

39



ПРЕПР
П-51

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

В.М. Головинин, М.А. Рязанов, А.А. Самарский,
С.Ю. Чернов

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ СЕТКАХ

Препринт № 39 за 1985 г.

Москва

А Н Н О Т А Ц И Я

На основе разработанного авторами общего метода построением консервативная разностная схема газовой динамики леровых переменных на криволинейных сетках для случаев плоской, так и осевой симметрии. Схема является трехслой- только по скорости и обладает первым порядком аппроксима- Допускается применение различных методов коррекции пото- при сохранении свойства полной консервативности. Рассчи- ряд задач обтекания, а также дифракции ударных волн на е.

ВВЕДЕНИЕ

В современной вычислительной математике проблемы, связанные с численным решением многомерных задач аэродинамики, являются одними из наиболее актуальных и острых. Это связано, прежде всего, с особенностями самих моделируемых течений, характеризующихся сильными сдвиговыми деформациями и наличием сложных пространственных структур взаимодействующих между собой ударных волн и контактных разрывов. Разностные схемы, предназначенные для решения таких задач, должны обладать способностью передавать тонкие особенности течений, резко изменяющихся во времени и пространстве, на реальных, т.е. достаточно "грубых" сетках.

Многочисленные расчеты одномерных и двумерных процессов эволюции конечных масс газа в лагранжевых переменных показали, что отмеченным требованиям удовлетворяют полностью консервативные разностные схемы (п.к.р.с.) [1,2], отличительной особенностью которых является дополнительное по отношению к основным законам сохранения соблюдение баланса между различными видами энергии. Однако, из-за быстрого развития в наиболее типичных задачах аэродинамики значительных сдвиговых деформаций, использование п.к.р.с. в лагранжевых переменных сказывается здесь, по существу, невозможным.

Задача построения п.к.р.с. газовой динамики в эйлеровых переменных принципиально усложняется из-за наличия в уравнениях конвективных потоков. Для достижения полной консервативности конвективные члены в уравнениях необходимо аппроксимировать согласованным образом, чтобы при выполнении всех основных законов сохранения не возникало каких-либо дополнительных источников энтропии.

В работе [3] методом неопределенных коэффициентов впервые построена одномерная трехслойная п.к.р.с. в эйлеровых переменных и доказана теорема о несуществовании двухслойных п.к.р.с. Построенная схема, имеющая второй порядок аппроксимации по пространству симметричными разностями и дополнительную искусственную вязкость, была использована для расчета разрывных решений в квазиодномерной постановке [21]. Формально методика обобщается на многомерный случай, что при параллельном и независимом исследовании было сделано в [4]. Однако про-

верка свойств таких схем ограничилась одномерными изотермическими модельными расчетами.

На основе операторного подхода в [5] получены полностью консервативные схемы, дифференциальные по времени и разностные по пространству. Данный подход также приводит к симметричной аппроксимации конвективных производных. Кроме того, открытым остается вопрос о согласованной дискретизации получаемых уравнений по времени.

В работах [6,7] предложен общий метод построения п.к.р. с. в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, основанный на так называемой "каскадной" форме записи уравнений газовой динамики. Он позволяет получать на произвольных криволинейных сетках схемы различного типа и порядка аппроксимации.

Следует отметить, что идея "каскадной" формы записи появилась в результате критического анализа операторного подхода [5] и в соответствии с этим может рассматриваться как дальнейшее его развитие.

В настоящей работе разработанный метод применяется для построения полностью консервативной разностной схемы в эйлеровых переменных на произвольной криволинейной сетке в случае как плоской, так и осевой симметрии. Эта схема является частично-трехслойной (только по скорости) и обладает первым порядком аппроксимации по пространству (типа "вверх по потоку"), но допускает применение различных алгоритмов коррекции потоков, в том числе нелинейные аппроксимации [12, 13].

Свойства новой методики исследуются при расчетах ряда задач обтекания, а также дифракции ударных волн на тупых углах.

Авторы благодарят Б.П.Герасимова, С.А.Семущина и А.Б.Карагичева за полезные обсуждения и ряд ценных советов.

§ I. "Каскадная" форма записи уравнений газовой динамики.

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho (\vec{U} \vec{U}) = -\operatorname{grad} P^* + 2 \operatorname{div} \mu \mathcal{D}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \varepsilon \vec{U} = -\rho^* \operatorname{div} \vec{U} + 2\mu \mathcal{D}^2, \quad (3)$$

$$\rho = \rho(\rho, \varepsilon); \quad (4)$$

$$\{x, y\} \in G$$

Здесь: $\{x, y\} = \vec{r}$ - декартовы либо цилиндрические координаты, G - двумерная область с границей Γ на плоскости (x, y) ; $\operatorname{div} \vec{U} = \frac{1}{x^{l-1}} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} x^{l-1}$, $\operatorname{grad} = \vec{\nabla}$; $l = 1, 2$ - индекс плоской либо аксиальной симметрии; $\vec{U} = \{u, v\}$ - скорость, ρ - плотность, ε - удельная внутренняя энергия, P - давление,

$$\rho^* = \rho - \left(\xi - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \vec{U},$$

\mathcal{D} - тензор скоростей деформаций: $\mathcal{D}_{xx} = \partial u / \partial x$, $\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{yx} = 0.5(\partial v / \partial x + \partial u / \partial y)$, $\mathcal{D}_{yy} = \partial v / \partial y$; $(\vec{U} \vec{U})$ - мультипликативный тензор; μ и ξ - коэффициенты первой и второй (объемной) вязкости соответственно.

Из уравнений неразрывности (1) и импульса (2) вытекает соотношение баланса удельной кинетической энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho \vec{U}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \rho \vec{U}^2 \vec{U} = -\vec{U} \cdot \operatorname{grad} \rho^* + 2\vec{U} \cdot \operatorname{div} \mu \mathcal{D}, \quad (5)$$

которое вместе с (3) приводит к уравнению изменения удельной полной энергии $E = \varepsilon + \vec{U}^2/2$:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \rho E \vec{U} = -\operatorname{div} [(\rho^* - 2\mu \mathcal{D}) \cdot \vec{U}]. \quad (6)$$

Для построения согласованных аппроксимаций конвективных и временных производных представим (2) и (5) в так называемой "каскадной" форме [6]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{div} \rho (\vec{U} \vec{U}) + \frac{1}{2} \vec{U} \operatorname{div} \rho \vec{U} + \frac{1}{2} \rho \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \vec{U} = \\ & = -\operatorname{grad} \rho^* + 2 \operatorname{div} \mu \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (2')$$

$$\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{U} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \operatorname{div} \rho (\vec{U} \vec{U}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \vec{U} \cdot (\rho \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \vec{U}) = -\vec{U} \cdot \operatorname{grad} P^* + 2\vec{U} \cdot \operatorname{div} \mu \mathcal{D}, \quad (5')$$

где $\operatorname{grad} \vec{U}$ - дифференциальный тензор поля скоростей.

Умножим (I) на $-\vec{U}^2/2$, а (2') - скалярно на \vec{U} и затем сложим результаты. Тогда, как легко видеть, получается выражение баланса кинетической энергии в форме (5'). Складывая (5') с (3), мы приходим к уравнению изменения полной энергии, представленному также в "каскадной" форме:

$$\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{U} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \rho E}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \operatorname{div} \rho (\vec{U} \vec{U}) + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot (\rho \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \vec{U}) + \quad (6')$$

$$+ \operatorname{div} \rho E \vec{U} = -\vec{U} \cdot \operatorname{grad} P^* - P^* \operatorname{div} \vec{U} + 2\vec{U} \cdot \operatorname{div} \mu \mathcal{D} + 2\mu \mathcal{D} \cdot \operatorname{grad} \vec{U}.$$

Таким образом, благодаря специальному разбиению конвективных и временных производных каждое из уравнений (I), (2'), (3), (5'), (6'), не являющихся в совокупности независимыми, может быть получено как чисто алгебраическое следствие остальных (т.е. без использования операций дифференцирования). Следовательно, "каскадная" форма записи может служить основой для построения разностных схем, обладающих аналогичными свойствами.

