ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 25, 1985 № 12

УДК 517.956.4

О НОВОМ КЛАССЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ «СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ» ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ГАЛАКТИОНОВ В. А., КУРДЮМОВ С. П., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

Исследуется асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения, описывающего диффузию тепла в сплошной среде с поглощением энергии. Установлены условия, при которых решение задачи сходится при $t\to+\infty$ к какому-либо пространственно-неоднородному автомодельному решению уравнения первого порядка. Дано описание бесконечномерного множества таких решений (асимптотических «собственных функций»).

§ 1. Введение

В настоящей работе дано описание нового (по сравнению с [1]—[3]) семейства асимптотических собственных функций (с. ф.) задачи Коши для полулинейного параболического уравнения, описывающего диффузию тепла в среде с нелинейным поглощением энергии:

$$\mathrm{B}(u)\equiv u_t-\Delta u+u^\beta=0,\qquad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^N, \tag{1}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\geqslant 0,\qquad x\in\mathbf{R}^N,\quad u_0\in C(\mathbf{R}^N),\quad \sup u_0<+\infty. \tag{2}$$

Здесь $\beta>1$ — постоянная, $u_0(x)\to 0$ при $|x|\to+\infty$. По характеру изложения, обозначений и терминологии данное исследование тесно связано с работой [3], где можно найти краткий обзор литературы, посвященной изучению нестационарных процессов теплопроводности в сплошных средах с объемным поглощением.

Уравнение (1) — одно из немногих нелинейных параболических уравнений в $\mathbf{R}^N$ с достаточно подробно изученным асимптотическим поведением решений при $t\to+\infty$. В настоящее время существует весьма полное и в некоторых областях параметров β и N, по-видимому, исчерпывающее описание главных элементов аттрактора уравнения (1), как многообразия асимптотически устойчивых состояний (собственных функций), каждому из которых отвечает свое множество притяжения в пространстве начальных функций.

§ 2. Краткое описание аттрактора уравнения. Основной результат

Асимптотическое поведение при $t\to+\infty$ решения задачи (1), (2) зависит помимо β и N только, по сути дела, от характера стремления начальной функции $u_0(x)$ к нулю при $|x|\to+\infty$ (см. [1]—[3]). Если систематизировать полученные в этих работах результаты, то в упрощенном изложении возникнет такая картина (точную формулировку излагаемых ниже результатов можно восстановить по приводимым здесь ссылкам).

Пусть

(3) $u_0(x)\sim|x|^{-\alpha}, \qquad |x|\to+\infty,$

где $\alpha>0$ — постоянная. Возможны следующие случаи.

Случай 1: $\alpha=2/(\beta-1)$. Этот случай можно назвать *резонансным*, поведение $u=u(t, x)$ при $t\to+\infty$ определяют все три члена уравнения (1), и в конечном итоге $u(t, x)$ сходится в специальной норме к подходящему автомодельному решению уравнения (1) вида

(4) $u_A(t, x)=t^{-1/(\beta-1)}\theta_A(\xi), \qquad \xi=x/t^{1/2},$

где $\theta_A>0$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

(5) $$\Delta_\xi\theta_A+\frac{1}{2}\nabla_\xi\theta_A\xi+\frac{1}{\beta-1}\theta_A-\theta_A{}^\beta=0, \qquad \xi\in\mathbf{R}^N,$$
$$\theta_A(\xi)\sim|\xi|^{-2/(\beta-1)}, \qquad |\xi|\to+\infty.$$

Существование и асимптотическая устойчивость радиально-симметричных решений (5), $\theta_A=\theta_A(|\xi|)$, при произвольных $\beta>1$ установлены в [3], исследование более широкого множества несимметричных по ξ решений $u_A(t, x)$ при $\beta>1+2/N$ проведено в [1]. Отметим, что структура множества $\{\theta_A(\xi)\}$ существенно различна в случаях $\beta\geqslant1+2/N$ и $\beta<1+2/N$ (см. [3]). Это накладывает определенные требования на технику доказательства асимптотической устойчивости автомодельных решений.

