

11



Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Академии наук СССР

ОНТИ

В.М. Головинин, М.А. Рязанов, А.А. Самарский,  
С.Ю. Чернов

ДВУМЕРНАЯ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ  
РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ  
В СМЕШАННЫХ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Преприят № 11 за 1985 г.

Москва

## А Н Н О Т А Ц И Я

Построена двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных на произвольных криволинейных сетках. Возможности новой методики иллюстрируются в расчетах ряда тестовых задач.

## В В Е Д Е Н И Е

Современные задачи газовой динамики предъявляют высокие требования к численным методам. Разностные схемы, предназначенные для решения таких задач, должны отслеживать сложные деформации течения, тонкие структуры разрывов [1,2].

Как известно, достоинством лагранжевых методов является малая аппроксимационная вязкость и высокая точность расчета контактных разрывов. В задачах с ограниченной массой газа и небольшими сдвиговыми деформациями течения они являются предпочтительными. Однако лагранжевы схемы оказываются практически не пригодными для расчета сложных задач обтекания, типичных в аэродинамике.

Разностные схемы в эйлеровых переменных получили активное развитие и распространение благодаря возможности моделирования течений с сильными пространственными деформациями на неподвижных сетках. Эйлеровы алгоритмы сквозного счета сильно размазывают скачки и волны разрежения. Методы с выделением особенностей (ударных волн, контактных разрывов) позволяют более точно рассчитывать скачки, однако в задачах с априорно неизвестной (даже качественно) конфигурацией течения становятся громоздкими и трудоемкими.

Отмеченные причины приводят к необходимости использования подвижных сеток, отличных от лагранжевых [3-8].

Методы, относящиеся к типу смешанных эйлерово-лагранжевых [7,8], являются более универсальными, чем эйлеровы и лагранжевы, и, следовательно, обладают большими прикладными возможностями. Отметим, что сам выбор опосаба движения сетки является сложным самостоятельным вопросом, решение которого индивидуально для каждой физической задачи.

В работах [9,10] предложен общий метод построения полностью консервативных разностных схем газовой динамики в СЭЛ-переменных.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию на двумерных тестовых расчетах на подвижных сетках новой полностью консервативной схемы в СЭЛ-переменных.

Авторы благодарят Н.В.Арделяна, В.А.Гасилова, В.К.Коршунова и О.С.Сорокину за внимание к работе, а также ценные советы.

### § I. Уравнения газовой динамики в СЭЛ переменных.

п. I. Систему уравнений газовой динамики в криволинейных подвижных координатах для случая двух переменных будем рассматривать в виде:

$$\frac{\partial \rho \Delta}{\partial t} + \frac{\partial (x^{\ell-1} \rho w^x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} \rho w^y)}{\partial (\alpha, \beta)} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \Delta u}{\partial t} + \frac{\partial (x^{\ell-1} \rho u w^x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} \rho w^y u)}{\partial (\alpha, \beta)} &= (2) \\ &= -x^{\ell-1} \frac{\partial (P^*, y)}{\partial (\alpha, \beta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \Delta v}{\partial t} + \frac{\partial (x^{\ell-1} \rho v w^x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} \rho w^y v)}{\partial (\alpha, \beta)} &= (3) \\ &= -x^{\ell-1} \frac{\partial (x, P^*)}{\partial (\alpha, \beta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \Delta \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (x^{\ell-1} \rho \varepsilon w^x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} \rho \varepsilon w^y)}{\partial (\alpha, \beta)} &= (4) \\ &= -P^* \left( \frac{\partial (x^{\ell-1} u, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} v)}{\partial (\alpha, \beta)} \right), \end{aligned}$$

$$P = P(\rho, \varepsilon), \quad (5)$$

$$P^* = P - \xi \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial (x^{\ell-1} u, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} v)}{\partial (\alpha, \beta)} \right), \quad (6)$$

$$w^x = u - \dot{x}, \quad w^y = v - \dot{y}, \quad \dot{x} = \partial x / \partial t = \varphi(x, y, t)$$

$$\dot{y} = \partial y / \partial t = \psi(x, y, t), \quad \Delta = x^{\ell-1} \partial(x, y) / \partial(\alpha, \beta)$$

Здесь  $\rho$  - плотность газовой частицы,  $x, y$  - её эйлеровы координаты,  $u, v$  - компоненты скорости газа в неподвижной системе координат,  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия,

$P$  - давление,  $\xi$  - коэффициент вязкости,  $\alpha, \beta$  - смешанные эйлерово-лагранжевы (СЭЛ) координаты,  $w^x, w^y$  - компоненты скорости движения газа относительно СЭЛ координат,

$\ell$  - целочисленный параметр, равный единице в плоском случае, двойке - в цилиндрическом,  $\varphi, \psi$  - заданные скорости дви-

жения системы СЭЛ координат относительно лабораторной. Производные по времени,  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ , берутся при фиксированных переменных  $\alpha, \beta$ . При  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  относительные скорости переноса равны:  $W^x = u$ ,  $W^y = v$ , и уравнения (I)-(5) принимают эйлерову форму записи. Если  $\dot{x} = u$ ,  $\dot{y} = v$ , т.е.  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = d/dt$ , система уравнений становится лагранжевой.

В настоящей работе основное внимание уделяется вопросам аппроксимации конвективных производных, являющимся принципиальными при построении полностью консервативных схем. Поэтому в уравнения (2)-(4) не включены слены, отвечающие сдвиговой вязкости.