Итак, разностную схему, аппроксимирующую (I)-(4), будем называть полностью консервативной [1,2], если для неё выполняются законы сохранения массы, импульса, полной энергии и баланс отдельных её видов - кинетической и внутренней, причем в уравнениях, выражающих эти законы, не содержатся дисбалансные (недивергентные) источники.

§ 2. Дискретизация области и физических величин.

Пусть геометрические свойства области G допускают существование взаимнооднозначного и достаточно гладкого её отображения $f: \{x, y\} \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ на некоторую регулярную область Ω произвольных криволинейных координат α ,

β так, что якобиан $J = J(x, y) = \partial(x, y) / \partial(\alpha, \beta) > 0$.

С использованием вектора нормали $\vec{s} = \{y, -x\}$ к радиусу-вектору \vec{r} операции div и $grad$ могут быть записаны так:

$$div \vec{\psi} = \frac{1}{x^{\ell-1}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\vec{\psi} \cdot x^{\ell-1} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \beta}) - \frac{\partial}{\partial \beta} (\vec{\psi} \cdot x^{\ell-1} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha}) \right], \quad (8)$$

$$grad \varphi = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha} \right), \quad (9)$$

или

$$div \vec{\psi} = \frac{1}{x^{\ell-1} J} \left[\frac{\partial \psi x^{\ell-1}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi x^{\ell-1}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha} \right], \quad (8')$$

$$grad \varphi = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\varphi \frac{\partial \vec{s}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\varphi \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (9')$$

В силу произвола в выборе области Ω , будем считать, что она представляет собой единичный квадрат (рис. I).

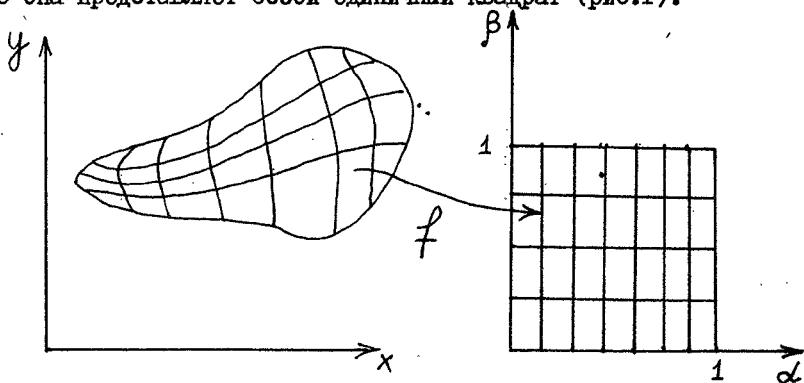


Рис. I.

Введем в Ω прямоугольную сетку: $\alpha_i = (i-1)h_\alpha$,
 $\beta_j = (j-1)h_\beta$, $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, M$.

Полученными индексами занумеруем центры ячеек: $i+1/2, j+1/2$,
а также их грани: $i+1/2, j$ - горизонтальные, $i, j+1/2$ -

вертикальные. При обратном отображении $f^{-1} : \alpha, \beta \rightarrow x, y$ образом прямоугольной сетки в Ω является криволинейная сетка в G . Заменяя каждый из криволинейных отрезков, соединяющих два соседних узла, отрезком прямой, получаем расчетную сетку в G_h с границей Γ_h - объединением внешних сторон приграничных ячеек.

Отвлекаясь от граничных условий, предположим, что G (а также Ω) совпадает со всей плоскостью, а все газодинамические функции имеют ограниченные носители.

Множество центров ячеек всей бесконечной сетки обозначим ω , узлов - $\bar{\omega}$, центров вертикальных граней - ω^+ , горизонтальных - ω^- (рис. 2), а пространства сеточных функций от этих аргументов - соответственно \mathcal{H}_ω , $\mathcal{H}_{\bar{\omega}}$, \mathcal{H}_{ω^+} , \mathcal{H}_{ω^-} .

Значения всех термодинамических величин, таких как ρ , P , ε и c (адиабатическая скорость звука), будем относить к центрам ячеек, а вектора скорости и координат - к узлам, т.е.: $\rho, \varepsilon \in \mathcal{H}_\omega$; $\vec{v}, \vec{r} \in \mathcal{H}_{\bar{\omega}}$ и т.д.

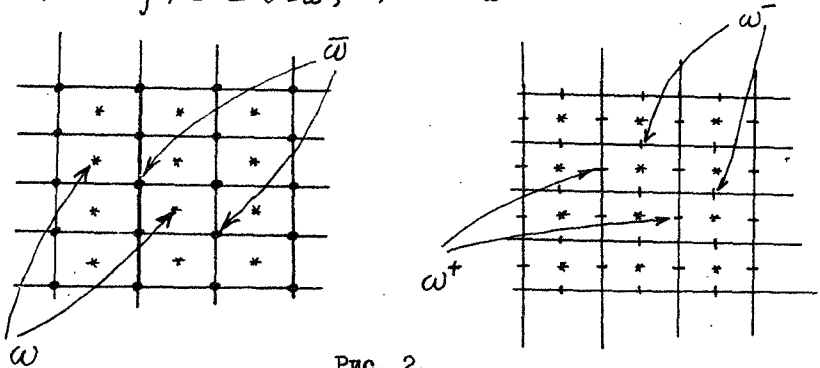


Рис. 2.

§ 3. Разностные аналоги дивергенции и градиента.

Как следует из рассуждений § 1, для построения полностью консервативной схемы достаточно перенести свойства "каскадной" формы записи с непрерывного на дискретный случай. Прежде всего, необходимо определить разностные аналоги операторов $\text{div } \vec{\Psi}$ и $\text{grad } \varphi$. Здесь потребуются следующие простейшие разности и усреднения на однородных по всей сетке

шаблонах:

$$\left\langle \frac{\partial \vec{S}_\omega}{\partial \alpha} \right\rangle_{\omega^-} = \frac{\delta_{i+1,j} - \delta_{ij}}{h_\alpha}; \quad \left\langle \frac{\partial \vec{S}_\omega}{\partial \beta} \right\rangle_{\omega^+} = \frac{\delta_{ij+1} - \delta_{ij}}{h_\beta}, \quad (I0)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi_{\omega^+}}{\partial \alpha} \right\rangle_{\omega} = \frac{\Psi_{i+1,j+1/2} - \Psi_{ij+1/2}}{h_\alpha}; \quad - \left\langle \frac{\partial \Psi_{\omega^+}}{\partial \alpha} \right\rangle_{\omega^+}^* = - \frac{\Psi_{i+1/2,j+1/2} - \Psi_{i+1/2,j}}{h_\alpha}, \quad (II)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi_{\omega^-}}{\partial \beta} \right\rangle_{\omega} = \frac{\Psi_{i+1/2,j+1} - \Psi_{i+1/2,j}}{h_\beta}; \quad - \left\langle \frac{\partial \Psi_{\omega^-}}{\partial \beta} \right\rangle_{\omega^-}^* = - \frac{\Psi_{i+1/2,j+1/2} - \Psi_{i+1/2,j+1}}{h_\beta} \quad (I2)$$

$$\langle \Psi_{\omega^-} \rangle_{\omega} = \frac{1}{4} \sum_{k,n=0,1} \Psi_{i+k,j+n}; \quad \langle \Psi_{\omega^-} \rangle_{\omega^-}^* = \frac{1}{4} \sum_{k,n=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Psi_{i+k,j+n}, \quad (I3)$$

$$\langle \Psi_{\omega^-} \rangle_{\omega^-} = \frac{1}{2} (\Psi_{ij} + \Psi_{i+1,j}), \quad \langle \Psi_{\omega^-} \rangle_{\omega^-}^* = \frac{1}{2} (\Psi_{i+1/2,j} - \Psi_{i-1/2,j}), \quad (I4)$$

$$\langle \Psi_{\omega^+} \rangle_{\omega^+} = \frac{1}{2} (\Psi_{ij} + \Psi_{ij+1}), \quad \langle \Psi_{\omega^+} \rangle_{\omega^+}^* = \frac{1}{2} (\Psi_{ij+1/2} - \Psi_{ij-1/2}) \quad (I5)$$