Случай 2: $\alpha>2/(\beta-1)$. а. Если $\beta<1+2N$ и, например, $u_0(x)\sim\sim\exp(-|x|^2/4)$ при $|x|\to+\infty$ (формально это отвечает $\alpha=+\infty$ в (3)), то асимптотика $u(t, x)$ описывается автомодельным решением вида (4), где $\theta_A=\theta_A(|\xi|)$ удовлетворяет уравнению (5), причем

$$\theta_A(\xi)\sim|\xi|^{1/(\beta-1)-N/2}\exp(-|\xi|^2/4), \qquad |\xi|\to+\infty$$

(см. [3]). При $\beta\geqslant1+2/N$ функции $\theta_A(|\xi|)$ с подобной «экспоненциальной» асимптотикой не существует.

б. Если же $\beta>1+2/N$, то при $\alpha>2/(\beta-1)$ объемное поглощение является несущественным при $t\to+\infty$ и асимптотическое поведение решения $u(t, x)$ описывается пространственно-временной структурой автомодельных решений линейного уравнения теплопроводности

(6) $u_t=\Delta u, \qquad t>0, \quad x\in\mathbf{R}^N.$

Именно, в случае $u_0\in L^1(\mathbf{R}^N)$ (это означает, что $\alpha>N$) таким решением является фундаментальное решение

$$u_a(t, x)=\frac{C_0}{(4\pi t)^{N/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

где постоянная $C_0>0$ зависит от $u_0(x)$ (см. [2], а также [3], где близкий результат получен другим способом). В случае $2/(\beta-1)<\alpha<N(u_0\equiv L^1(\mathbf{R}^N))$ асимптотика процесса описывается другими автомодельными решениями уравнения (6):

$$u_a(t, x)=t^{-\alpha/2}\theta_a(\xi), \qquad \xi=x/t^{1/2},$$

$$\Delta_\xi\theta_a+\frac{1}{2}\nabla_\xi\theta_a\xi+\frac{\alpha}{2}\theta_a=0, \quad \xi\in\mathbf{R}^N, \quad \theta_a(\xi)\sim|\xi|^{-\alpha}, \quad |\xi|\to+\infty.$$

Доказательство сходимости $u\to u_a$, $t\to+\infty$ в этом случае разными способами проведено в [1] и [3] (в [3] также обсуждается случай $\alpha=N$).

в. При критическом значении параметра $\beta=1+2/N$, как показано в [3], возможно появление нетривиального приближенного автомодельного решения (п. а. р.). Если, например, $u_0\equiv u_0(|x|)\sim\exp(-|x|^2)$, $|x|\to+\infty$ (в этом случае $u_0\in L^1(\mathbf{R}^N)$), то $u(t, x)$ может сходиться при $t\to+\infty$ только к п. а. р. следующего довольно необычного вида:

$$u_a(t,x)=M_N(t\ln t)^{-N/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{7}$$

где $M_N=(N/2)^{N/2}(1+2/N)^{N^2/4}$ (см. [3]). П. а. р. (7) удовлетворяет уравнению

$$(u_a)_t=\Delta u_a-\frac{N}{2}\frac{u_a}{t\ln t},\qquad t>1,\quad x\in\mathbf{R}^N, \tag{8}$$

которое отличается как от исходного, так и от (6). Для этого случая в [2] ранее была получена оценка амплитуды решения задачи: $u(t, x)\geqslant\geqslant c(t\ln t)^{-N/2}$ при больших t на каждом компакте из $\mathbf{R}^N$.

Случай 3: $\alpha<2/(\beta-1)$. Анализу этого случая посвящена настоящая работа. До сих пор было известно следующее [2]: при любых $\beta>1$ имеем $t^{1/(\beta-1)}u(t, x)\to\theta_H=(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$ равномерно на каждом множестве вида $P_a(t)=\{x\in\mathbf{R}^N|\ |x|\leqslant at^{1/2}\}$, $a>0$. Однако этот результат дает фактически только оценку амплитуды решения ($u(t, x)\sim\theta_H t^{-1/(\beta-1)}$ в $P_a(t)$ при больших t) и никак не отражает пространственно-временную эволюцию начального возмущения $u_0(x)$.