п.2. Умножая (I) на  $-0.5(u^2 + v^2)$ , (2), (3) - на  $u$  и  $v$  соответственно, и складывая результаты, приходим к уравнению баланса кинетической энергии:

$$\frac{\partial \rho \Delta E^k}{\partial t} + \frac{\partial (x^{\ell-1} \rho E^k W^x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} \rho E^k W^y)}{\partial (\alpha, \beta)} = -x^{\ell-1} \left( \frac{\partial (P^*, y)}{\partial (\alpha, \beta)} u + \frac{\partial (x, P^*)}{\partial (\alpha, \beta)} v \right), \quad (8)$$

где  $E^k = 0.5(u^2 + v^2)$  - удельная кинетическая энергия. Уравнение баланса внутренней энергии (4) в сумме с (8) выражает закон сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial \rho \Delta E^\Pi}{\partial t} + \frac{\partial (x^{\ell-1} \rho E^\Pi W^x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} \rho E^\Pi W^y)}{\partial (\alpha, \beta)} = - \left( \frac{\partial (x^{\ell-1} P^* u, y)}{\partial (\alpha, \beta)} + \frac{\partial (x, x^{\ell-1} P^* v)}{\partial (\alpha, \beta)} \right), \quad (9)$$

где  $E^\Pi = \varepsilon + E^k$  - удельная полная энергия.

Разностную схему, аппроксимирующую (I)-(4), будем называть полностью консервативной, если в ней выполняются дискретные аналоги закона сохранения полной энергии и баланса отдельных её видов, причем в соответствующих уравнениях не содержатся дисбалансные недивергентные источники.

## § 2. Дискретизация уравнений по времени.

п.1. Разобьем временную ось  $t_0 < t < \infty$  на отрезки длины  $\tau_n$  точками  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , где  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ . Все величины в (I)-(7) будем относить к узлам  $t_n$  этой временной сетки. Введем обозначения:

$$f = f(t_n), \hat{f} = f(t_{n+1}), \check{f} = f(t_{n-1}), \overset{(\sigma)}{f} = \sigma f + (1-\sigma)\hat{f}.$$

Аппроксимацию уравнений (I)-(4) по времени проведем в два этапа: первый - лагранжев, второй - этап перестройки оиcтeмы координат и учет перетекания. Такой подход повышает устойчивость схемы [8, 11], а также является удобным с алгоритмической точки зрения.

### п.2. Уравнения первого этапа.

На первом этапе системы координат движется вместе с газом, т.е.  $W^* = W^{\check{}} = 0$ . Следовательно, обращаются в ноль и конвективные производные в левых частях (I)-(4). Тогда аппроксимации по времени уравнения (2)-(4) запишутся следующим образом:

$$\rho \Delta \frac{\tilde{u} - \check{u}}{2\tau_n} = -x^{\ell-1} \frac{\partial(\bar{P}^*, y)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (10)$$

$$\rho \Delta \frac{\tilde{v} - \check{v}}{2\tau_n} = -x^{\ell-1} \frac{\partial(x, \bar{P}^*)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (11)$$

$$\rho \Delta \frac{\tilde{\varepsilon} - \check{\varepsilon}}{\tau_n} = -\bar{P}^* \left( \frac{\partial(x^{\ell-1}u, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, x^{\ell-1}v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right), \quad (12)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon); \quad (13)$$

$$\frac{\tilde{x} - x}{\tau_n} = \frac{\tilde{u} + u}{2}, \quad \frac{\tilde{y} - y}{\tau_n} = \frac{\tilde{v} + v}{2}, \quad (14)$$

$$\bar{P}^* = P - \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial(x^{\ell-1}\overset{(\sigma)}{u}, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, x^{\ell-1}\overset{(\sigma)}{v})}{\partial(\alpha, \beta)} \right), \quad (15)$$

Здесь  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  - промежуточные значения физических величин, вычисляемые на первом этапе. Если расчет ведется в чите лагранжовых переменных, то  $\tilde{u} = \hat{u}$ ,  $\tilde{v} = \hat{v}$  и т.д., а второй этап отсутствует. Параметр  $\sigma$  в (15) подбирается из соображений устойчивости.

## п.2. Уравнения второго этапа.

На втором этапе производится учет конвективных потоков с использованием уже найденных промежуточных значений:

$$\frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + \frac{\partial(x^{l-1} \rho \tilde{W}^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, x^{l-1} \rho \tilde{W}^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\hat{\rho}^x - \tilde{\rho}^x}{\tau_n} + \frac{\partial(x^{l-1} \rho u \tilde{W}^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, x^{l-1} \rho u \tilde{W}^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\hat{\rho}^y - \tilde{\rho}^y}{\tau_n} + \frac{\partial(x^{l-1} \rho v \tilde{W}^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, x^{l-1} \rho v \tilde{W}^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\hat{m} \hat{\varepsilon} - m \tilde{\varepsilon}}{\tau_n} + \frac{\partial(x^{l-1} \rho \tilde{\varepsilon} \tilde{W}^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, x^{l-1} \rho \tilde{\varepsilon} \tilde{W}^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (19)$$

$$\tilde{W}^x = \bar{u} - \langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{2}(\tilde{u} + u) - \frac{\hat{x} - x}{\tau_n} = \frac{\tilde{x} - \hat{x}}{\tau_n}; \quad (20)$$

аналогично  $\tilde{W}^y = \frac{\tilde{y} - \hat{y}}{\tau_n}$ ,

$$\hat{\rho}^x = \frac{1}{2} \hat{m} (\hat{u} + u), \quad \hat{\rho}^y = \frac{1}{2} \hat{m} (\hat{v} + v), \quad (21)$$

$$\tilde{\rho}^x = \frac{1}{2} m (\tilde{u} + u), \quad \tilde{\rho}^y = \frac{1}{2} m (\tilde{v} + v), \quad (22)$$

$$m = \rho \Delta, \quad \hat{m} = \hat{\rho} \hat{\Delta}$$

Нетрудно видеть, что, сложив уравнения первого этапа с соответствующими уравнениями второго этапа и приведя подобные