Используя введенные операторы, аппроксимируем

(8) на шаблоне Π_0 (рис. 3а); получим:

$$\mathcal{D}I \mathcal{V}_\omega \vec{\Psi}_\omega = \frac{1}{V_\omega} (\vec{\Psi}_{01} \cdot \vec{S}_{01} + \vec{\Psi}_{12} \cdot \vec{S}_{12} + \vec{\Psi}_{23} \cdot \vec{S}_{23} + \vec{\Psi}_{03} \cdot \vec{S}_{03}), \quad (I6)$$

где $V_\omega \equiv J_\omega(x, y) = \frac{1}{2\ell} [(x_1^\ell - x_3^\ell)(y_2 - y_0) - (x_2^\ell - x_0^\ell)(y_1 - y_3)]$.объем ячейки; \vec{S}_{01} - вектор внешней нормали к нижней грани ячейки, по модулю равный её площади: $\vec{S}_{01} = x_{01}^{\ell-1} (\vec{s}_1 - \vec{s}_0)$,

$$x_{01}^{\ell-1} = \langle x_{\omega}^{\ell-1} \rangle_{01} = \frac{1}{2} (x_0^{\ell-1} + x_1^{\ell-1}), \quad \vec{\Psi}_{01} = \langle \vec{\Psi}_\omega \rangle_{01}$$

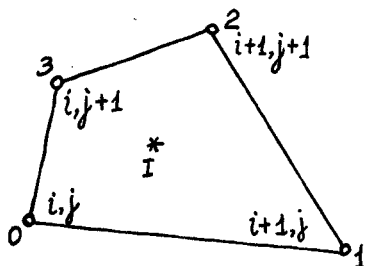


Рис. 3 а.

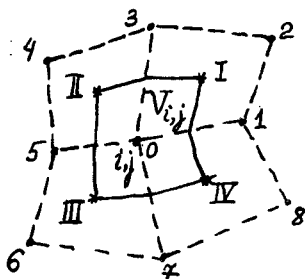


Рис. 3 б.

Далее, с помощью тех же выражений (10)-(15) проведем аппроксимацию градиента (9) в узле (i, j) :

$$\begin{aligned} \text{GRAD}_{\bar{\omega}} \varphi_{\omega} = & \left\{ \varphi_I [X_{03}^{\ell-1} (\vec{\beta}_3 - \vec{\beta}_0) - X_{01}^{\ell-1} (\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_0)] + \right. \\ & + \varphi_{II} [X_{03}^{\ell-1} (\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_3) - X_{05}^{\ell-1} (\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_5)] + \\ & + \varphi_{III} [X_{05}^{\ell-1} (\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_5) - X_{07}^{\ell-1} (\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_7)] + \\ & \left. + \varphi_{IV} [X_{07}^{\ell-1} (\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_7) - X_{01}^{\ell-1} (\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_1)] \right\} / 2V_{\bar{\omega}} \end{aligned} \quad (17)$$

где $V_{\bar{\omega}} = \langle V_{\bar{\omega}} \rangle_{\bar{\omega}}$.

Нетрудно показать, что построенные разностные операторы удовлетворяют условию сопряженности:

$$\sum_{\bar{\omega}} \varphi_{\omega} \cdot \text{DIV}_{\bar{\omega}} \vec{\Psi}_{\bar{\omega}} \cdot V_{\bar{\omega}} = - \sum_{\bar{\omega}} \vec{\Psi}_{\bar{\omega}} \cdot \text{GRAD}_{\bar{\omega}} \varphi_{\omega} \cdot V_{\bar{\omega}} \quad (18)$$

и имеют второй порядок аппроксимации $O(h_x^2, h_y^2)$. Выражение $V_{\bar{\omega}} \cdot \text{DIV}_{\bar{\omega}} \vec{\Psi}_{\bar{\omega}}$ представляет собой поток векторного поля через грани ячейки, а $V_{\bar{\omega}} \cdot \text{GRAD}_{\bar{\omega}} \varphi_{\omega}$ - силу давления φ на грани объема $V_{\bar{\omega}}$ (рис. 3б).

Операторы (16)-(17) будут применяться для аппроксимации конвективных производных и тех членов правых частей (2'), (3), которые отвечают объемной вязкости.

Построим другую пару сопряженных разностных аналогов div и grad (см. (8'), (9')):

$$\text{DIV}_{\bar{\omega}} \vec{\Psi}_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_3) \cdot \vec{\Psi}_I \langle X_{\bar{\omega}}^{\ell-1} \rangle_I + (\vec{\beta}_3 - \vec{\beta}_5) \cdot \vec{\Psi}_{II} \langle X_{\bar{\omega}}^{\ell-1} \rangle_{II} \right\} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & + (\vec{s}_5 - \vec{s}_7) \cdot \vec{\Psi}_{\text{III}} \langle X_{\vec{\omega}}^{\ell-1} \rangle_{\text{III}} + (\vec{s}_7 - \vec{s}_1) \cdot \vec{\Psi}_{\text{IV}} \langle X_{\vec{\omega}}^{\ell-1} \rangle_{\text{IV}} \} / \sqrt{V_{\vec{\omega}}}, \\
 \text{GRAD}_{\omega} \varphi_{\vec{\omega}} = & \frac{1}{S_{\omega}} \{ \varphi_{12} (\vec{s}_2 - \vec{s}_1) - \varphi_{03} (\vec{s}_3 - \vec{s}_0) - \varphi_{23} (\vec{s}_2 - \vec{s}_3) + \\
 & + \varphi_{01} (\vec{s}_1 - \vec{s}_0), \quad (20)
 \end{aligned}$$

где $S_{\omega} = J_{\omega}(x, y)$.

Эти операторы потребуются для аппроксимации членов сдвиговой вязкости (из-за различной дискретизации термодинамических и кинематических величин).

§ 4. Аппроксимация "вверх по потоку".

Практика расчета задач газовой динамики в эйлеровых переменных показывает, что схемы с аппроксимацией конвективных членов направленными против потока разностями хорошо отражают физическую картину течения и достаточно устойчивы [10]. По этому же типу проводится аппроксимация по пространству и в настоящей работе.

Рассмотрим две соседние ячейки с номерами $i+1/2, j+1/2$ и $i+1/2, j-1/2$ (рис. 4а). Определим оператор "снос по потоку" термодинамических величин (ρ или $\rho \varepsilon$) из центров ячеек в центр грани OI :

$$[\varphi_{\omega}]_{\omega^-} = \frac{\varphi_{\text{I}} + \varphi_{\text{IV}}}{2} - \frac{1}{2} \text{sign}(\vec{U}_{01} \cdot \vec{s}_{01}) \cdot \Delta \varphi, \quad (21)$$

где $\Delta \varphi = \varphi_{\text{IV}} - \varphi_{\text{I}}$. Физическая интерпретация оператора (21) заключается в том, что значение плотности (или внутренней энергии) на общей грани двух ячеек берется из той ячейки, откуда вытекает газ через эту грань:

$$[\varphi_{\omega}]_{01} = \begin{cases} \varphi_{\text{I}}, & \vec{U}_{01} \cdot \vec{s}_{01} > 0 \\ \varphi_{\text{IV}}, & \vec{U}_{01} \cdot \vec{s}_{01} < 0 \\ \frac{\varphi_{\text{I}} + \varphi_{\text{IV}}}{2}, & \vec{U}_{01} \cdot \vec{s}_{01} = 0 \end{cases} \quad (21')$$

Аналогично определяются соответствующие операторы и для остальных граней (рис. 4б).

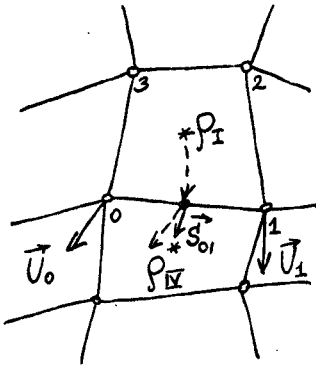


Рис. 4а.

