,\sigma')(t_{u}.\varphi)_{\sigma\sigma'}$$

на сетке $(\sigma).(\varphi)$.

Аналогично, в фиктивном базисе $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$

$$(t_{v\varphi})^{\sigma_1\sigma_2} = 2\mu.\varphi((t_{u\varphi})^{\sigma_1\sigma_2} - \frac{1}{3} tr(t_{u\varphi}) Gr'_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2)) + \xi.\varphi\, tr(t_{u\varphi}) Gr'_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2)$$

$$(t_{u\varphi})^{\sigma_1\sigma_2} = \sum_{\sigma_3(\varphi),\sigma_4(\varphi)} Gr'_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_3) Gr'_{\varphi}(\sigma_2,\sigma_4)(t_{u\varphi})_{\sigma_3\sigma_4},\quad tr(t_{u\varphi}) = Gr'_{\varphi}(\sigma_1,\sigma_2)(t_{u\varphi})_{\sigma_1\sigma_2}$$

Очевидно, что при такой аппроксимации вязкого тензора $D_{v}.\varphi \geq \emptyset$. Нетрудно видеть также, что $tr(t_{v}.\varphi) = 3\xi.\varphi\, tr(t_{u}.\varphi)$ на сетке $(\sigma).(\varphi)$. Аналогично в фиктивном базисе $\varphi \in \Omega.\partial\sigma$ $D_{v\varphi} \geq \emptyset$, $tr(t_{v\varphi}) = 3\xi.\varphi\, tr(t_{u\varphi})$.

§ 2.9. Выпишем полностью консервативную дифференциально-разностную схему. Баланс объема имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = V DIV \vec{u}$$

при этом справедливо

$$\frac{d}{dt} \sum_{\Omega} V_{\Omega} = \sum_{\partial\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_{\partial\omega}} \sum_{V(\partial\omega)} V, \vec{u}_{\partial\omega} \right)$$

Баланс импульса имеет вид:

$$\frac{dm_\varphi \vec{u}}{dt} = v(-GRADP - DIT.t_g + DIT.t_k + DIT.t_v) + \frac{dm_\varphi}{dt}\vec{u}_G + \vec{f} + \vec{f}_n\ ,\ \vec{f}_n.\tau = \emptyset$$

или

$$\frac{d(\overset{\downarrow}{m_\varphi}\overset{\downarrow}{\vec{u}}).\tau}{dt} = (v(-GRADP - DIT.t_g + DIT.t_k + DIT.t_v) + \frac{dm_\varphi}{dt}\vec{u}_G + \vec{f}).\tau$$

При этом справедливо

$$\frac{d}{dt}\sum_{\omega}((\overset{\downarrow}{m_\varphi}\overset{\downarrow}{\vec{u}}).\tau)_\omega = \sum_{\Omega} P_\Omega \sum_{\omega(\Omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{z}_\omega}.\tau - \{\sum_{\partial\omega} P_{\partial\omega}(\frac{\partial}{\partial \vec{z}_{\partial\omega}} \sum_{V(\partial\omega)} V).\tau| - \sum_{\partial\sigma} P_{\partial\sigma} \sum_{\partial\omega(\partial\sigma)} \frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial \vec{z}_{\partial\omega}}.\tau\} +$$

$$\sum_{\omega}((v(-DIT.t_g + DIT.t_k + DIT.t_v) + \frac{dm_\varphi}{dt}\vec{u}_G + \vec{f}).\tau)_\omega$$

Символом "стрелка вниз" здесь подчеркивается, что нормаль $\vec{n}$ не дифференцируется. В тех узлах, где задана нормальная компонента скорости, включена также сила "реакции опоры" $\vec{f}_n$. Если тензоры $t^g_{u(-1/2)}.\varphi$, $t^k_{u(-1/2)}.\varphi$, $t_u.\varphi$ обращаются в нуль при любом движении $\vec{u} = const$, то величина $\sum_{\omega}(v(-DIT.t_g + DIT.t_k + DIT.t_v))_\omega$ сводится к суммированию лишь по граничным узлам $(\partial\omega)$. Баланс внутренней энергии имеет вид:

$$\frac{dME}{dt} = -P\frac{dV}{dt} + V(D + D_v) + Q$$

$$D = V^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)} D.\varphi V.\varphi\ ,\ D_v = V^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)} D_v.\varphi V.\varphi$$

при этом справедливо

$$\frac{d}{dt}\sum_{\Omega}(ME)_\Omega = \sum_{\Omega}(V(-PDIV\vec{u} + D + D_v) + Q)_\Omega$$

Баланс кинетической энергии имеет вид:

$$\frac{dmE_k}{dt} = v(\vec{u}, -GRADP - DIT.t_g + DIT.t_k + DIT.t_v) -$$

$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\varphi}{dt}(\vec{u} - \vec{u}_G), (\vec{u} - \vec{u}_G)) + (\vec{u}, \vec{f} + \vec{f}_n)$$

или, на всей сетке,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\omega}(mE_K)_{\omega}=\sum_{\omega}(v(\vec{u},-GRADP-DIT.t_g+DIT.t_k+DIT.t_v)-$$

$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_\sigma),(\vec{u}-\vec{u}_\sigma))+(\vec{u},(\vec{f}+\vec{f}_n)))_{\omega}$$

Мы воспользовались очевидным тождеством

$$(\vec{u},\frac{dm_\psi\vec{u}}{dt})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_\psi\vec{u},\vec{u})+\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u},\vec{u})$$