члены, мы получим аппроксимацию производных по времени с первым порядком в виде:

$$\frac{\partial \rho \Delta}{\partial t} \sim \frac{\hat{m} - m}{\tau_n}$$

$$\frac{\partial \rho \Delta E}{\partial t} \sim \frac{\hat{m} \hat{E} - m E}{\tau_n}$$

$$\frac{\partial \rho \Delta u}{\partial t} \sim \frac{\hat{P}^x - P^x}{\tau_n}$$

$$\frac{\partial \rho \Delta v}{\partial t} \sim \frac{\hat{P}^y - P^y}{\tau_n}$$

Отметим, что, именно в силу выбора дискретной величины импульса на  $n+1$ -м слое по времени в виде (21), разностные производные массы ( $\rho \Delta$ ) и импульса ( $\rho \Delta u$ ,  $\rho \Delta v$ ) по времени оказываются согласованными: из них следует консервативная аппроксимация изменения кинетической энергии в уравнении (8):

$$-\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + u \frac{\hat{P}^x - P^x}{\tau_n} + v \frac{\hat{P}^y - P^y}{\tau_n} = \frac{\hat{E}^k - E^k}{\tau_n}$$

где  $\hat{E}^k = 0.5 \hat{m} (\hat{u}u + \hat{v}v)$

### § 3. Аппроксимация по пространству.

п.1. Дискретизация физических величин по пространству.

На плоскости  $(x, y)$  рассмотрим область  $G$ , занятую газом, для которой можно задать достаточно гладкое однозначное отображение  $f$ , переводящее  $G$  в единичный квадрат  $\Omega$  в пространстве СЭЛ-переменных  $(\alpha, \beta)$ . Пусть в области  $G$  построена криволинейная сетка с четырехугольными ячейками, а отображение  $f$  взаимнооднозначно переводит её в прямоугольную сетку  $(\alpha_i, \beta_j)$  в  $\Omega$  с шагами  $h_\alpha$ ,  $h_\beta = \text{const}$  (рис. 1),  $i = 1, \dots, N$ ;  $j = 1, \dots, M$ .

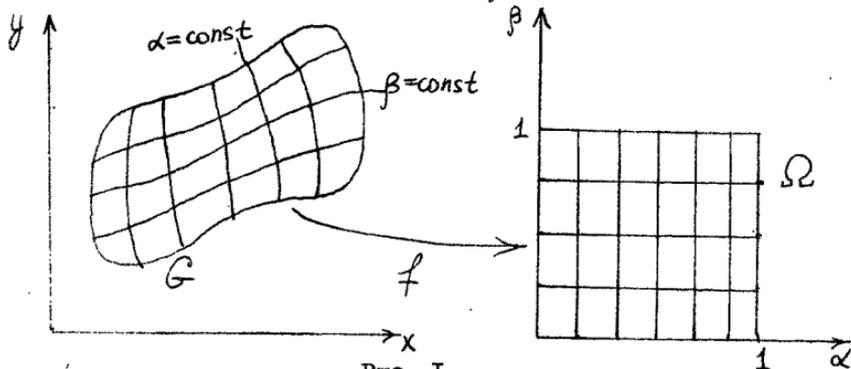


Рис. 1.

Будем относить координаты  $(x, y)$ , скорости  $(u, v)$ , импульсы  $(P^x, P^y)$  и относительные скорости  $(W^x, W^y)$  к узлам этой сетки  $(i, j)$ , а термодинамические функции  $\rho, m, \varepsilon$ .  
 $P$  - к центрам ячеек  $(i+0.5, j+0.5)$ .

## п.2. Аппроксимация уравнений первого этапа.

Якобианы в правых частях уравнений (10)-(12), (14) аппроксимируются в полном соответствии с техникой, изложенной в [12]:

$$\left\langle \frac{\partial(q, y)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\rangle_{k, l \in \bar{\omega}} = -\frac{1}{h_k h_l} \sum_{i, j \in \omega} g_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{k, l}}, \quad (23)$$

где  $g_{ij}$  - сеточная функция, принадлежащая пространству функций, определенных в центрах ячеек,  $\bar{\omega}$  - множество узлов сетки,  $\omega$  - множество центров ячеек,  $V_{ij}$  - аппроксимация объема ячейки:

$$V_{ij} = \Delta_{ij} h_k h_l = \frac{1}{2l} \{ (x_{i+1, j}^l - x_{i, j}^l)(y_{i+1, j+1}^l - y_{i, j}^l) - (x_{i+1, j+1}^l - x_{i, j+1}^l)(y_{i+1, j}^l - y_{i, j}^l) \} \quad (24)$$

(индексом  $i, j \in \omega$  обозначается также центр ячейки, левый нижний узел которой имеет индекс  $i, j \in \bar{\omega}$ ).

Аналогично:

$$\left\langle \frac{\partial(q, y)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i, j \in \omega} = \frac{1}{h_k h_l} \sum_{k, l \in \bar{\omega}} q_{k, l} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{k, l}} \quad (25)$$

Здесь  $q_{k, l}$  - сеточная функция, определенная в узлах  $(k, l \in \bar{\omega})$ .

Таким образом, аппроксимация уравнений первого этапа имеет вид:

$$M_{ij} \frac{\tilde{u}_{ij} - u_{ij}}{2\tau_n} = \sum_{k \in \omega_2} \frac{\partial V_k}{\partial x_{ij}} \bar{P}_k^*, \quad i, j \in \bar{\omega}, \quad (26)$$

$$M_{ij} \frac{\tilde{v}_{ij} - v_{ij}}{2\tau_n} = \sum_{k \in \omega_2} \frac{\partial V_k}{\partial y_{ij}} P_k^*, \quad i, j \in \bar{\omega}, \quad (27)$$

$$m_{ij} \frac{\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}}{\tau_n} = -P_{ij}^* \langle \text{DIV}(u, v) \rangle_{ij}, \quad i, j \in \omega, \quad (28)$$

$$\bar{P}_{ij}^* = P_{ij} - \frac{\xi_{ij}}{V_{ij}} \langle \text{DIV}(u^{(\sigma)}, v^{(\sigma)}) \rangle_{ij}. \quad (29)$$

$$\langle \text{DIV}(u, v) \rangle_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{M}_1} \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_k} v_k \right), \quad (30)$$

$$P_{ij} = P(P_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad (31)$$

$$m_{ij} = P_{ij} V_{ij}, \quad M_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{M}_2} m_k, \quad (32)$$

$$\frac{\tilde{x} - x}{\tau_n} = \frac{1}{2} (\tilde{u} + u), \quad \frac{\tilde{y} - y}{\tau_n} = \frac{1}{2} (\tilde{v} + v). \quad (33)$$

Здесь  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  - шаблоны, изображенные на рис. 2, 3.