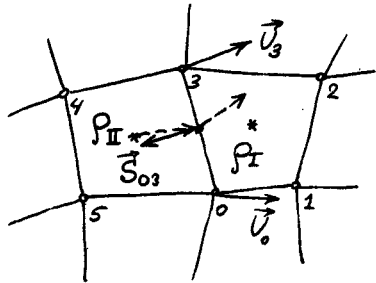


Рис. 4б.

Включив "снос по потоку" в разностный оператор дивергенции (16), получим аппроксимацию $div \rho \vec{U}$ с первым порядком:

$$\begin{aligned} 2iU_{\omega} [\rho] \vec{U}_{\omega} = \frac{1}{V_{\omega}} \{ [\rho]_{01} \vec{U}_{01} \cdot \vec{S}_{01} + [\rho]_{12} \vec{U}_{12} \cdot \vec{S}_{12} + \\ + [\rho]_{23} \vec{U}_{23} \cdot \vec{S}_{23} + [\rho]_{03} \vec{U}_{03} \cdot \vec{S}_{03} \} = \frac{1}{V_{\omega}} \{ F_{01}(\rho \vec{U}) + \\ + F_{12}(\rho \vec{U}) + F_{23}(\rho \vec{U}) + F_{03}(\rho \vec{U}) \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Что касается аппроксимации в узле i, j выражения $\rho \text{grad } \vec{U}$ в динамическом уравнении (2'), то здесь достаточно видоизменить дискретный оператор градиента (17) следующим образом (см. рис. 3 б):

$$\begin{aligned} \langle [\rho] \text{GRAD} \langle \vec{U} \rangle_{\omega} \rangle_{\omega} = \{ \langle \vec{U} \rangle_{\text{I}} ([\rho]_{03} \chi_{03}^{\ell-1} (\vec{S}_3 - \vec{S}_0) - \\ - [\rho]_{01} \chi_{01}^{\ell-1} (\vec{S}_1 - \vec{S}_0)) + \langle \vec{U} \rangle_{\text{II}} ([\rho]_{03} \chi_{03}^{\ell-1} (\vec{S}_3 - \vec{S}_0) - \\ - [\rho]_{05} \chi_{05}^{\ell-1} (\vec{S}_0 - \vec{S}_5)) + \langle \vec{U} \rangle_{\text{III}} ([\rho]_{05} (\vec{S}_0 - \vec{S}_5) \chi_{05}^{\ell-1} - \\ - [\rho]_{07} \chi_{07}^{\ell-1} (\vec{S}_0 - \vec{S}_7)) + \langle \vec{U} \rangle_{\text{IV}} ([\rho]_{07} \chi_{07}^{\ell-1} (\vec{S}_0 - \vec{S}_7) - \\ - [\rho]_{01} \chi_{01}^{\ell-1} (\vec{S}_0 - \vec{S}_1)) \} / 2V_{\omega} \end{aligned} \quad (23)$$

Используя (10)–(15), можно показать, что в этом случае также выполняется условие сопряженности:

$$\sum_{\omega} \langle \vec{U} \rangle_{\omega} \cdot \text{DIV}_{\omega} [\rho] \vec{U}_{\omega} \cdot \vec{V}_{\omega} = - \sum_{\omega} \vec{U}_{\omega} \cdot \langle [\rho] \text{GRAD}_{\omega} \langle \vec{U} \rangle \rangle \cdot \vec{V}_{\omega} \quad (24)$$

§ 5. Полностью консервативная разностная схема в потсковой форме.

Введем обозначения: $m_{\omega} = \rho_{\omega} V_{\omega}$ – масса газа в ячейке, $M_{\omega} = \langle m_{\omega} \rangle_{\omega}^*$ – масса газа в объеме V_{ω} , отнесенная к узлу.

Заменяем область изменения временной переменной t дискретным множеством $\{t_n\} = \{t_n : t_{n+1} = t_n + \tau_n, \tau_n \neq \text{const}\}$, и для согласованной аппроксимации производных $\partial \cdot / \partial t$ в уравнениях (1), (2'), (3) применим результаты, полученные в [8] для одномерного случая и в [9] для п.к.р.с. на прямоугольных сетках. Далее, основываясь на каскадном представлении, аппроксимируем исходную систему уравнений по пространству с помощью построенных разностных операторов. Тогда получим явную частично трехслойную (по скорости) схему, которую в итоге удобнее привести от "каскадной" обратно к дивергентной потоковой форме (см. рис. 3):

$$\frac{\hat{m}_I - m_I}{\tau_n} + F_{01}(\rho \vec{U}) + F_{12}(\rho \vec{U}) + F_{23}(\rho \vec{U}) + F_{03}(\rho \vec{U}) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\hat{M}_0 (\hat{U}_0 + \vec{U}_0) - M_0 (\vec{U}_0 + \vec{U}_0)}{2\tau_n} + \mathcal{F}_{I-II}(\rho \vec{U}, \vec{U}) + \quad (26)$$

$$+ \mathcal{F}_{II-III}(\rho \vec{U}, \vec{U}) + \mathcal{F}_{III-IV}(\rho \vec{U}, \vec{U}) + \mathcal{F}_{IV-I}(\rho \vec{U}, \vec{U}) = A_0,$$

$$\frac{(\hat{m} \hat{\epsilon})_I - (m \epsilon)_I}{\tau_n} + F_{01}(\rho \epsilon \vec{U}) + F_{12}(\rho \epsilon \vec{U}) + F_{23}(\rho \epsilon \vec{U}) + \quad (27)$$

$$+ F_{03}(\rho \epsilon \vec{U}) = - P_I^* \text{DIV}_I \vec{U} \cdot \vec{V}_I + 2(\mu \nabla \cdot \nabla)_I \cdot S_I \langle X^{\ell-1} \rangle_I, \quad (28)$$

$$P_I = P(\rho_I, \epsilon_I).$$

Отметим, что уравнения неразрывности и внутренней энергии записаны для ячейки (объема V_{ω}), а динамическое - для объема $V_{\bar{\omega}}$; использованы обозначения:

$$\begin{aligned} F_{\Pi-I}(\rho\vec{U}, \vec{U}) = & \frac{1}{8} [\rho]_{12} \{ \vec{S}_{12} \cdot (\vec{U}\vec{U})_{12} + (\vec{S}_{12} \cdot \vec{U}_{12}) \vec{U}_{03} \} + \\ & + \frac{1}{8} [\rho]_{01} \{ \vec{S}_{03} \cdot (\vec{U}\vec{U})_{03} + (\vec{S}_{03} \cdot \vec{U}_{03}) \vec{U}_{12} \} + \frac{1}{8} [\rho]_{18} \{ \vec{S}_{18} \cdot (\vec{U}\vec{U})_{18} + \\ & + (\vec{S}_{18} \cdot \vec{U}_{18}) \vec{U}_{07} \} + \frac{1}{8} [\rho]_{07} \{ \vec{S}_{07} \cdot (\vec{U}\vec{U})_{07} + (\vec{S}_{07} \cdot \vec{U}_{07}) \vec{U}_{18} \} + \\ & + \frac{1}{16} [\rho]_{78} (\vec{S}_{78} \cdot \vec{U}_{78}) (\vec{U}_1 - \vec{U}_0) + \frac{1}{16} [\rho]_{01} (\vec{S}_{01} \cdot (\vec{U}_0 - \vec{U}_1)) (\vec{U}_{23} - \vec{U}_{78}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\vec{A}_0 = V_0 \cdot \text{GRAD}_0 P_{\omega}^* + 2 \cdot \text{DIV}_0 \mu \mathcal{D}_{\omega},$$

$$(\mathcal{D}_{\omega})_{xx} = (\text{GRAD}_{\omega})_x u_{\bar{\omega}}, (\mathcal{D}_{\omega})_{yy} = (\text{GRAD}_{\omega})_y v_{\bar{\omega}}, \text{ и т.д.}$$

Построенная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству и соответствует методу "донорных ячеек" [10]. Полная консервативность следует из свойств "каскадной" записи (2') и из сопряженности разностных операторов (I3), (I6)-(I7), (I9)-(20). Действительно, проектируя первым оператором (I3) уравнение неразрывности (25) в узел, домножая его на $-\vec{U}_0^2/2$ и складывая с уравнением изменения импульса (26), скалярно умноженным на \vec{U}_0 , получим разностный аналог уравнения (5) - баланса кинетической энергии. Затем, сложив полученное уравнение с (27), спроектированным тем же оператором (I3) в узел, приходим к дивергентному разностному уравнению изменения полной энергии $E_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} M_{\bar{\omega}} \vec{U}_{\bar{\omega}} \cdot \vec{U}_{\bar{\omega}} + \langle m \epsilon \rangle_{\bar{\omega}}^*$.