Здесь по определению

$$\frac{dmE_K}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_\psi\vec{u},\vec{u})-\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_\sigma,\vec{u}_\sigma)$$

Баланс гравитационной энергии имеет вид:

$$\frac{1}{2}\frac{dM\Phi}{dt}=-VD_g+\frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\sigma(\Omega)}\Delta ign.\sigma(\Omega)\begin{vmatrix}\Phi.\sigma & g'(\sigma)\Delta(\sigma)\\ \frac{d\Phi.\sigma}{dt} & \frac{d}{dt}(g'(\sigma)\Delta(\sigma))\end{vmatrix}+\frac{dM}{dt}\Phi$$

$$D_g=V^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)}D_g.\varphi V.\varphi$$

При этом справедливо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Phi,M/V)_\Omega=-\sum_{\Omega}VD_g+\frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\partial\sigma}\Delta ign.\partial\sigma\begin{vmatrix}\Phi.\partial\sigma & g'(\partial\sigma)\Delta(\partial\sigma)\\ \frac{d\Phi.\partial\sigma}{dt} & \frac{d}{dt}(g'(\partial\sigma)\Delta(\partial\sigma))\end{vmatrix}+\sum_{\Omega}(\frac{dM}{dt}\Phi)_\Omega$$

Под величиной $\Phi.\sigma$ понимается некоторое представление гравитационного потенциала Φ на грани σ . Баланс магнитной энергии имеет вид:

$$\frac{c^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\sum_{\varphi(\Omega)}h^2.\varphi V.\varphi=V(D_h-D-DIV\vec{q})$$

или, на всей сетке,

$$\frac{c^2}{8\pi}\frac{d}{dt}(Gh',h')_\sigma=\sum_{\Omega}(V(D_h-D))_\Omega+\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\partial\Omega}e'(\partial\Omega)h_\tau(\partial\Omega)(\vec{h}d\vec{h})_\tau(\partial\Omega)$$

Здесь

$$h^2.\varphi=\sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)}G\tau!\varphi(\sigma,\sigma')h'(\sigma)h'(\sigma')\geq\emptyset,\quad D_h=V^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)}D_h.\varphi V.\varphi$$

Напомним также, что

$$\left(\int_{\Sigma} \vec{q}\, d\vec{s}\right)_{\Delta} = \sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\, q'(\partial\sigma)\, s(\partial\sigma) = (DIV\,\vec{q}, 1)_{\Omega}$$

$$q'(\partial\sigma) = \frac{c^2}{4\pi} s(\partial\sigma)^{-1} \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} \sum_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \frac{sign.\partial\lambda(\partial\varphi)\, s.\partial\varphi}{\sqrt{\det \| G\tau_{\tau}.\partial\varphi \|}}\, e'(\partial\lambda)\, {}^{\prime}h.\tau'(\partial\lambda') : \partial\lambda'(\partial\varphi) \neq \partial\lambda'$$

Под величиной $q'(\sigma)$ при $\sigma \in (\sigma) \setminus (\partial\sigma)$ понимается некоторое ковариантное представление вектора Пойтинга $\vec{q} = \frac{c^2}{4\pi}(\vec{e} \times \vec{h})$ на внутренних гранях сетки. Уравнение баланса полной энергии запишется в виде:

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{\Omega}(ME)_{\Omega} + \sum_{\omega}(m\varepsilon_k)_{\omega} + \frac{1}{2}(\Phi, M/V)_{\Omega} + \frac{c^2}{8\pi}(Gh', h')_{\sigma}\Big) =$$

$$-\Big\{\sum_{\partial\omega} R_{\partial\omega}\Big(\frac{\partial}{\partial\vec{r}_{\partial\omega}} \sum_{V(\partial\omega)} V, \vec{u}_{\partial\omega}\Big) \Big| -\sum_{\partial\sigma} P.\partial\sigma \sum_{\partial\omega(\partial\sigma)} \Big(\frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial\vec{r}}, \vec{u}\Big)_{\partial\omega}\Big\} +$$

$$\sum_{\partial\omega}\big(\vec{u}, (-\vec{f}_{\partial g} + \vec{f}_{\partial h} + \vec{f}_{\partial\sigma})\big)_{\partial\omega} +$$

$$\frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma \begin{vmatrix} \Phi.\partial\sigma & g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma) \\ \frac{d\Phi.\partial\sigma}{dt} & \frac{d}{dt}\big(g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma)\big) \end{vmatrix} +$$

$$\frac{c^2}{4\pi} \sum_{\partial\lambda} e'(\partial\lambda)\, h_{\tau}(\partial\lambda)(\vec{h}\, d\vec{h})_{\tau}(\partial\lambda) +$$

$$\sum_{\Omega}\Big(-\frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)}\Big(\frac{dM_{\varphi}.\omega}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_{\sigma}), (\vec{u}-\vec{u}_{\sigma})\Big)_{\omega} + \frac{dM}{dt}\Phi + Q\Big)_{\Omega} + \sum_{\omega}(\vec{u}, \vec{f} + \vec{f}_n)_{\omega}$$

Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$DIV\,\vec{g} = -4\pi\gamma M/V, \quad \vec{g} = -\overline{GRAD\,\Phi}$$

или, на всей сетке,

$$\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\, g'(\partial\sigma)\, s(\partial\sigma) = -4\pi\gamma \sum_{\Omega} M_{\Omega}$$

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в магнитогидродинамическом приближении имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(\vec{h}' s) = -s\, ROD\, \vec{e}', \quad e' = Gm_{\chi\tau} \overline{ROG\, \vec{h}}$$