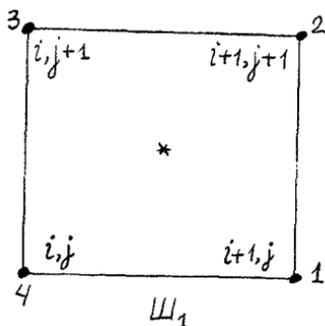


Рис. 2.

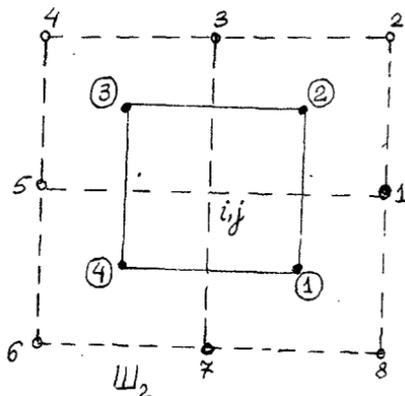


Рис. 3.

Уравнения (26)–(33) образуют замкнутую систему первого этапа.

### п.3. Искусственная вязкость.

Искусственная вязкость, по аналогии со второй физической, вводится в данную схему следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot c_{ij} \cdot P_{ij} \cdot d_{ij} \left\{ 1 - \text{sign}(\text{DIV}(\tilde{u}^{(s)}, \tilde{v}^{(s)})) \right\} \quad (34)$$

где  $\alpha_0$  - безразмерный коэффициент порядка единицы, подби-

раемый экспериментально,  $C_{ij} = \sqrt{\gamma(\gamma-1)} \varepsilon_{ij}$  - адиабатическая скорость звука,  $d_{ij}$  - некоторый характерный размер ячейки.

#### п.4. Аппроксимация уравнений второго этапа.

Разностные уравнения второго этапа удобно записать в потоковой форме.

##### I. Уравнение неразрывности.

Это уравнение аппроксимируется на шаблоне  $\mathcal{W}_1$ :

$$\frac{\hat{M}_{ij} - M_{ij}}{\tau_n} + F_{12}^p - F_{43}^p + F_{23}^p - F_{14}^p = 0. \quad (35)$$

Здесь потоки массы  $F_{km}^p$  относятся к середине соответствующей грани  $(k, m)$  ячейки и вычисляются по формулам:

$$F_{k,m}^p = (\vec{W}_{k,m} \cdot \vec{N}_{k,m}) \rho_{k,m}^* \quad (36)$$

где  $\vec{W}_{k,m}$  - вектор относительной скорости переноса, относящийся к середине грани  $(k, m)$  и равный:

$$\vec{W}_{k,m} = \frac{1}{2} \{ W_m^x + W_k^x, W_m^y + W_k^y \} \quad (37)$$

$\vec{N}_{k,m}$  - вектор нормали к грани  $(k, m)$ , равный по величине площади этой грани (рис. 4):

$$\vec{N}_{k,m} = \frac{1}{2} (x_k^{l-1} + x_m^{l-1}) \{ y_m - y_k, -(x_m - x_k) \} \quad (38)$$

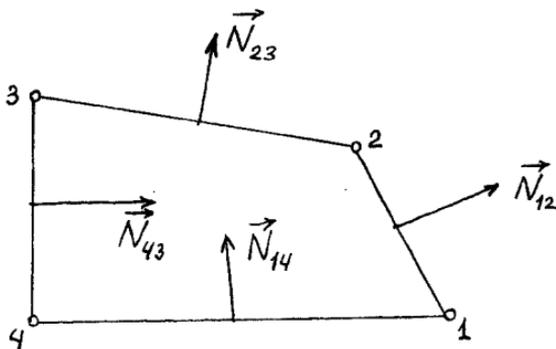


Рис. 4.

В качестве  $\rho_{k,m}^*$  берется значение плотности в одной из двух прилегающих к грани ячеек, а именно: из той ячейки, откуда идет поток газа через эту грань. Такой алгоритм соответствует методу "донорных ячеек" [13] и обеспечивает в (35) первый порядок аппроксимации ("вверх по потоку") уравнения (I).

Значения плотности  $\hat{\rho}$  на новом слое по времени находятся из (32):  $\hat{\rho} = \hat{m} / \hat{V}$ , где новые координаты узлов  $(\hat{x}, \hat{y})$ , входящие в выражение (24) для  $\hat{V}$ , задаются по какому-либо алгоритму движения сетки. В частности, положив  $\hat{X}_{ij} = X_{ij}$ ,  $\hat{Y}_{ij} = Y_{ij}$ , получим чисто Эйлерову сетку. В остальных случаях сетка будет подвижной. Так, если в качестве  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  взять координаты  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ , найденные из (33) после решения уравнений первого этапа, сетка переходит в лагранжеву, движущуюся вместе с газом.