В настоящей работе показано, что при $\alpha<2/(\beta-1)$ в (3) и при некоторых дополнительных ограничениях на асимптотической стадии процесса происходит своеобразное «вырождение» уравнения (1) и при $t\to+\infty$ несущественным является диффузионный член. В результате асимптотика $u(t, x)$ описывается автомодельными решениями уравнения первого порядка

$$u_t=-u^\beta,\qquad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^N, \tag{9}$$

которые имеют вид ($T=\mathrm{const}\geqslant0$)

$$u_a(t,x)=(T+t)^{-1/(\beta-1)}f_a(\xi),\qquad \xi=\frac{x}{(T+t)^{1/\alpha(\beta-1)}}. \tag{10}$$

Подстановка выражения (10) в (9) дает для функции $f_a>0$ уравнение

$$\frac{1}{\alpha(\beta-1)}\nabla_\xi f_a\xi+\frac{1}{\beta-1}f_a-f_a{}^\beta=0,\ \xi\in\mathbf{R}^N,\ f_a(\xi)\sim|\xi|^{-\alpha},\ |\xi|\to+\infty. \tag{11}$$

Уравнение (11) легко интегрируется:

$$f_a(\xi)=[(\beta-1)+C^{1-\beta}(\xi/|\xi|)|\xi|^{\alpha(\beta-1)}]^{-1/(\beta-1)},\qquad \xi\in\mathbf{R}^N, \tag{12}$$

где $C(\omega)>0$ — вообще говоря, произвольная достаточно гладкая функция, определенная на единичной сфере $S=\{\xi\in\mathbf{R}^N|\ |\xi|=1\}$. Каждому решению (10), (12), которое является п. а. р. по отношению к исходному уравнению (1), отвечает непустое множество притяжения в пространстве начальных функций $\{u_0(x)\}$, и решение задачи Коши $u(t, x)$ сходится к п. а. р. в следующем смысле:

$$f_T(t, \xi)\equiv(T+t)^{1/(\beta-1)}u(t, \xi(T+t)^{1/\alpha(\beta-1)})\to f_a(\xi),\qquad t\to+\infty, \tag{13}$$

где через $f_T(t, \xi)$ обозначено автомодельное представление $u(t, x)$, определяемое в соответствии с пространственно-временной структурой п. а. р.

(10). Множество асимптотически устойчивых п. а. р. (10), составляющих часть аттрактора уравнения (1), за счет произвола в выборе функции $C(\omega)$ в (12) является бесконечномерным при $N>1$. В одномерном случае множество функций (12) является двумерным. Любая функция $f_a(\xi)$ из (12) имеет по каждому направлению $\xi=\omega|\xi|$, вообще говоря, разные асимптотики:

$$(14)\qquad f_a(\xi)\cong C(\omega)|\xi|^{-\alpha},\qquad |\xi|\to+\infty.$$

Характерным представителем семейства $\{f_a\}$ является, например, такая функция:

$$(15)\qquad f_a(\xi)=\left[(\beta-1)+\left(\sum_{i=1}^{N}k_i\xi_i^2\right)^{\alpha(\beta-1)/2}\right]^{-1/(\beta-1)}$$

где $k_i>0$, $i=1, 2,\ldots, N$,— произвольные постоянные; ей отвечает

$$C\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)=\left(\sum_{i=1}^{N}k_i\xi_i^2/|\xi|^2\right)^{-\alpha/2}.$$

Функции (15) образуют N-мерное многообразие.