Из первого из них следует $DIV\, \vec{h} = \emptyset$ или, на всей сетке,

$$\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\, \vec{h}'(\partial\sigma) s(\partial\sigma) = \emptyset$$

Кроме того, суммируя по ориентированной поверхности (σ) с набором приграничных граней $(\sigma_\partial) \subset (\sigma)$, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{\sigma} sign.\sigma\, \vec{h}'(\sigma) s(\sigma) = -\sum_{\sigma \in (\sigma_\partial)} sign.\sigma \sum_{\lambda(\sigma) \in (\lambda_\partial)} sign.\lambda(\sigma)\, e'(\lambda) h_\tau(\lambda)$$

(λ_∂) - здесь множество граничных ребер, образующих искомую поверхность. Величина $sign.\sigma$ определяется также как и $sign.\partial\sigma$. Пусть теперь ориентированная поверхноость пронизывается множеством ребер (λ), среди которых набор $(\lambda_\partial) \subset (\lambda)$ - приграничный, и $Gm_{\chi\tau} > \emptyset$, тогда второе уравнение Максвелла запишется в виде:

$$\sum_{\lambda} sign.\lambda\, s_\tau'(\lambda)\, Gm_{\chi\tau}^{-1} e'(\lambda) = \sum_{\lambda \in (\lambda_\partial)} sign.\lambda \Big(\sum_{\sigma(\lambda) \in (\sigma_\partial)} sign.\sigma(\lambda) \vec{h}(\sigma) h'(\sigma) + (\vec{h} d\vec{h})_\tau (\partial\lambda) \Big)$$

$sign.\{\sigma \mid \lambda\} = \{$ '+ : < нормаль внешняя > ' |

'– : < нормаль внутренняя > ' } 1

(σ_∂) - здесь множество приграничных граней, пересекающих искомую поверхность.

§ 3. Полностью консервативная разностная схема.

§ 3.I. Будем считать выполненными следующие естественные свойства разностной схемы

$$V_t = \sum_{\omega(\Omega)} \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{\tau}}.t, \vec{\tau}_t \right)_\omega$$

$$\text{'}\sum_{V(\omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{\tau}}.t = \emptyset : (\partial\sigma(\omega)) = \emptyset\text{'}$$

$$\text{'}\sum_{\omega(\Omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{\tau}_\omega}.t = \emptyset : \sum_{\omega(\Omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{\tau}_\omega} = \emptyset\text{'}$$

Как обычно, $V_t = (V(\hat{t}) - V(t))/(\hat{t} - t)$. Конкатенация с переменной t здесь и далее означает осреднение соответствующей конструкции по временному отрезку $[t, \hat{t}]$. В частности, это может быть линейная интерполяция, например,

$$\vec{u}.t = \vec{u}^{(\delta.m)} = \delta.m\,\vec{u}(\hat{t}) + (1-\delta.m)\,\vec{u}(t), \quad \emptyset \le \delta.m \le 1$$

Тангенциальная и нормальная составляющие вектора $\delta\vec{z}$ теперь определяются по формулам:

$$\delta\vec{z}.\tau.t = \delta\vec{z}' - (\delta\vec{z}, \vec{n}.t)\vec{n}.t : \vec{n}.t'$$

$$\delta\vec{z}.n.t = \delta\vec{z} - \delta\vec{z}.\tau.t$$

§ 3.2. Введем оператор $DIV.t : (\omega) \to (\Omega)$ по формуле:

$$DIV.t\,\delta\vec{z} = V.t^{-1} \sum_{\omega(\Omega)} \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t, \delta\vec{z}\right)_\omega$$

Оператор $GRAD.t : (\Omega) \to (\omega)$ определим из тождества:

$$\sum_{\omega} ((GRAD.t\,P, \delta\vec{z})\,\upsilon.t)_\omega + \sum_{\Omega} P_\Omega \sum_{\omega(\Omega)} \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t, \delta\vec{z}\right)_\omega =$$

$$\{\sum_{\partial\omega} P_{\partial\omega} \left(\sum_{V(\partial\omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t, \delta\vec{z}_{\partial\omega}\right) \mid -\sum_{\partial\sigma} P.\partial\sigma \sum_{\partial\omega(\partial\sigma)} \left(\frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial \vec{z}}.t, \delta\vec{z}\right)_{\partial\omega}\}$$

$$GRAD.t\,P = -\upsilon.t^{-1} \left(\sum_{\Omega(\omega)} \left(P \frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t\right)_\Omega + \{-P_{\partial\omega} \sum_{V(\partial\omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t \mid \right.$$

$$\left. \sum_{\partial\sigma(\partial\omega)} P.\partial\sigma \frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial \vec{z}}.t\}\right)$$

§ 3.3. Аналогично § 2.5. преобразуем выражение для изменения гравитационной энергии

$$\frac{1}{2}((\Phi, M/V)_\Omega)_t = -\sum_{\varphi} D_g.\varphi.t\,V^g.\varphi.t +$$

$$\frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma \begin{vmatrix} \Phi.\partial\sigma^{(\emptyset.5)} & (g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma))^{(\emptyset.5)} \\ \Phi.\partial\sigma_t & (g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma))_t \end{vmatrix} + \sum_{\Omega} (\Xi_t \Phi^{(\emptyset.5)} M_\emptyset)_\Omega$$

$$D_g.\varphi.t = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)} \frac{\Delta\hat{\Phi}(\sigma)\Delta\Phi(\sigma') + \Delta\Phi(\sigma)\Delta\hat{\Phi}(\sigma')}{2(h'(\sigma)h'(\sigma')).t} (t^g_{u(-1/2)}.\varphi.t)_{\sigma\sigma'}$$