Следует еще раз подчеркнуть, что дискретные конвективные потоки импульса (29) оказываются определенным образом согласованными с потоками массы (см. (22)). Сами же потоки $F(\rho\vec{U})$ и, независимо, $-F(\rho\epsilon\vec{U})$ могут выбираться произвольно. Так вместо симметричных либо направленных против потока разностей можно использовать их комбинации из различных вариантов метода коррекции потоков [11,12]. Допустимы также и нелинейные аппроксимации [13].

При расчетах ударных волн искусственная вязкость вводится по аналогии с объемной, а её коэффициент ξ'_{ω} определяется выражением:

$$m_{\omega} = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot c_{\omega} \cdot \rho_{\omega} \cdot d_{\omega} \cdot \{1 - \text{sign } \text{DIV}_{\omega} \vec{U}_{\omega}\};$$

величина d_{ω} характеризует размер ячейки.

В работе [8] рассмотрены одномерные двухэтапные п.к.р.с. в с алгоритмом суммарной аппроксимации, расщепленным на лагранжев этап и этап переноса, подобно методам [14,15]. Там же описаны и двухслойные консервативные схемы, сбалансированные только по пространству. Результаты [8] переносятся в двумерном случае на построенную схему (25)-(28) для получения соответствующих её модификаций.

§ 6. 0 постановке граничных условий.

Вначале, перед расчетом задачи, определяются внешние нормали к границе расчетной области. Геометрически алгоритм сводится к следующему. Расчетная область окаймляется слоем фиктивных ячеек (рис. 5а), в которых внешнее давление равно нулю, а во внутренних ячейках области задается $P_{\omega} = \text{const} > 0$, $\vec{U}_{\omega} \equiv 0$. Далее, для каждого граничного узла вычисляется равнодействующая сил давления на диагонали прилегающих ячеек (рис. 5б, см. также (17), рис. 3Б). Её направление, очевидно, зависящее только от размеров граничных отрезков и угла между ними, и принимается за направление нормали. На практике эта операция заменяется одним расчетным шагом по времени по схеме (25)-(28), т.к. при указанных условиях вычисленные в граничных узлах скорости \vec{U}_r будут направлены за пределы области и, по определению, задавать внешние нормали. (При наличии непроницаемой границы такие скорости должны отсутствовать, следовательно, описанный алгоритм определения нормалей обоснован с физической точки зрения). Затем, после начала регулярного расчета найденные координаты нормалей хранятся и используются как одномерные массивы.

Рассмотрим реализацию в схеме различных типов граничных условий.

В случае границы твердое тело - газ скорости в фиктивных узлах, а также плотность в фиктивных ячейках полагаются равными нулю. В каждом граничном узле проекция вектора скорости, вычисляемого по однородному алгоритму решения уравнения (26),

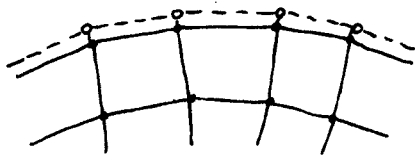


Рис. 5а.

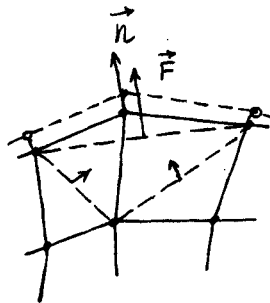


Рис. 5б.

на нормаль зануляется, что соответствует условию непротекания. При условии прилипания - $\vec{U}_n = 0$.

В случае свободного вытекания через открытую границу величины ρ , ε , P в фиктивных ячейках приравниваются соответствующим значениям в соседних приграничных. Скорости в фиктивных узлах приравниваются скоростям на границе. Нормальная составляющая вектора скорости в тех узлах, где она становится отрицательной (т.е. направленной внутрь области) на $n+1$ -м временном шаге полагается равной нулю во избежание "запирания" открытой границы.

На границе вдува задаются его параметры: \vec{U}_b в узлах, ρ_b и ε_b - в фиктивных ячейках.

§ 7. Вычисление переменного шага по времени.

Шаг τ_n перед расчетом значений $\hat{\rho}$, $\hat{\varepsilon}$, \hat{U} на $n+1$ -м временном слое вычисляется из условия Куранта. Вначале для каждой ячейки находится $\tau_{n,\omega}^{(1)} = d_{\omega} / C_{\omega}$, а также суммарный поток скоростей, выносящих вещество из ячейки: $F_{\omega} = F_{01}(\vec{U}) \cdot \theta(F_{01}) + F_{12}(\vec{U}) \cdot \theta(F_{12}) + F_{23}(\vec{U}) \cdot \theta(F_{23}) + F_{03}(\vec{U}) \cdot \theta(F_{03})$, где $\theta(z)$ - функция Хевисайда ($\theta(z) = 1$, $z \geq 0$ и $\theta(z) = 0$, $z < 0$). Затем находятся $\tau_{n,\omega}^{(2)} = V_{\omega} / F_{\omega}$ (если $F_{\omega} \neq 0$) и $\tau_{n,\omega} = [(1/\tau_{n,\omega}^{(1)}) + (1/\tau_{n,\omega}^{(2)})]^{-1}$. За окончательное значение шага берется $\tau_n = \nu \cdot \min \tau_{n,\omega}$, где $0 < \nu < 1$ - подбираемый экспериментально параметр, имеющий здесь смысл числа Куранта.

§ 8. Результаты численного моделирования.

8.1. Задачи обтекания.

I. Обтекание кругового цилиндра однородным потоком газа.

Расчетная область с разностной сеткой изображена на рис.6. Размеры области - 3×6 , размерность сетки - 30×60 ячеек. По направлению y оттока бралась равномерной с шагом $h_y = 0.1$. На каждой горизонтальной линии $y = \text{const}$ узлы располагались равномерно с координатами $x_{i,j} = x_j^{\text{лев.}} + (i-1)(x^{\text{пр.}} - x_j^{\text{лев.}}) / 30$, $i = 1, 2, \dots, 31$, где $x_j^{\text{лев.}}$ - абсциссы узлов, лежащих на поверхности цилиндра; $x^{\text{пр.}} = 3$. Параметры потока, задаваемые на нижней границе, имели следующие значения: $M_\infty = 2$, $\rho_\infty = 1$, $P_\infty = 1$, $\gamma = 1.4$. Радиус цилиндра $R = 1$. Такие значения были выбраны в соответствии с обезразмериванием, принятым в [16], где приведены таблицы решения стационарной задачи обтекания, полученного с высокой точностью.

Расчет проводился методом установления. На левой криволинейной границе задавалось условие непротекания, на верхней и правой - свободного вытекания по алгоритму, описанному в § 5. Начальные условия бралась однородными со значениями параметров входного потока. Критерием установления считалось уменьшение относительного различия величин плотности и давления (при нормировке на максимумы) на двух соседних слоях, до 10^{-3} .

Ограничение на расчетный шаг по времени обуславливается, в основном, сильно искривленными ячейками (рис.6), из-за чего общее время расчета на данной сетке превосходит 2 часа на БЭСМ-6. Увеличить шаг по времени позволяет использование сетки, построенной методом "упругой паутины" [17] (рис. 7). В этом случае общее время не превышает 1.5 часа.