## 2. Уравнение изменения удельной внутренней энергии.

Аналогично (35) записывается и разностное уравнение изменения внутренней энергии:

$$\frac{(\hat{m}\hat{\epsilon})_{ij} - (m\tilde{\epsilon})_{ij}}{\tau_n} + F_{12}^{\epsilon} - F_{43}^{\epsilon} + F_{23}^{\epsilon} - F_{14}^{\epsilon} = 0 \quad (39)$$

где потоки  $F_{k,m}^{\epsilon}$  внутренней энергии через грани ячейки определяются формулой (36) с заменой  $\rho_{k,m}^*$  на величину  $(\rho\epsilon)_{k,m}^*$ , вычисляемую по алгоритму, описанному выше для  $\rho_{k,m}^*$ .

## 3. Уравнение изменения импульса.

Уравнения переноса импульса (I7)-(I8) аппроксимируются в узлах сетки на шаблоне  $\Pi_2$  (рис. 3):

$$\frac{\hat{p}_{ij}^x - \tilde{p}_{ij}^x}{\tau_n} + F_{12}^u - F_{43}^u + F_{23}^u - F_{14}^u = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\hat{p}_{ij}^y - \tilde{p}_{ij}^y}{\tau_n} + F_{12}^v - F_{43}^v + F_{23}^v - F_{14}^v = 0, \quad (41)$$

где

$$\hat{p}_{ij}^x = \frac{1}{2} \hat{M}_{ij} (\hat{u}_{ij} + u_{ij}), \quad \tilde{p}_{ij}^x = \frac{1}{2} M_{ij} (\tilde{u}_{ij} + u_{ij}) \quad (42)$$

$$\hat{p}_{ij}^y = \frac{1}{2} M_{ij} (\hat{v}_{ij} + v_{ij}), \quad \tilde{p}_{ij}^y = \frac{1}{2} M_{ij} (\tilde{v}_{ij} + v_{ij})$$

Уравнения (35)–(42) образуют полную систему для второго этапа, если в (40), (41) задать потоки импульса  $F_{(k,m)}^{u,v}$ , относящиеся к серединам ребер  $(k, m)$  на шаблоне  $\mathbb{W}_2$  (рис. 4, 5).

### п.5. Условия полной консервативности.

Требования полной консервативности, выдвинутые в § I, означают, что потоки импульса  $F_{(k,m)}^{u,v}$  должны быть связаны с потоками массы (36) определенным образом.

Пусть выполнены следующие условия (рис. 5):

$$F_{(k,m)}^u = \langle F^p \rangle_{(k,m)} \frac{u_0 + u_3}{2}, \quad (43)$$

$$F_{(k,m)}^v = \langle F^p \rangle_{(k,m)} \frac{v_0 + v_3}{2}; \quad \langle F^p \rangle_{(k,m)} = \frac{1}{4} (F_{10}^p + F_{23}^p + F_{05}^p + F_{34}^p).$$

(для остальных граней – аналогично).

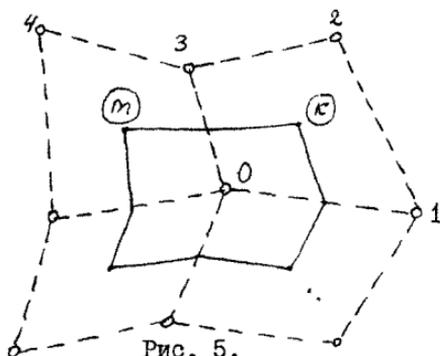


Рис. 5.

Доказательство полной консервативности получившейся схемы проводится в той же последовательности, что и в [14]: спроектируем уравнение неразрывности (35) в узел сетки (рис. 3):

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{M}_{ij} - M_{ij}}{\tau_n} + \frac{1}{4} (F_{12}^p + F_{03}^p + F_{70}^p + F_{81}^p) - \\ & - \frac{1}{4} (F_{54}^p + F_{65}^p + F_{03}^p + F_{70}^p) + \frac{1}{4} (F_{25}^p + F_{34}^p + F_{10}^p + F_{05}^p) - \\ & - \frac{1}{4} (F_{10}^p + F_{05}^p + F_{87}^p + F_{76}^p) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Умножив получившееся уравнение на  $-\frac{1}{2} u_{ij}^2$  и сложив с

(26) и (40), умноженным на  $u_{ij}$ , получим уравнение баланса кинетической энергии относительно компоненты скорости  $u$ , записанное на шаблоне  $\omega_2$ :

$$\frac{\hat{E}_{ij}^{k,u} - E_{ij}^{k,u}}{\tau_n} + \Phi_{(12)}^u - \Phi_{(43)}^u + \Phi_{(23)}^u - \Phi_{(14)}^u = u_{ij} \sum_{k \in \omega_2} \frac{\partial V_k}{\partial x_{ij}} \bar{P}_k^* \quad (45)$$

где 
$$\hat{E}_{ij}^{k,u} = \frac{1}{2} \hat{M}_{ij} \hat{u}_{ij} u_{ij}, \quad (46)$$

а потоки кинетической энергии  $\Phi_{(k,m)}^u$  равны (рис. 5):

$$\Phi_{(k,m)}^u = \frac{1}{8} (F_{34}^S + F_{23}^S + F_{05}^S + F_{10}^P) u_0 u_3. \quad (47)$$

Аналогичным образом из соотношений (35), (27), (41) получается уравнение баланса кинетической энергии для составляющей скорости  $v$ . После проектирования (28), (39) в узлы сетки и сложения с полученными уравнениями баланса приходим к дискретному аналогу закона сохранения полной энергии (9), записанному на шаблоне

$\omega_2$  в дивергентном виде:

$$\frac{\hat{E}_{ij}^n - E_{ij}^n}{\tau_n} + \Phi_{(12)}^n - \Phi_{(43)}^n + \Phi_{(23)}^n - \Phi_{(14)}^n = \quad (48)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{k \in \omega_2} \bar{P}_k^* \sum_{l \in \omega_4} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial V_k}{\partial y_n} v_n \right) + \sum_{k \in \omega_2} \bar{P}_k^* \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_{ij}} u_{ij} + \frac{\partial V_k}{\partial y_{ij}} v_{ij} \right).$$