Отметим, что из (13) непосредственно следует, что в каждой точке $x\in\mathbf{R}^N$ происходит стабилизация к пространственно-однородному решению: $t^{1/(\beta-1)}u(t, x)\to\theta_H$, $t\to+\infty$, что совпадает с выводом [2]. Однако помимо этого предельное равенство (13) вместе с (12) дает наглядное представление о характере асимптотической эволюции не только «амплитуды» решения задачи Коши, но и ее эффективной пространственной ширины. Из (13), (10) следует, что эффективная ширина тепловой структуры при достаточно больших t может быть оценена по формуле $x_{\text{эф}}(t)\sim t^{1/\alpha(\beta-1)}$, причем она различна по каждому направлению $\xi=\omega|\xi|$ в зависимости от вида функции $C(\omega)$ в (12). Тем самым (13) описывает закон формирования при $t\to+\infty$ асимптотической с. ф. во всем пространстве $\mathbf{R}^N$ (в отличие от «локального» результата [2]).

В заключение еще раз обратим внимание на любопытные «трансформации», которые может претерпевать параболическое уравнение (1) на асимптотической стадии. В зависимости от величин β, N и начальной функции $u_0(x)$ оно может трансформироваться в уравнение трех типов: в линейное уравнение без стока (6), в уравнение первого порядка без диффузии (9) и в критическом случае $\beta=1+2/N$ — в уравнение (8) с линейным стоком.

§ 3. Доказательство асимптотической устойчивости вырожденных п.а.р.

Главная цель данного параграфа состоит в определении условий, при которых справедливо предельное равенство (13). Для этого, не стремясь к максимальной общности, воспользуемся весьма простым способом доказательства, близким к тому, который применялся в [3, § 3].

Теорема. *Пусть*

$$(16)\qquad \frac{(2-N)_+}{\beta-1}<\alpha<\min\left\{\frac{2}{\beta-1},N\right\}$$

и, кроме того, в (12)

(17) $C(\omega)>0, \quad \omega\in S, \qquad C(\omega)\in C^2(S).$

Тогда существует такое $p>0$, *что при любых начальных функциях* $u_0(x)$, *удовлетворяющих при некотором* $T>0$ *условию*

(18) $|u_0(\cdot)-u_a(0,\cdot)|^{(p+1)/2}\in H^1(\mathbb{R}^N)$

(u_a *определяется в соответствии с* (10), (12)), *выполняется предельное равенство*

(19) $f_T(t,\xi)\equiv(T+t)^{1/(\beta-1)}u(t;\xi(T+t)^{1/\alpha(\beta-1)})\to f_a(\xi)$

в $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ *при* $t\to+\infty$.

Оценка скорости сходимости будет получена в процессе доказательства теоремы. Для удобства сформулируем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть выполняется* (17) *и условия*

(20) $N-(\alpha+2)(p+1)<0, \qquad N+[\alpha(\beta-1)-2](p+1)>0, \qquad p>0.$

Тогда $\Delta_\xi f_a\in L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$.

Доказательство. В силу (17), особенности подынтегрального выражения в $\|\Delta_\xi f_a\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}$ возникают только в точках $|\xi|=\infty$ и $\xi=0$. Два условия (20) обеспечивают их интегрируемость (достаточно посмотреть на асимптотики: при $|\xi|\to+\infty$ она имеет вид (14), если же $\xi\to0$, то $f_a(\xi)\cong$ $\cong\theta_H-\theta_H(\beta-1)^{-2}C^{1-\beta}(\xi/|\xi|)|\xi|^{\alpha(\beta-1)}$).

Доказательство теоремы. Функция $z=u-u_a$ удовлетворяет в $\mathbb{R}_+^1\times\mathbb{R}^N$ уравнению

(21) $z_t=\Delta z-zg(t,x)+h(t,x),$

где

$$g(t,x)=\beta\int\limits_0^1[\eta u(t,x)+(1-\eta)u_a(t,x)]^{\beta-1}d\eta, \quad h(t,x)=\Delta u_a(t,x).$$

Равенство (21) представляет собой «линейное» уравнение относительно z. Отметим, что $g(t,x)>0$ в $\mathbf{R}_+^1\times\mathbf{R}^N$ и при выполнении условий (20) будет $h(t,\cdot)\in L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$ при каждом $t\geqslant0$. Ниже ограничимся формальным доказательством теоремы, используя естественные предположения относительно регулярности обобщенного решения линейного уравнения (21) (см. [1], [2]).