На рис. 8-10 приведены изохоры, изобары и поле скоростей из расчета на сетке рис.6. Значения плотности и давления на линиях уровня равны соответственно: $\rho_k = \rho_{\min} + k(\rho_{\max} - \rho_{\min}) / 16$, $P_k = P_{\min} + k(P_{\max} - P_{\min}) / 16$, где $\rho_{\min} = 0.34$, $\rho_{\max} = 3.19$, $P_{\min} = 0.36$, $P_{\max} = 5.60$. Коэффициенты искусственной вязкости μ и ν выбирались из соображений вычислительной устойчивости, подавления нефизических осцилляций и наименьшего размывания фронта отшедшей ударной волны (2-3 ячейки): $\mu = 0.5$
 $\mu_\omega = \mu_0 \cdot c_\omega \cdot \rho_\omega \cdot d_\omega$, где $\mu_0 = 0.01$.

Таблицы значений плотности, давления и скорости в [16], с которыми проводилось сравнение результатов расчета, даны в цилиндрических координатах (z, φ) , $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ (рис. IIа). На рис. II б, в представлены профили плотности и давления при различных φ в зависимости от z : сплошной линией – табличные данные, пунктирной – расчетные. На рис. I2 а, б, в тех же обозначениях показано распределение давления и скорости по углу на поверхности цилиндра.

Результаты расчета на сетке, построенной методом "упругой паутины", отличаются от приведенных незначительно.

Табличное и расчетное значения коэффициента лобового сопротивления [16]:

$$C_z = 2(F - p_\infty S) / \rho u_\infty^2,$$

где F – полная сила, действующая на переднюю часть цилиндра, соответственно равны I.13 и I.15.

2. Обтекание плоской ступеньки.

Расчетная область на плоскости (x, y) для этой задачи показана на рис. I3, где $EF = 1$, $AB = 3$, $BC = 6$. Сетка содержит 24×36 ячеек, $h_x = 0.125$, $h_y = 0.167$.

Вертикальная составляющая скорости на границе AB поддерживалась равной единице ($U_\infty = 1$), плотность втекающего газа также задавалась единичной ($\rho_\infty = 1$), показатель политропы соответствовал воздуху ($\gamma = 1.4$), $M_\infty = 3$. На передней и боковой поверхностях ступеньки ставилось условие непротекания. На рис. I3–I4 приведены изохоры и изобары по достижении установления. Коэффициенты вязкости имели значения: $\alpha = 0.5$, $\mu_0 = 0.05$. При уменьшении μ_0 в области перед торцевой частью в процессе расчета образовывалась зона сильных нестационарных деформаций, приводящих к измельчению шага τ_n по времени, либо к авосту из-за появления отрицательных значений внутренней энергии.

Общее время счета задачи – не более I часа на БЭСМ-6.

Результаты расчетов сравнивались с графиками, приведенными в [15]. Положение ударной волны по всем данным совпадают, в остальной области между параметрами из [15] и описываемых расчетов имеется качественное согласие.

3. Дифракция ударных волн на тупых углах.

Автомодельные задачи о дифракции ударных волн на клиньях достаточно хорошо изучены теоретически и экспериментально и потому являются тестовыми для численных методов ([18,19]). Задачи характеризуются следующими параметрами: число Маха падающей ударной волны (M), угол наклонной плоскости клина (θ), показатель адиабаты (γ).

В проведенных расчетах по схеме (25)-(28) значение γ равнялось 1.4, фоновые значения плотности и скорости звука перед фронтом ударной волны - $\rho_0 = 1$ и $C_0 = 1$ соответственно, а расчетная сетка содержала 30x60 ячеек.

На рис. 15-16 показаны изолинии плотности и давления из расчета сложного маховского отражения ($M = 3.74$, $\theta = 30^\circ$) [20] при числе Куранта $\nu = 0.5$ через 200 шагов по времени: $f_k = f_{min} + (f_{max} - f_{min})/31$; $f = \rho, P$; $\rho_{min} = 1$, $\rho_{max} = 8.52$, $P_{min} = 0.71$, $P_{max} = 31.41$. Одномерный профиль распределения плотности вдоль наклонной стенки изображен на рис. 17 б. Сплошная линия соответствует эксперименту [20], пунктирная - расчету. Пояснительная диаграмма из [20] дана на рис. 17 а.

Характерное время расчета подобного варианта на БЭСМ-6 составляет 25-30 мин.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики.- М., Наука, 1980.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М., Наука, 1977.
3. Кузьмин А.В., Макаров В.Л., Меладзе Г.В. О полностью консервативных трехслойных разностных схемах для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера.- Докл.сем.ИПМ Тбилис. гос.ун-та, 1978, т.12-13, с.37-89.
4. *Libertani H. Ein konvergentes Differenzenverfahren für die Gleichungen der Hydrodynamik. - Numerische Beh. von Diff.-1981, 47.*
5. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Пашков М.Ю. Построение полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики на основе операторного подхода.- М., 1981-(Препринт/ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 63).
6. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Полностью консервативные дифференциально-разностные схемы газовой динамики с в СЭЛ-переменных.-М.,1982 - 18с.- (Препринт/ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 19).
7. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сороковикова О.С. Полностью консервативная коррекция потоков в задачах газовой динамики.- Докл.АН СССР, т.274, № 3, с.524-528.
8. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сороковикова О.С. Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков.- М., 1984 - 30с.- (Препринт/ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 56).
9. Головизнин В.М., Краюшкин И.Е., Рязанов М.А., Самарский А.А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями.- М., 1983 - 32с.- (Препринт/ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 105).
10. Роч П. Вычислительная гидродинамика.- М., Мир, 1980.
11. Борис Дж.П., Бук Д.А. Решение уравнения непрерывности методом коррекции потоков.- В кн.: УТС, М., МИР, 1980, с.92-141.
12. *Zalesak S. T. Fully multidimensional FCT algorithm for fluids. - J. Comput. Phys., 1979, v. 31, p. 335-362.*
13. *Leonard B. P. The quick algorithm: a uniform third-order finite-difference method for highly convective flow. - Comp. Meth. in Fluids, 1980, p. 159-195.*

14. Gentry R., Martin R., Daly B. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problem. — *J. Comput. Phys.*, 1966, v. 1, no. 1, p. 87-118.
15. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод "крупных частиц" в газовой динамике. — М., Наука, 1982.
16. Любимов А.Н., Русанов В.В. Течения газа около тупых тел. — ч. II. — М., Наука, 1970.
17. Головизнин В.М., Симачева О.Г. Об одном методе построения расчетных сеток в областях с криволинейными границами. — *ЖВМ и МФ*, 1983, т. 23, № 5, с. 1245-1249.
18. Головизнин В.П., Менде Н.П., Жмакин А.И., Фурсенко А.А. и др. О распространении ударных волн в плоских кососимметричных каналах. — Л., 1981. — (Препринт/Физ.-тех. ин-т им. А.Ф. Иоффе АН СССР — 50 с.)
19. Кутлер П., Шанкар В., Андерсон Д. Дифракция ударной волны тупым углом. II. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1978, т. 16, № 1, с. 7-9.
20. Ben Dor G. Regions and transitions of nonstationary oblique shock-wave diffraction. — *UTIAS, Toronto*, 1978-50 p.
21. Кузьмин А.В. Численное исследование одномерных неравновесных течений газа в ударных трубах. — *Деп. ВИНТИ № 2858-82*.