Если просуммировать это соотношение по всем узлам области, получим уравнение:

$$\frac{\hat{E}^n - E^n}{\tau_n} + FLUX = \sum_{ij \in \omega} \sum_{k \in \omega_2} [u_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_{ij}} \bar{P}_k^* + \quad (49)$$

$$+ v_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial y_{ij}} \bar{P}_k^*] - \frac{1}{4} \sum_{ij \in \omega} \bar{P}_{ij}^* \sum_{k \in \omega_2} \left[ \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_k} v_k \right]$$

Дивергентность уравнения (48) приводит к тому, что все потоковые члены для внутренних узлов в слагаемом  $FLUX$  сокращаются и остаются только потоки внутренней и кинетической энергии через границы области  $G$ . После перемены порядка суммирования в правой части (49) также остаются только слагаемые, аппроксимирующие работу сил давления по границе области  $G$ .

Таким образом, полученная в итоге двухэтапная разностная схема газовой динамики при условиях (43) обладает свойством полной консервативности.

#### § 4. Постановка начальных и краевых условий.

Помимо уравнений, в постановку эволюционной задачи входят начальные и краевые условия. Частичная трехслойность (по скорости) уравнений (26)-(29), (40), (41) требует знания на каждом слое  $t_n$ , помимо величин  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$ , ещё и скорости  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  с предыдущего слоя. Как показывает опыт расчетов, в начальный момент времени  $t = t_0$  достаточно, вместо определения  $u$  и  $v$  по какому-либо двухслойному алгоритму, положить:  $u \equiv \dot{u}$ ,  $v \equiv \dot{v}$ .

Для реализации граничных условий удобно ввести по границе области фиктивный слой ячеек. При этом внутренние ячейки области обходятся регулярным образом. В зависимости от конкретной задачи фиктивный слой может иметь различную структуру. В частности, он может быть сцепленным с приграничными ячейками и состоять из ячеек с нулевым объемом и массой.

Граничные условия в задачах со свободной границей газа и известным внешним давлением  $P_{вн.}$  удобно задавать на первом этапе. Условия, связанные с оттоком газа наружу и внутрь области, естественным образом реализуются на втором этапе.

#### § 5. Примеры численных расчетов.

Свойства новой схемы исследовались в расчетах ряда одномерных [14,15], а также двумерных тестовых задач. Отметим, что возможность управления движением отетки существенно расширяет границы применимости методики.

Рассмотрим следующую задачу: на плоскости  $(z, z)$  (т.е.  $x, y$ ) задан эллипсоид с полуосями  $a$  и  $b$ ,  $0 < b < a$ , занятый идеальным газом с  $\gamma = 2$ . Начальные условия:  $\rho(t_0) = 1$ ,  $\varepsilon(t_0) = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 1.0$ . В момент времени  $t_0$  включается внешнее давление:

$$P_{\text{вн.}}(t) = \begin{cases} t, & t \leq 3 \\ 3, & t > 3 \end{cases}$$

Конечное время расчета  $t_k = 4$ . Нужно рассчитать процесс деформации такого сгустка газа. (На границах  $\alpha = 0$ ,  $z = 0$  задано условие симметрии).

В условиях ограниченности массы вещества, участвующей в расчете и необходимости точного определения положения внешней границы предпочтительнее использовать лагранжеву методику.

Построим в эллипсоиде четырехугольную сетку, изображенную на рис. 6, и будем вести расчет по охеме первого этапа. Суть процесса заключается в следующем: от внешней границы эллипсоида вглубь области пойдет ударная волна. Так как  $\beta < \alpha$ , то по оси  $z$  волна дойдет быстрее, чем по оси  $\alpha$ , и начнется отражение. Нежесткость четырехугольной ячейки приводит к тому, что в месте столкновения отраженной и падающей волн лагранжевы ячейки перехлестываются, и дальнейший расчет становится невозможен. Таким образом, возникает необходимость, сохраняя движение сетки по внешней границе газа лагранжевым внутри области делать это движение отличным от лагранжева, не допуская перехлеста ячеек. Это можно сделать, подключив второй этап схемы. Здесь возникают самостоятельные вопросы движения и построения сеток. Результат решения рассматриваемой задачи с простейшим способом движения сетки приведен на рис. 8.

В качестве второго примера эффективности использования СЭЛ-переменных приведем плоскую задачу о дифракции ударных волн на клине [16]: вдоль канала, изображенного на рис. 9а, идет ударная волна заданной интенсивности (число Маха  $M = 3.74$ ). Она падает на наклонную поверхность, расположенную по углом  $\varphi = 30^\circ$  к стенке канала. Происходит процесс сложного маховского отражения и формирование автомодельного решения. (Подробная постановка этой задачи, а также материалы физических и численных экспериментов даны в [16]).

Линии уровня плотности, полученные при решении задачи по п.к.р.с. на чисто эйлеровой сетке, приведены на рис. 9б. Видно, что ширина размазывания фронта отраженной ударной волны значительна. Естественно предположить, что при исполь-

зовании некоторого алгоритма движения сетки можно улучшить качество разностного решения. Простейшим способом движения может стать "лагранжевость" сетки по направлению  $X$  (рис. 10а). Результат такого расчета изображен на рис. 10б, из которого видно, как "сжался" фронт отраженной волны.