Пусть $z(0,x)\in L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$, $\nabla|z(0,x)|^{(p+1)/2}\in L^2(\mathbf{R}^N)$ при некотором $p>0$ (см. (18)). Умножим скалярно в $L^2(\mathbf{R}^N)$ уравнение (21) на $|z|^{p-1}z$. Тогда после интегрирования по частям в правой части получим

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\|z\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}=-\frac{4p}{(p+1)^2}\|\nabla|z|^{(p+1)/2}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^N)}+$$

$$+(|z|^{p-1}z,\Delta u_a)-(|z|^{p+1},g(t,x))\leqslant(|z|^{p-1}z,\Delta u_a), \quad t>0.$$

Пусть выполнены условия (20). Используя неравенство Гёльдера

$$(|z|^{p-1}z,\Delta u_a)\leqslant\|z\|^p_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}\|\Delta u_a\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)},$$

а также конкретный вид п. а. р. u_a (см. (10)), в силу которого

$$\|\Delta u_a(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} \equiv (T+t)^{\delta}\|\Delta_\xi f_a\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}, \quad \delta = \frac{N-(\alpha+2)(p+1)}{\alpha(\beta-1)(p+1)} > 0,$$

приходим к такой оценке:

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} \leqslant (T+t)^{\delta} m_a, \quad t>0, \quad m_a = \|\Delta_\xi f_a\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} < +\infty.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\|z(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} = \begin{cases} O(t^{\delta+1}), & \delta>-1, \\ O(\ln t), & \delta=-1, \\ O(1), & \delta<-1, \end{cases}$$

при $t\to+\infty$. И, наконец, учитывая, что, в силу (10) и определения автомодельного представления f_T,

$$\|z(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} \equiv (T+t)^{\varepsilon}\|f_T(t,\cdot)-f_a(\cdot)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{N}{\alpha(p+1)}-1\right],$$

получаем окончательную оценку скорости сходимости в (19):

$$\|f_T(t,\cdot)-f_a(\cdot)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} = \begin{cases} O(t^{\delta+1-\varepsilon}), & \delta>-1, \\ O(t^{-\varepsilon}\ln t), & \delta=-1, \\ O(t^{-\varepsilon}), & \delta<-1, \end{cases} \tag{22}$$

при $t\to+\infty$. Потребуем, чтобы $\varepsilon>0$, т. е.

$$N-\alpha(p+1)>0. \tag{23}$$

Тогда, как следует из (22), при $\delta\leqslant-1$ всегда имеет место сходимость. Если же $\delta>-1$, то

$$\delta+1-\varepsilon \equiv \frac{1}{\alpha}\left[\alpha-\frac{2}{\beta-1}\right]<0,$$

что также обеспечивает нужный результат.

Остается проверить, что система неравенств (23), (20) при значениях α из (16) всегда имеет решение $p>0$. Перепишем их в таком эквивалентном виде:

$$p<\frac{N-\alpha}{\alpha}, \qquad p>\frac{N-(\alpha+2)}{(\alpha+2)}, \qquad p<\frac{N-[2-\alpha(\beta-1)]}{2-\alpha(\beta-1)}. \tag{24}$$

Из первого сразу вытекает необходимость ограничения $\alpha<N$ и, следовательно, правого неравенства (16). Третье неравенство (24) означает, что должно быть $2-\alpha(\beta-1)<N$, т. е. $\alpha>(2-N)_+(\beta-1)^{-1}$. Легко видеть, что второе и третье неравенства (24) в случае $N>\alpha+2$ не противоречат друг другу, так что искомое значение $p>0$ существует. Этим завершается доказательство.