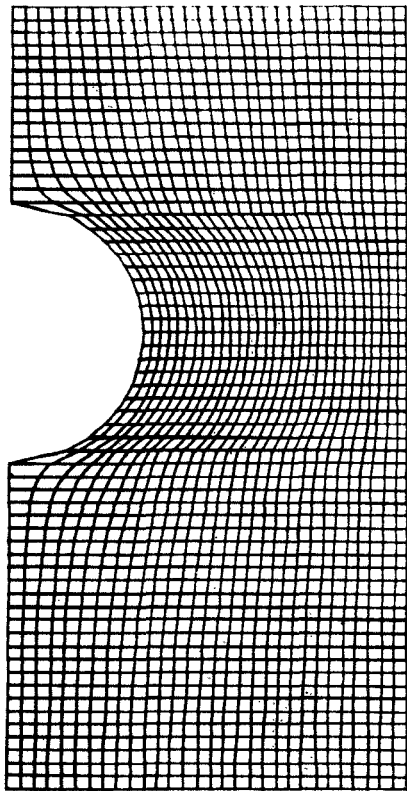


Рис. 7

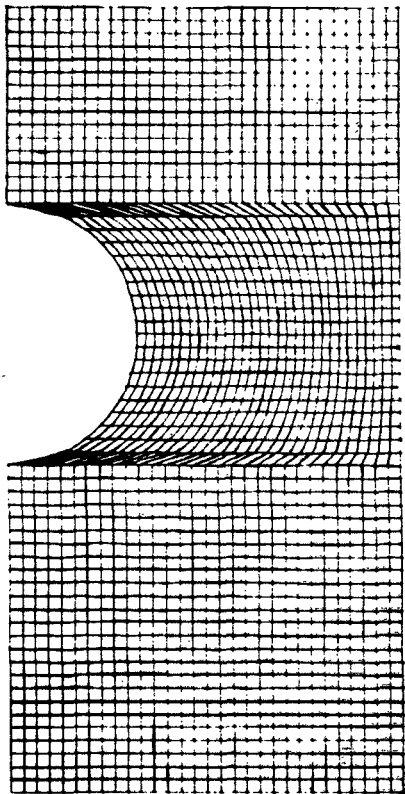


Рис. 6

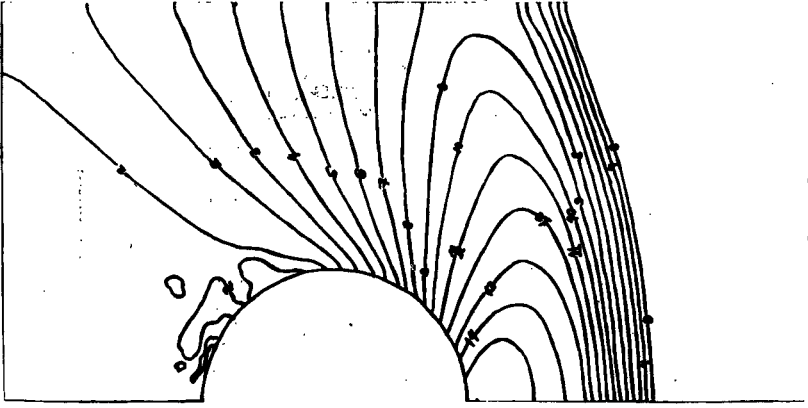


Рис. 9

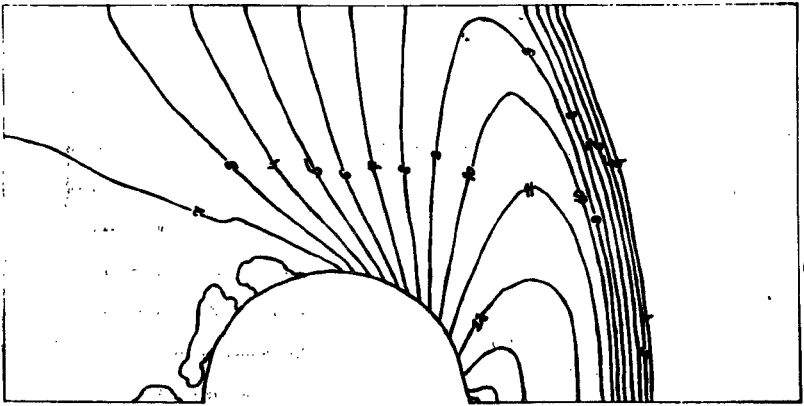


Рис. 8

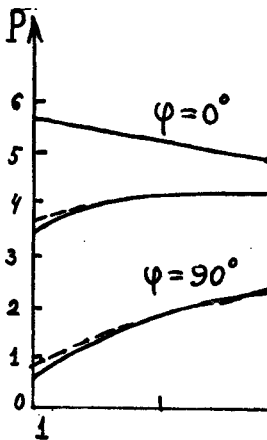
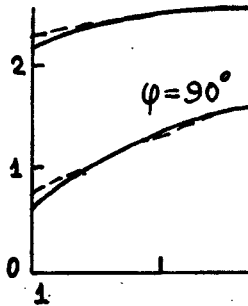
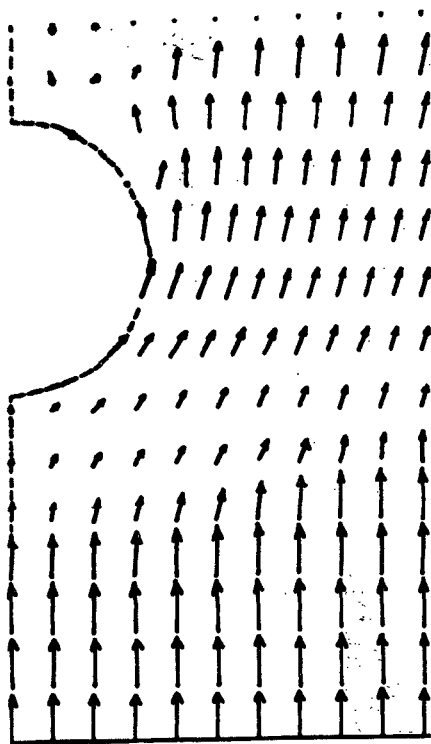
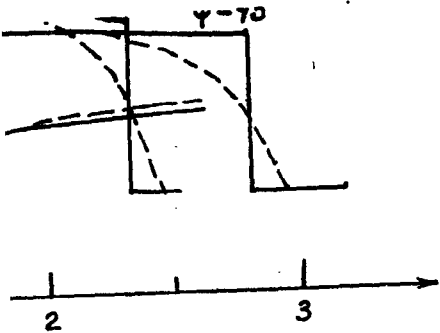
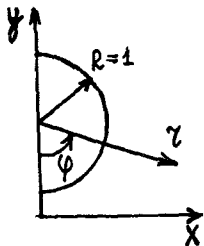
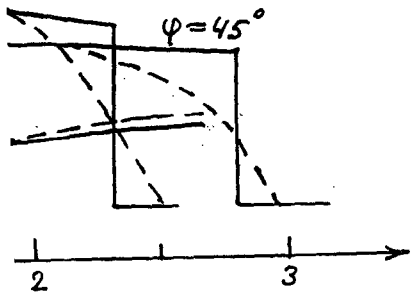


Рис. 10

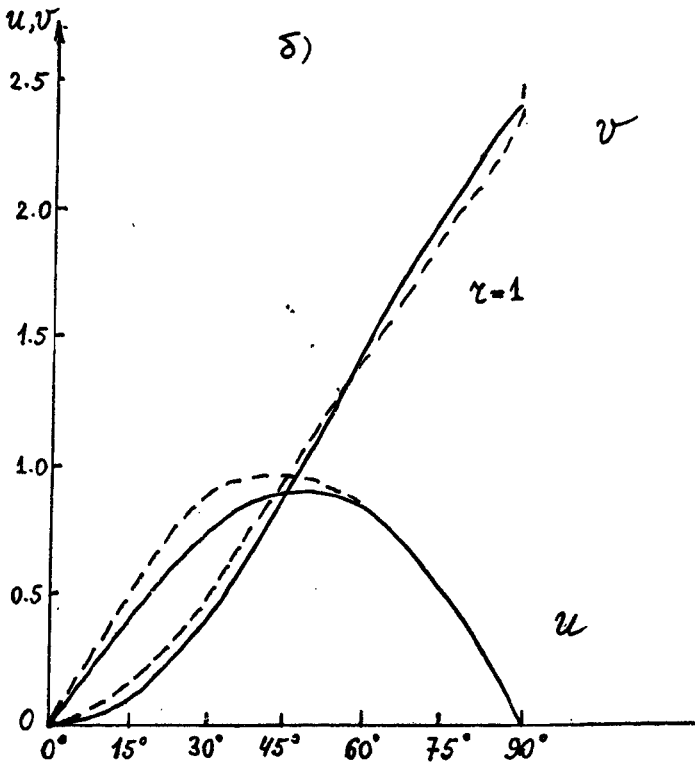
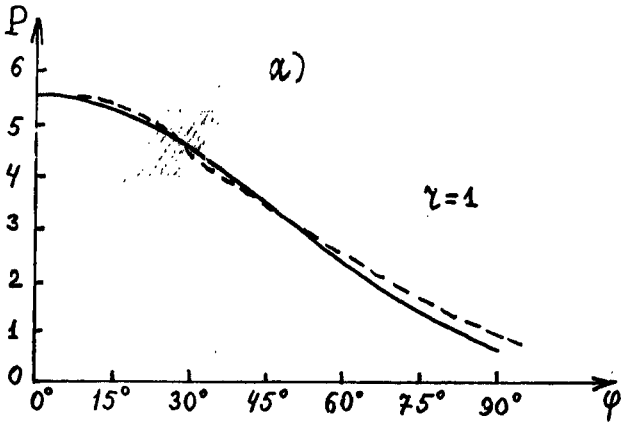


b)



a)