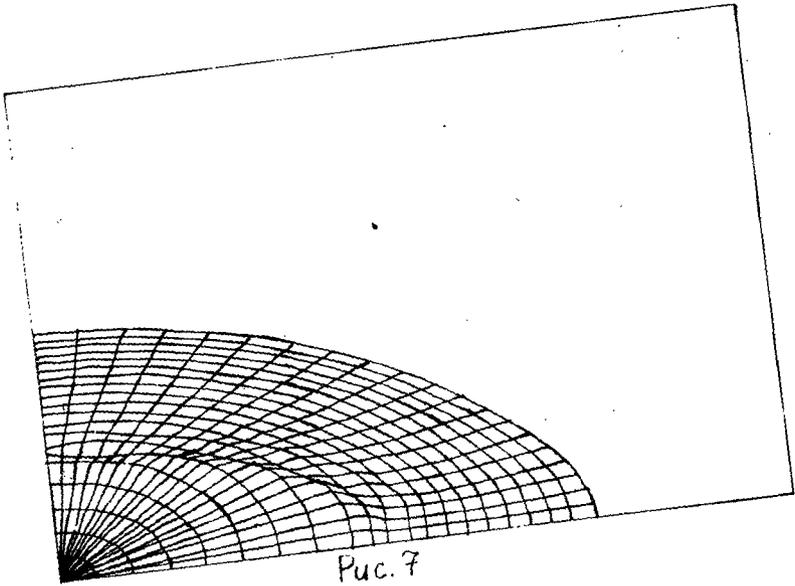
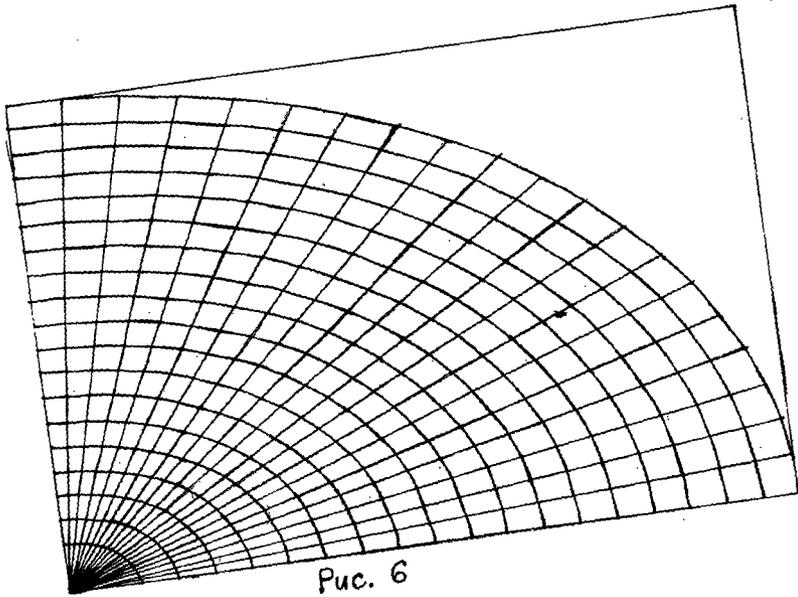
Два приведенных примера иллюстрируют расчетные возможности построенной п.к.р.с., а также показывают, что использование СЭЛ-переменных делает решение некоторых задач, во-первых, принципиально возможными, и, во-вторых, может повысить качество решения.

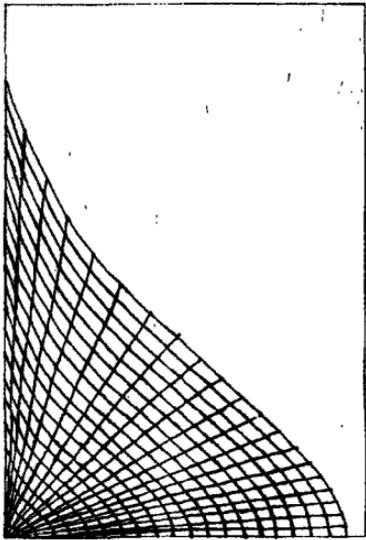
## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики.— М., Наука, 1980.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численные методы решения задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.
3. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах.— ЭВМ и МФ, 1972, т.12, № 2, с.429-440.
4. Волкова Р.А., Михайлова П.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Применение вариационного подхода для расчета газодинамических течений на сетках переменной структуры.— Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1982, № 17.
5. Арделян Н.В., Космачевский К.В., Чувашев С.Н. К вопросу о расчете двумерных газодинамических течений на меняющейся сетке.— В сб.: Библиотека программ для решения краевых задач разностными методами.— М., МГУ, 1983, с.137-146.
6. Герасимов Б.П., Самушин С.А. Расчет на неподвижной эйлеровой сетке обтекания тел изменяющейся формы.— Д.У., Минск, 1981, т.ХУП, с.1214-1221.
7. Нох В.Ф. СЭЛ-совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач.— В кн.— Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир, 1967, с.128-164.
8. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. *Arbitrary Lagrangian - Eulerian computing method for all flow speeds.* — *J. Comput. Phys.*, 1974, no.3, p.227-253
9. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сороковикова О.С. Полностью консервативная коррекция потоков в задачах газовой динамики.— Докл. АН СССР, 1984, т.274, № 3, с.524-528.
10. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Полностью консервативные дифференциально-разностные схемы газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных.— Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1982, № 19.
11. Герасимов Б.П., Самушин С.А., Анализ некоторых численных методов газовой динамики на неподвижных эйлеровых сетках.— Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1983, № 38.
12. Головизнин В.М., Коршунов В.К., Таран М.Д. Об аппроксимации

дифференциальных операторов на нерегулярных косоугольных расчетных сетках.- Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1981, № 157.