$$(t^{g}_{u(-1/2)}.\varphi.t)_{\sigma\sigma'} = -\frac{(h'(\sigma)h'(\sigma')).t}{2V^{g}_{.}\varphi.t}\left(\frac{Gr.\varphi(\sigma,\sigma')}{h'(\sigma)h'(\sigma')}V.\varphi\right)_t$$

$$(h'(\sigma)h'(\sigma')).t = (h'(\sigma')h'(\sigma)).t$$

Величины $(t^{g}_{u(-1/2)}.\varphi.t)_{\sigma\sigma'}$ и

$$(t^{g}_{u}.\varphi.t)_{\sigma\sigma'} = -\frac{(h'(\sigma)h'(\sigma')).t}{2V^{g}_{.}\varphi.t}V.\varphi^{(\delta^{g}_{.}u)}\left(\frac{Gr.\varphi(\sigma,\sigma')}{h'(\sigma)h'(\sigma')}\right)_t, \quad \emptyset \le \delta^{g}_{.}u \le 1$$

аппроксимируют на сетке $(\sigma).(\varphi)$ ковариантный тензор $(t_u - 1/2\,tr(t_u)\delta)_{\sigma\sigma'}$ и ковариантный симметризованный тензор скоростей деформаций $(t_u)_{\sigma\sigma'}$ соответственно.

§ 3.3.I. Так же как и в § 2.5.I. определим оператор $-DIT.t_g.t:(\sigma)\to(\omega)$, аппрокоимирующий отнормированную на объем гравитационную силу $-div\,t_g$, из тождества:

$$\sum_{\varphi} D_g.\varphi.t\,V^{g}_{.}\varphi.t + \sum_{\omega}((\vec{z}_t, DIT.t_g.t)\,\upsilon^{g}_{.}t)_{\omega} = \sum_{\partial\omega}(\vec{z}_t, \vec{f}_{\partial g}.t)_{\partial\omega}$$

собирая множители при $\vec{z}_t$ в узлах (ω).

§ 3.4. Аналогично § 2.7. уравнения Максвелла запишутся в форме:

$$(h'\vec{s})_t = -(\vec{s}\,ROD\,\vec{e}..t')^{(\delta.k)}, \quad e'..t = Gm_{x\tau}\overline{ROG\,\vec{k}..t}$$

$$\hat{\vec{k}}..t = \hat{h}'^{-1}(h'\bar{k})^{(\emptyset.5)}, \quad \bar{k}..t = h'^{-1}(h'\bar{k})^{(\emptyset.5)} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\emptyset \le \delta.k = const \le 1$$

Из первого из них следует $DIV\,\vec{k} = \emptyset$. Двойная конкатенция (.. t) здесь и далее означает, что переменная, идентификатор которой представлен в левой части, имеет смысл на слоях t и $\hat{t}$, однако эти два значения зависят, вообще говоря, от всего временного отрезка $[t, \hat{t}]$.

Из (I) с учетом (2) из § 2.6. получим

$$\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\sigma}(h'(\sigma)\bar{k}(\sigma))^{(\emptyset.5)}(k'(\sigma)s(\sigma))_t = -\left(\int_{\Theta} D\,dV\right)_{\Delta}..t^{(\delta.k)} - \left(\int_{\Sigma}\vec{q}\,d\vec{s}\right)_{\Delta}..t^{(\delta.k)}$$

$$(\int_\Theta D\,dV)_\Delta..t=\frac{c^2}{4\pi}(Gm_{x\tau}\overline{ROG\vec{h}..t},\ \overline{ROG\vec{h}..t})_\lambda=\sum_\varphi D.\varphi..t\,V.\varphi\geq 0$$

$$\{D.\varphi..t=\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)}G\tau_{x\tau}!\varphi(\lambda,\lambda')e_1'..t(\lambda)e_1'..t(\lambda')\geq 0,\quad e_1'..t=G_\tau^{-1}\overline{ROG\vec{h}..t}$$

$$D.\varphi..t=\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\lambda(\varphi),\lambda'(\varphi)}G\tau_{x\tau}.\varphi(\lambda,\lambda')\overline{e_1}..t(\lambda)\overline{e_1}..t(\lambda')\geq 0,\quad \overline{e_1}..t=\overline{ROG\vec{h}..t}\ \}$$

$$(\int_\Sigma\vec{q}\,d\vec{s})_\Delta..t=-\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\partial\lambda}e'..t(\partial\lambda)h_\tau(\partial\lambda)(\vec{h}\,d\vec{\lambda})_\lambda(\partial\lambda)$$

Выражение для изменения магнитной энергии на сетке $(\sigma).(\varphi)$ для случая $Gm=G^{-1}$ имеет вид:

$$\frac{c^2}{8\pi}((G\hat{h}',\hat{h}')_\sigma)_t=\sum_\varphi D_h.\varphi.t\,V^h!\varphi.t-(\int_\Theta D\,dV)_\Delta..t^{(\delta:h)}-(\int_\Sigma\vec{q}\,d\vec{s})_\Delta..t^{(\delta:h)}$$

$$D_h.\varphi.t=\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)}\frac{\hat{h}'(\sigma)\hat{s}(\sigma)h'(\sigma')s(\sigma')+h'(\sigma)s(\sigma)\hat{h}'(\sigma')\hat{s}(\sigma')}{2(s(\sigma)s(\sigma')).t}(t^h_{u(-1/2)}.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}$$