Замечания. 1. Ограничение $C(\omega)>0$ в (17), вообще говоря, несущественно. Например, в одномерном случае теорема определяет также условия стабилизации к п.а.р. (10), где $f_a(\xi)$ может иметь, в частности, такой «экзотический» вид:

$$f_a(\xi) = \begin{cases} (\beta-1)^{-1/(\beta-1)}, & \xi\leqslant0, \\ [(\beta-1)+\xi^{\alpha(\beta-1)}]^{-1/(\beta-1)}, & \xi>0. \end{cases}$$

Здесь $C(+1)=1$, $C(-1)=0$, $S=\{|x|=1\}$. Ограничения (16) на величину α при $N=1$ таковы: если $1<\beta\leqslant3$ – то $1/(\beta-1)<\alpha<2/(\beta-1)$, если $\beta>3$ – то $1/(\beta-1)<\alpha<1$.

2. При доказательстве теоремы не использовалась линейность оператора $\partial/\partial t-\Delta$ в (1). Поэтому тем же методом можно провести аналогичное исследование асимптотического поведения решений квазилинейного уравнения $u_t=\Delta u^{\sigma+1}-u^\beta$, где $\sigma>0$, $\beta>\sigma+1$ — постоянные.

Сделаем еще одно замечание. Итак, аттрактор уравнения теплопроводности со стоком (1) в $\mathbf{R}^N$ при $N>1$ является бесконечномерным (при $N=1$ — по крайней мере двумерным). Более того, бесконечномерно и множество его автомодельных решений вида (4). Рассмотрим теперь уравнение теплопроводности с источником тепла $u_t=\Delta u^{\sigma+1}+u^\beta$, $t>0$, $x\in\mathbf{R}^N$, где $\sigma>0$, $\beta>\sigma+1$ — постоянные. Оно также допускает автомодельные решения, эволюционирующие со временем в режиме с обострением:

$$u_A(t,x)=(T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\xi),\qquad \xi=\frac{x}{(T_0-t)^m},\tag{25}$$

$m=[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)$, $T_0>0$ — постоянная (время обострения). Это с.ф. горения нелинейной диссипативной среды (см. обзор в [4]). Функция $\theta(\xi)\geqslant0$, $\theta\to0$ при $|\xi|\to+\infty$ удовлетворяет в $\mathbf{R}^N$ эллиптическому уравнению

$$\Delta_\xi\theta^{\sigma+1}-m\nabla_\xi\theta\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta+\theta^\beta=0.\tag{26}$$

При $\beta>\sigma+1$, т. е. при $m>0$, оно отличается от квазилинейного аналога уравнения (5) только знаками при трех последних членах. Но тем не менее множество решений уравнения (26) является, по всей видимости, дискретным. Для случая $N=1$ это установлено в [5]—[7], при $N>1$ функции $\theta(\xi)$ построены численно в [8] (см. также список литературы в [4], [3]). Они могут иметь весьма разнообразную пространственную структуру.

Таким образом, принципы организации аттрактора квазилинейных параболических уравнений теплопроводности со стоком и источником существенно различны. Асимптотическая устойчивость неограниченных автомодельных решений (25) при $\beta\in(1,\sigma+1]$ доказана в [9].

Литература

1. *Kamin S., Peletier L. A.* Large time behavior of solutions of the heat equation with absorption.— Preprint Math. Inst. Univ. Leiden, 1983, № 25.
2. *Gmira A., Véron L.* Large time behavior of the solution of a semilinear parabolic equation in $\mathbf{R}^N$.— J. Different. Equat., 1984, v. 53, p. 258—276.
3. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотических «собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения.— Матем. сб., 1985, т. 126(168), № 4, с. 435—472.
4. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I.— Дифференц. ур-ния, 1983, т. 19, № 12, с. 2123—2140.
5. *Самарский А. А. и др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
6. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, с. 23, № 2, с. 380—390.
7. *Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.* Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной.— Дифференц. ур-ния, 1983, с. 19, № 7, с. 1107—1114.
8. *Курдюмов С. П. и др.* Архитектура многомерных тепловых структур.— Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 5, с. 1071—1075.
9. *Галактионов В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t=(u^\sigma u_x)_x+u^{\sigma+1}$.— Дифференц. ур-ния, 1985, т. 21, № 7, с. 1126—1134.

Поступила в редакцию 18.I.1985