Рис. 11



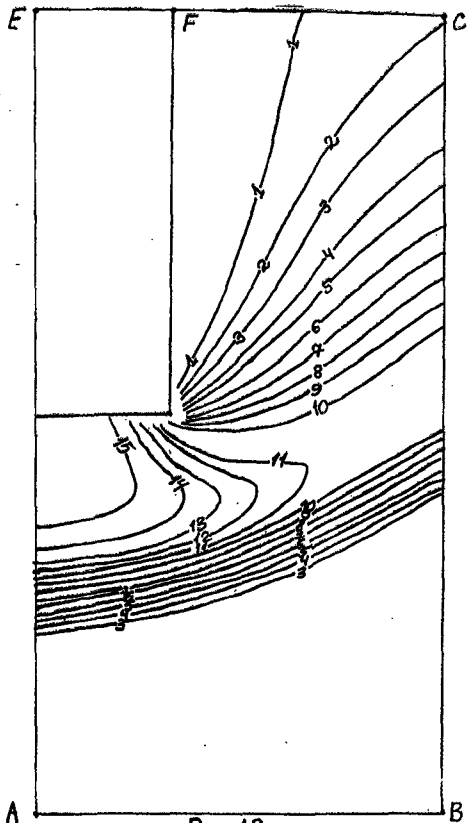


Рис. 13

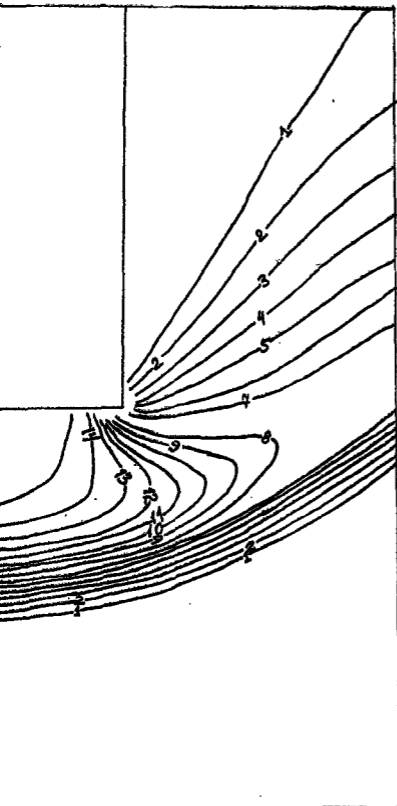
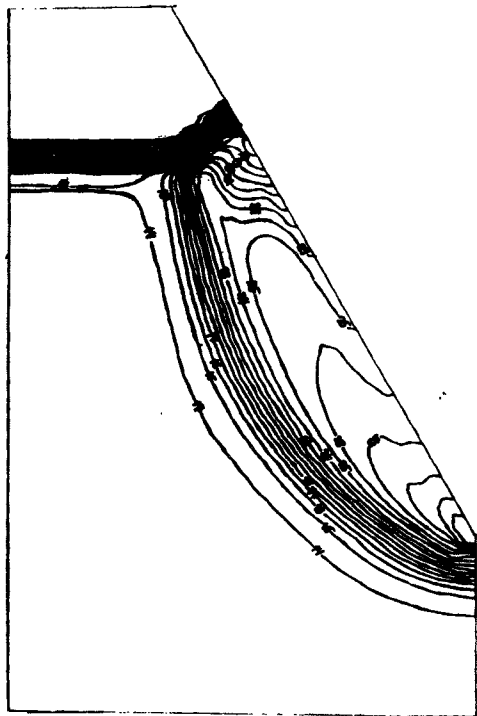
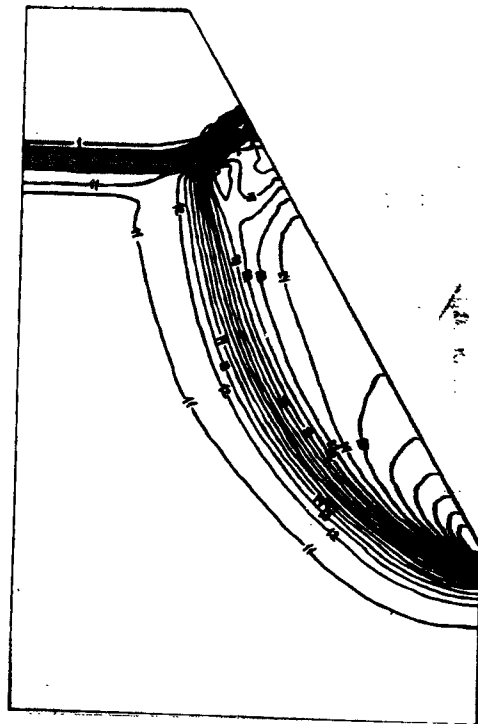


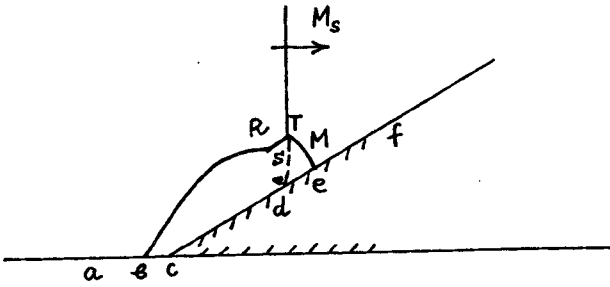
Рис. 14



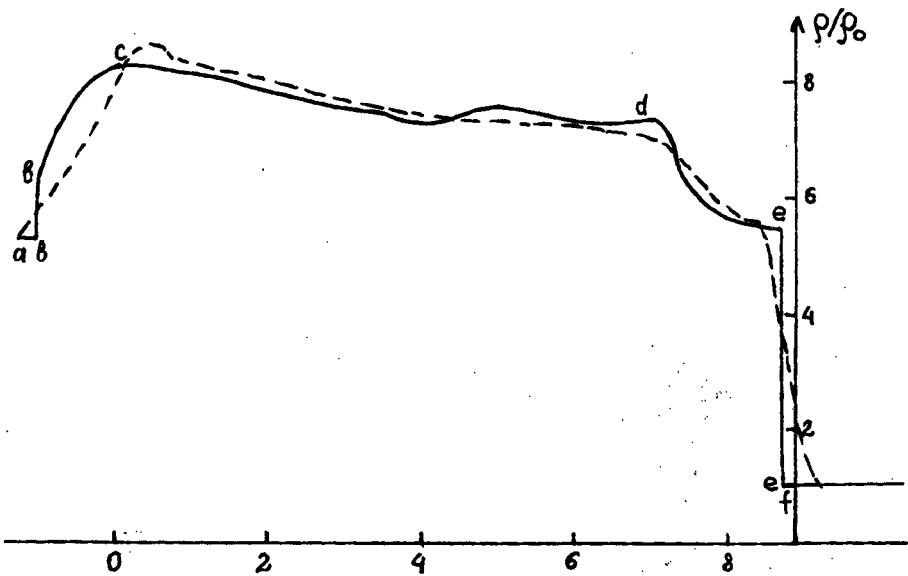
Puc.15



Puc.16



Puc. 17a



Puc. 17б

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и. о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.