$$(t^h_{u(-1/2)}.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}=\frac{(s(\sigma)s(\sigma')).t}{2V^h.\varphi.t}\left(\frac{h!\varphi(\sigma)h!\varphi(\sigma')G\tau!\varphi(\sigma,\sigma')}{V.\varphi}\right)_t$$

$$(s(\sigma)s(\sigma')).t=(s(\sigma')s(\sigma)).t$$

Величины $(t^h_{u(-1/2)}.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}$ и

$$(t^h_u.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}=\frac{(s(\sigma)s(\sigma')).t}{2V^h.\varphi.t}\left(\frac{1}{V.\varphi}\right)^{(\delta^h u)}(h.\varphi(\sigma)h!\varphi(\sigma')G\tau!\varphi(\sigma,\sigma'))_t$$

$$0\leq\delta^h!u\leq 1$$

аппроксимируют на сетке $(\sigma).(\varphi)$ контравариантный тензор $(t_u-1/2\,tr(t_u)\delta)^{\sigma\sigma'}$ и контравариантный симметризованный тензор скоростей деформаций $(t_u)^{\sigma\sigma'}$ соответственно.

§ 3.4.I. Так же как и в § 2.7.I. определим оператор $DIT.t_h.t:(\sigma)\to(\omega)$, аппроксимирующий отнормированную на объем силу Лоренца $div\,t_h$, из тождества:

$$\sum_\varphi D_h.\varphi.t\,V^h!\varphi.t+\sum_\omega((\vec{z}_t,DIT.t_h.t)v^h!t)_\omega=\sum_{\partial\omega}(\vec{z}_t,\vec{f}_{\partial h}.t)_{\partial\omega}$$

собирая множители при $\vec{z}_t$ в узлах (ω).

§ 3.5. В базисе $\varphi \in \Omega$ введем вязкую диссипативную функцию

$$D_v.\varphi.t=\sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)}(t_v.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}(t_u.\varphi.t)_{\sigma\sigma'}$$

$$(t_u.\varphi.t)_{\sigma\sigma'}=\{(t_u^{g}.\varphi.t)_{\sigma\sigma'} \mid \sum_{\sigma''(\varphi),\sigma'''(\varphi)} Gr.\varphi.t(\sigma,\sigma'')\,Gr.\varphi.t(\sigma',\sigma''')(t_u^{g}.\varphi.t)^{\sigma''\sigma'''}\}$$

$$Gr.\varphi.t(\sigma,\sigma')=(\vec{e}.t(\sigma),\vec{e}.t(\sigma'))$$

Величина $(t_v.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}$ аппроксимирует контравариантный вязкий тензор $(t_v)^{\sigma\sigma'}$ на сетке $(\sigma).(\varphi)$.

Аналогично § 2.8. определим оператор $DIT.t_v.t:(\sigma)\to(\omega)$, аппроксимирующий отнормированную на объем вязкую силу $div\,t_v$, из тождества:

$$\sum_{\varphi} D_v.\varphi.t\, V^{\dot v}.\varphi.t+\sum_{\omega}((\vec{r}_t, DIT.t_v.t)v^{\dot v}.t)_{\omega}=\sum_{\partial\omega}(\vec{r}_t,\vec{f}_{\partial v}.t)^{\circ}_{\partial\omega}$$

собирая множители при $\vec{r}_t$ в узлах (ω).

Положим теперь

$$(t_v.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}=2\mu.\varphi.t((t_u.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}-\frac{1}{3}tr(t_u.\varphi.t)Gr^{!}.\varphi.t(\sigma,\sigma'))+$$

$$\gamma.\varphi.t\;tr(t_u.\varphi.t)Gr^{!}.\varphi.t(\sigma,\sigma')$$

$$(t_u.\varphi.t)^{\sigma\sigma'}=\sum_{\sigma''(\varphi),\sigma'''(\varphi)} Gr^{!}.\varphi.t(\sigma,\sigma'')Gr^{!}.\varphi.t(\sigma',\sigma''')(t_u.\varphi.t)_{\sigma''\sigma'''}$$

$$tr(t_u.\varphi.t)=\sum_{\sigma(\varphi),\sigma'(\varphi)} Gr^{!}.\varphi.t(\sigma,\sigma')(t_u.\varphi.t)_{\sigma\sigma'}$$

$$Gr^{!}.\varphi.t=Gr.\varphi.t^{-1}$$

на сетке $(\sigma).(\varphi)$. Очевидно, что при такой аппроксимации вязкого тензора $D_v.\varphi.t \geq \emptyset$. Нетрудно видеть также, что $tr(t_v.\varphi.t)=3\gamma.\varphi.t\;tr(t_u.\varphi.t)$ на сетке $(\sigma).(\varphi)$.

§ 3.6. **Выпишем полностью консервативную разностную схему.**

Поскольку $m_\psi = m_\psi^{\,T} > \emptyset$, то матрицу, представляющую тензорную массу m_ψ в узле ω, без ущерба для общности можно считать в дальнейшем диагональной с положительными собственными значениями $m_{\psi f}$, расположенными на диагонали, а $\vec{f}_\psi$ – базисом из соответствующих ортонормированных собственных векторов, направленных вдоль главных осей тензора m_ψ. Т.е. $(m_\psi)_{ff'}=$