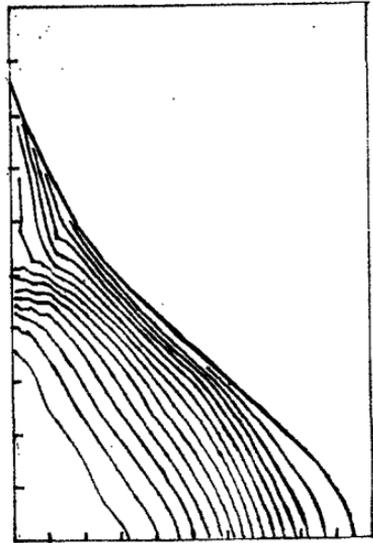
13. Роуч. П. Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир, 1980.
14. Головизнин В.М., Крахоткин И.Е., Рязанов М.А., Самарский А.А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными окрестностями.- Препринт ИПМ им.М.В. Келдыша АН СССР, 1983, № 105.
15. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сороковикова О.С. Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков.- Препринт ИПМ им.М.В. Келдыша АН СССР, 1984, № 56.
16. Ben-Dor G. - UTIAS, 1978, - (Univ. of Toronto, Canada, Rep. no. 232)



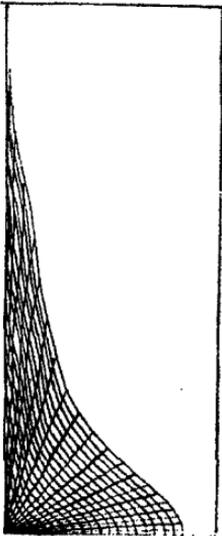


a)

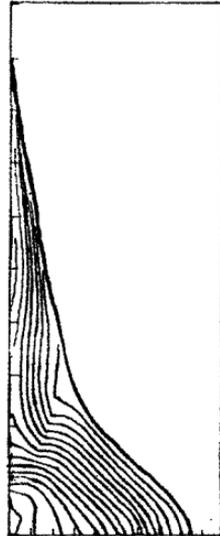
Puc. 8



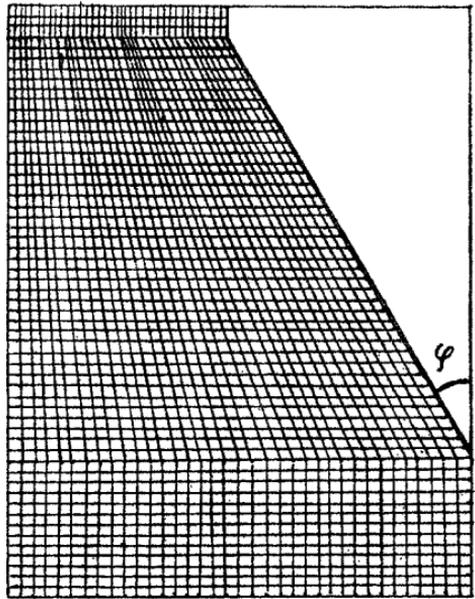
б)



в)

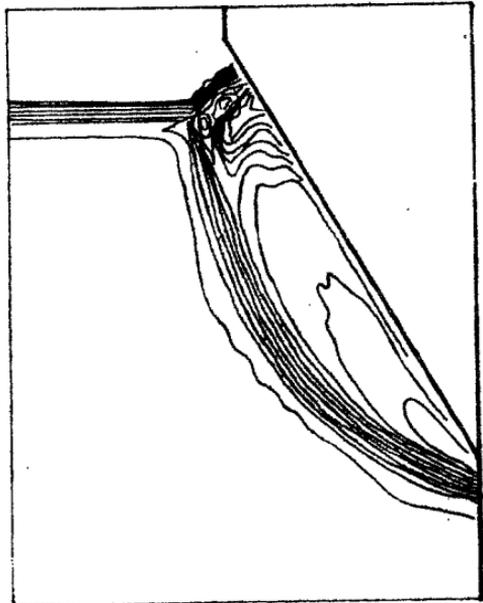


г)



a)

Рис. 9



б)

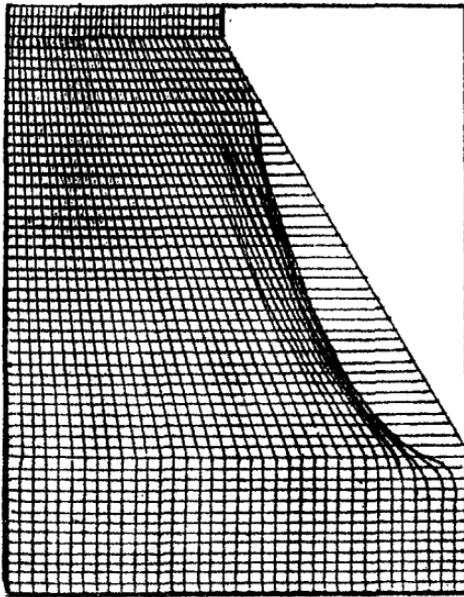
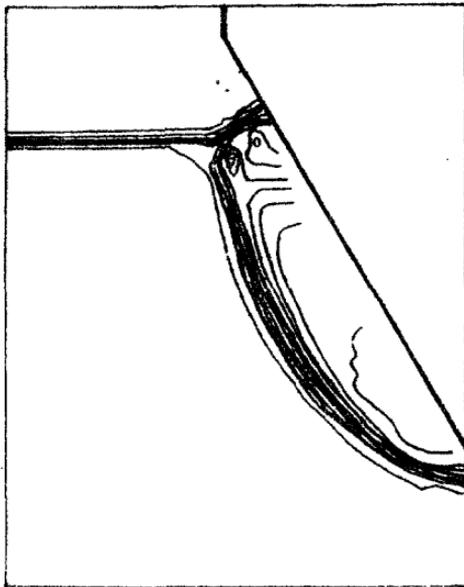


Рис.10

а)



б)

Головизнин Василий Михайлович, Рязанов Михаил Александрович,  
Самарский Александр Андреевич, Чорнов Сергей Юрьевич \* Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. \*  
Редактор А.Б. Карагичов.                      Корректор В.А. Гасилов.

---

Подписано к печати 09.01.85 г. № Т - 04810. Заказ № 28.

Формат бумаги 60x90 1/16. Тираж 200 экз.

Объем 1,3 уч.-изд.л. Цена 10 коп.

055 (02)2

©

---

Отпечатано на ротепринтах в Институте прикладной математики АН СССР  
Москва, Митусская пл. 4.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и. о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.