$m_{\psi f}\delta_f^{f'}$. Кроме того матрица $\hat{m}_\psi$ в базисе $\vec{f}_\psi$ является симметричной и положительно определенной. Положим теперь

$$\vec{u}.t = \vec{z}_t$$

$$\vec{u}.t = \sum_f u_f^{(\delta.f)}\vec{f}_\psi, \quad u_f = (\vec{u}, \vec{f}_\psi), \quad \hat{u}_f = (\vec{\hat{u}}, \vec{f}_\psi)$$

$$\delta.f = (\hat{m}_\psi)_{ff}^{0.5} / ((\hat{m}_\psi)_{ff}^{0.5} + m_{\psi f}^{0.5})$$

Баланс объема имеет вид:

$$V_t = V.t\,DIV.t\,\vec{u}.t$$

при этом справедливо

$$(\sum_\Omega V_\Omega)_t = \sum_{\partial\omega}(\sum_{V(\partial\omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t, \vec{u}.t_{\partial\omega})$$

Баланс импульса имеет вид:

$$(m_\psi^u\vec{u})_t = -v.t\,GRAD.t\,P.t - v^g.t\,DIT.t_g.t + v^k.t\,DIT.t_k.t + v^v.t\,DIT.t_v.t +$$

$$(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_G).t + \vec{f}.t + \vec{f}_n.t$$

$$m_\psi^u = m_\psi, \quad (\hat{m}_\psi^u)_{ff'} = \mu_{ff'}^u(\hat{m}_\psi)_{ff'}$$

$$\mu_{ff'}^u = u_f^{(\delta.ff')}/u_f^{(\delta.f)} = \begin{cases} 1, & f = f' \\ \hat{u}_f/u_f^{(\delta.f)}, & f \neq f' \end{cases}$$

$$\delta.ff' = (\hat{m}_\psi)_{ff'}^{0.5}/((\hat{m}_\psi)_{ff'}^{0.5} + (m_\psi)_{ff'}^{0.5}) = \begin{cases} \delta.f, & f = f' \\ 1, & f \neq f' \end{cases}$$

$$(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_G).t = \sum_{f,f'}((m_\psi^u)_t)_{ff'}u_{Gf'}^{(\delta.ff')}\vec{f}_\psi$$

$$u_{Gf} = (\vec{u}_G, \vec{f}_\psi), \quad \hat{u}_{Gf} = (\vec{\hat{u}}_G, \vec{f}_\psi)$$

или

$$((\overset{\downarrow}{m}{}_\psi^u\overset{\downarrow}{\vec{u}}).\tau.t)_t = (-v.t\,GRAD.t\,P.t - v^g.t\,DIT.t_g.t + v^k.t\,DIT.t_k.t + v^v.t\,DIT.t_v.t +$$

$$(\frac{dm_\psi}{dt}u_G).t + \vec{f}.t).\tau.t\ , \quad \vec{f}_n.t.\tau.t = 0$$

при этом справедливо

$$(\sum_\omega((\overset{\downarrow}{m}{}_\psi^u\overset{\downarrow}{\vec{u}}).\tau.t)_\omega)_t = \sum_\Omega P.t_\Omega \sum_{\omega(\Omega)} \frac{\partial V}{\partial \vec{z}_\omega}.t.\tau.t -$$

$$\{\sum_{\partial\omega} P.t_{\partial\omega}(\sum_{V(\partial\omega)}\frac{\partial V}{\partial \vec{z}}.t).\tau.t| - \sum_{\partial G} P.\partial G.t \sum_{\partial\omega(\partial G)} \frac{\partial V.\partial G}{\partial \vec{z}_{\partial\omega}}.t.\tau.t\} +$$

$$\sum_\omega((-v^g.t\,DIT.t_g.t + v^k.t\,DIT.t_k.t + v^v.t\,DIT.t_v.t + (\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_G).t + \vec{f}.t).\tau.t)_\omega$$

Если u_f и $\hat{u}_f$ обращаются в нуль одновременно, то следует считать $\mu_{ff'}=1$. Кроме того, если ${}'\sum_{f'}(\hat{m}_\psi)_{ff'}\hat{u}_{f'}=\emptyset : f'\neq f'$ или ${}'\sum_{f'}(\hat{m}_\psi)_{ff'}\hat{u}_{Gf'}=\emptyset : f'\neq f'$, то следует положить $\mu_{ff'}=1$ в выражениях $(m_\psi^u\vec{u})_t$ или $(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_G).t$ соответственно. Если тензоры $t^g_{u(-1/2)}.\varphi.t$, $t^k_{u(-1/2)}.\varphi.t$, $t_u.\varphi.t$ обращаются в нуль при любом движении $\vec{r}_t=const$, то величина $\sum_\omega(-v^g{:}tDIT.t_g.t+v^k{:}tDIT.t_k.t+v^v{:}tDIT.t_v.t)_\omega$ сводится к суммированию лишь по граничным узлам $(\partial\omega)$. Баланс внутренней энергии имеет вид:

$$(ME)_t=-P.tV_t+V^{(\delta.k)}D.t+V^v{:}tD_v.t+Q.t$$

$$D.t=(V^{(\delta.k)})^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)}(D.\varphi.tV.\varphi)^{(\delta.k)},\quad D_v.t=V^v{:}t^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)}D_v.\varphi.tV^v{:}\varphi.t$$

при этом справедливо

$$(\sum_\Omega(ME)_\Omega)_t=\sum_\Omega(-P.tV.tDIV.t\vec{u}.t+V^{(\delta.k)}D.t+V^v{:}tD_v.t+Q.t)_\Omega$$

Баланс кинетической энергии имеет вид:

$$(m\mathcal{E}_K)_t=(\vec{u}.t,-v.tGRAD.tP.t-v^g{:}tDIT.t_g.t+v^k{:}tDIT.t_k.t+v^v{:}tDIT.t_v.t)-$$
$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_G),(\vec{u}-\vec{u}_G)).t+(\vec{u}.t,(\vec{f}.t+\vec{f}_n.t))$$

$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_G),(\vec{u}-\vec{u}_G)).t=\frac{1}{2}\sum_{f,f'}((m_\psi)_t)_{ff'}(u_f-u_{Gf})^{(\delta.ff')}(u_{f'}-u_{Gf'})^{(\delta.ff')}$$

или, на всей сетке,

$$(\sum_\omega(m\mathcal{E}_K)_\omega)_t=\sum_\omega((\vec{u}.t,-v.tGRAD.tP.t-v^g{:}tDIT.t_g.t+v^k{:}tDIT.t_k.t+v^v{:}tDIT.t_v.t)-$$
$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_G),(\vec{u}-\vec{u}_G)).t+(\vec{u}.t,(\vec{f}.t+\vec{f}_n.t)))_\omega$$

Мы воспользовались тождествами

$$(\vec{u}.t,(m_\psi^u\vec{u})_t)=\frac{1}{2}(m_\psi\vec{u},\vec{u})_t+\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u},\vec{u}).t$$

$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u},\vec{u}).t=\frac{1}{2}\sum_{f,f'}((m_\psi)_t)_{ff'}u_f^{(\delta.ff')}u_{f'}^{(\delta.ff')}$$

$$((m_\psi)_{ff'}u_f)^{(1-\delta.ff')}=(m_\psi)_{ff'}^{(1-\delta.ff')}u_f^{(\delta.ff')}$$

здесь по определению

$$(m\mathcal{E}_K)_t=\frac{1}{2}(m_\psi\vec{u},\vec{u})_t-\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_G,\vec{u}_G).t$$

$$\frac{1}{2}(\frac{dm_\psi}{dt}\vec{u}_G,\vec{u}_G).t=\frac{1}{2}\sum_{f,f'}((m_\psi)_t)_{ff'}u_{Gf}^{(\delta.ff')}u_{Gf'}^{(\delta.ff')}$$

Баланс гравитационной энергии имеет вид:

$$\frac{1}{2}(M\Phi)_t = -V^g.t\,D_g.t + \frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\sigma(\Omega)} sign.\sigma(\Omega)\begin{vmatrix} \Phi.\sigma^{(0.5)} & (g'(\sigma)s(\sigma))^{(0.5)} \\ \Phi.\sigma_t & (g'(\sigma)s(\sigma))_t \end{vmatrix} + M_t\Phi^{(0.5)}$$

$$D_g.t = V^g.t^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)} D_g.\varphi.t\,V^g.\varphi.t$$

при этом справедливо

$$\frac{1}{2}((\Phi, M/V)_\Omega)_t = -\sum_\Omega (V^g.t\,D_g.t)_\Omega + \frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\begin{vmatrix} \Phi.\partial\sigma^{(0.5)} & (g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma))^{(0.5)} \\ \Phi.\partial\sigma_t & (g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma))_t \end{vmatrix} + \sum_\Omega (M_t\Phi^{(0.5)})_\Omega$$

Баланс магнитной энергии имеет вид:

$$\frac{c^2}{8\pi}\Big(\sum_{\varphi(\Omega)} h^2.\varphi V.\varphi\Big)_t = V^h.t\,D_h.t - V^{(0.h)}D.t - (VDIV\vec{q}..t)^{(0.h)}$$

или, на всей сетке,

$$\frac{c^2}{8\pi}((Gh', h')_\sigma)_t = \sum_\Omega (V^h.t\,D_h.t - V^{(0.h)}D.t)_\Omega + \frac{c^2}{4\pi}\sum_{\partial\Omega}(e'..t(\partial\Omega)h_\tau(\partial\Omega)(\vec{h}d\vec{h})_\Sigma(\partial\Omega))^{(0.h)}$$

Здесь

$$D_h.t = V^h.t^{-1}\sum_{\varphi(\Omega)} D_h.\varphi.t\,V^h.\varphi.t$$

Напомним, что

$$\Big(\int_\Sigma \vec{q}\,d\vec{s}\Big)_\Delta..t = \sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\, q'..t(\partial\sigma)s(\partial\sigma) = (DIV\vec{q}..t, 1)_\Omega$$

$$q'..t(\partial\sigma) = \frac{c^2}{4\pi}s(\partial\sigma)^{-1}\sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)}\ \sum_{\partial\Omega(\partial\varphi)} \frac{sign.\partial\Omega(\partial\varphi)s.\partial\varphi}{\sqrt{det\|G\tau_\Sigma.\partial\varphi\|}}\, e'..t(\partial\Omega)h.\tau'(\partial\Omega') : \partial\Omega'(\partial\varphi) \neq \partial\Omega'$$

Под величинами $q'..t(\sigma)$ и $\hat{q}'..t(\sigma)$ при $\sigma \in (\sigma)\setminus(\partial\sigma)$ понимаются некоторые ковариантные представления вектора Пойтинга $\vec{q} = \frac{c^2}{4\pi}(\vec{e}\times\vec{h})$ на внутренних гранях сетки на слоях t и $\hat{t}$. Уравнение баланса полной энергии запишется в виде:

$$\Big(\sum_\Omega (ME)_\Omega + \sum_\omega (m\varepsilon_k)_\omega + \frac{1}{2}(\Phi, M/V)_\Omega + \frac{c^2}{8\pi}(Gh', h')_\sigma\Big)_t =$$

$$-\Big\{\sum_{\partial\omega} p.t_{\partial\omega}\Big(\sum_{V(\partial\omega)}\frac{\partial V}{\partial\vec{z}}.t, \vec{u}.t_{\partial\omega}\Big) \Big| -\sum_{\partial\sigma} P.\partial\sigma.t\sum_{\partial\omega(\partial\sigma)}\Big(\frac{\partial V.\partial\sigma}{\partial\vec{z}}.t, \vec{u}.t\Big)_{\partial\omega}\Big\} +$$

$$\sum_{\partial\omega}(\vec{u}.t, (-\vec{f}_{\partial g}.t + \vec{f}_{\partial h}.t + \vec{f}_{\partial v}.t))_{\partial\omega} +$$

$$\frac{1}{8\pi\gamma}\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\begin{vmatrix} \Phi.\partial\sigma^{(0.5)} & (g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma))^{(0.5)} \\ \Phi.\partial\sigma_t & (g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma))_t \end{vmatrix} +$$

$$\frac{c^2}{4\pi}\sum_{\partial\Omega}(e'..t(\partial\Omega)h_\tau(\partial\Omega)(\vec{h}d\vec{h})_\Sigma(\partial\Omega))^{(0.h)} +$$

$$\sum_{\Omega}\Big(-\frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)}\Big(\Big(\frac{dM_\psi.\omega}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_G),(\vec{u}-\vec{u}_G)\Big).t\Big)_\omega + M_t\,\Phi^{(0.5)} + Q.t\Big)_\Omega +$$

$$\sum_{\omega}(\vec{u}.t,(\vec{f}.t+\vec{f}_n.t))_\omega$$

Здесь

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{dM_\psi.\omega}{dt}(\vec{u}-\vec{u}_G),(\vec{u}-\vec{u}_G)\Big).t = \frac{1}{2}\sum_{\xi,\xi'}((M_\psi.\omega)_t)_{\xi\xi'}(u_\xi-u_{G\xi})^{(\delta.\xi\xi')}(u_{\xi'}-u_{G\xi'})^{(\delta.\xi\xi')}$$

Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$DIV\,\vec{g} = -4\pi\gamma M/V, \quad \vec{g} = -\overline{GRAD\,\Phi}$$

или, на всей сетке,

$$\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\, g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma) = -4\pi\gamma\sum_{\Omega} M_\Omega$$

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в магнитогидродинамическом приближении имеют вид:

$$(h's)_t = -(s\,ROD\,\vec{e}..t')^{(\delta.h)}, \quad e'..t = Gm_{\chi\tau}\overline{ROG\,\vec{h}..t}$$

Из первого из них следует $DIV\,\vec{h}=\emptyset$ или, на всей сетке,

$$\sum_{\partial\sigma} sign.\partial\sigma\, h'(\partial\sigma)s(\partial\sigma)=\emptyset$$

Кроме того, суммируя по ориентированной поверхности (σ) с набором приграничных граней $(\sigma_\partial)\subset(\sigma)$, получим

$$\Big(\sum_{\sigma} sign.\sigma\, h'(\sigma)s(\sigma)\Big)_t = -\sum_{\sigma\in(\sigma_\partial)} sign.\sigma \sum_{\lambda(\sigma)\in(\lambda_\partial)} sign.\lambda(\sigma)(e'..t(\lambda)h_\tau(\lambda)))^{(\delta.h)}$$

(λ_∂) – здесь множество граничных ребер, образующих искомую поверхность. Величина $sign.\sigma$ определяется также как и $sign.\partial\sigma$. Пусть теперь ориентированная поверхность пронизывается множеством ребер (λ) , среди которых набор $(\lambda_\partial)\subset(\lambda)$ – приграничный, и $Gm_{\chi\tau}>\emptyset$, тогда второе уравнение Максвелла запишется в виде:

$$\sum_{\lambda} sign.\lambda\, s_\tau'(\lambda)Gm_{\chi\tau}^{-1}e'..t(\lambda) = \sum_{\lambda\in(\lambda_\partial)} sign.\lambda\Big(\sum_{\sigma(\lambda)\in(\sigma_\partial)} sign.\sigma(\lambda)\vec{h}..t(\sigma)h'(\sigma)+(\vec{h}d\vec{h})_\tau(\partial\lambda)\Big)$$

$sign.\{\sigma|\lambda\} = \{$'+: < нормаль внешняя >'|

'−: < нормаль внутренняя >'$\}$;

(σ_∂) – здесь множество приграничных граней, пересекающих искомую поверхность.

Полученное семейство полностью консервативных разностных схем для уравнений механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов пригодно для любой системы координат, сеток квазирегулярной структуры и любого количества пространственных измерений. Отметим также, что указанный подход без труда обобщается на случай системы источников масс с разными $\vec{u}_\sigma$.

Литература.

1. Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Некоторые задачи газовой динамики при наличии источников. ЖВМ и МФ, 1978, № 4, с. 1048 - 1056.
2. Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. ТИКОН. Пакет программ для решения тепловых задач. ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, препринт № 65, 1978, Москва.
3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, Наука, 1980.
4. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Дифференциальные уравнения. т. 17, № 7, с. 1317 - 1321, 1981, Минск.
5. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для задач газовой динамики при наличии источников массы. ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, препринт № 160, 1982, Москва.
6. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об аппроксимации процессов переноса на неортогональных сетках. ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, препринт № 66, 1984, Москва.
7. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об аппроксимации дифференциальных операторов на неортогональных сетках. Дифференциальные уравнения, т. XIX, № 7, с. 1235 - 1245, Минск.