УДК 517.956

Об асимптотических «собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения

Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.

§ 1. Введение

1. Постановка задачи. В настоящей работе изучается асимптотическое поведение (при $t\to+\infty$) решений задачи Коши для полулинейного параболического уравнения, описывающего диффузию тепла в среде с нелинейным объемным стоком энергии

$$\mathbf{B}(u)\equiv u_t-\Delta u+u^\beta=0,\ t>0,\ x\in R^N, \tag{1.1}$$

$$u(0,\ x)=u_0(x)\geqslant 0,\ x\in R^N;\ u_0\in C(R^N),\ \sup u_0<\infty. \tag{1.2}$$

Здесь $t\geqslant 0$ и $x\in R^N$ — соответственно временная и пространственная координаты, $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{N}\partial^2/\partial x_i^2$ — обозначение оператора Лапласа, $\beta>1$ — фиксированная постоянная. Относительно начальной функции u_0 в (1.2) предполагается, что $u_0(x)\to 0$ при $|x|\to+\infty$. Ограниченное решение задачи (1.1), (1.2) существует, единственно и является классическим в любой области вида $[\tau,\ +\infty)\times R^N$, $\tau>0$ (см., например, [1]). Кроме того, нетрудно показать, что при $\beta>1$ решение $u=u(t,\ x)$ строго положительно в $R_+^1\times R^N$, если $u_0\not\equiv 0$.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов, скажем несколько слов о том физическом смысле, который вкладывается в данное исследование. Здесь мы ограничиваемся кратким пояснением понятия «собственной функции» нелинейной диссипативной среды, более подробно см. об этом в приведенном ниже обзоре и в цитируемой там литературе.

В неограниченную теплопроводную среду с нелинейным поглощением, диффузия тепла в которой описывается уравнением (1.1), внесено извне некоторое начальное температурное возмущение $u(0,\ x)=u_0(x)\geqslant 0$, $u_0\not\equiv 0$, достаточно произвольного вида. Какова дальнейшая судьба этого возмущения? Оказывается, в результате по истечении определенного времени в среде, как правило, формируется некоторое устойчивое пространственно-неоднородное образование — нестационарная тепловая структура со своими законами эволюции при больших t. Каждой из них отвечает свое множество притяжение $\mathscr{W}$ в пространстве начальных функций, при этом «законы» эволюции решения при больших временах не зависят от специфики начального возмущения (т. е. они одни и те же для любых $u_0\in\mathscr{W}$). Другими словами, пользуясь терминологией [2], [3], можно сказать, что данная нелинейная среда имеет свой набор устойчивых «собственных функций» (сокращенно с. ф., в дальнейшем кавычки мы будем опускать), которые определяют асимптотическое поведение решений задачи (1.1), (1.2) при достаточно произвольных на-

чальных возмущениях u_0. Подчеркнем, что для (1.1) рассматривается задача Коши без краевых условий, что позволяет говорить именно о с. ф. среды, не подверженной каким-либо внешним воздействиям. Разумеется, эта постановка является естественной и с позиций качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными (что, как не само уравнение, должно определять асимптотическое поведение решений задачи). Однако мы хотим особо отметить, что понятие с. ф. нелинейной среды играет важную роль в описании сложных нестационарных физических, химических, биологических и др. процессов, в частности, процесса морфогенеза в активных биологических средах (см. об этом в [2], [4], [5] и приведенном в п. 3 этого параграфа кратком обзоре).

Возникает вопрос, что представляет из себя набор с. ф. рассматриваемой нелинейной среды (1.1) и отвечающее каждой из них множество притяжения $\mathscr{W}$ в пространстве начальных возмущений (1.2). Другими словами, ставится проблема конструктивного описания аттрактора нелинейного эволюционного параболического уравнения (1.1).

2. Основные результаты. Значительная часть работы посвящена исследованию одного семейства частных решений уравнения (1.1) радиально симметричных автомодельных решений следующего вида:

$$u_A(t, x) = (T+t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T+t)^{1/2}}, \tag{1.3}$$

где $T \geqslant 0$ — произвольная постоянная, а функция $\theta_A(\xi) > 0$ определяется путем интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается после подстановки (1.3) в исходное уравнение (1.1):

$$\mathbf{A}_R(\theta_A) \equiv \Delta_\xi\theta_A + \frac{1}{2}\theta_A'\xi + \frac{1}{\beta-1}\theta_A - \theta_A^\beta = 0, \quad \xi > 0, \tag{1.4}$$

где Δ_ξ — оператор Лапласа в радиально симметричном случае $\Delta_\xi = \xi^{1-N}(d/d\xi)(\xi^{N-1}(d/d\xi))$. Оно имеет очевидное однородное решение

$$\theta_A(\xi) = \theta_H \equiv (\beta-1)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad \xi \geqslant 0, \tag{1.5}$$

все остальные должны удовлетворять краевым условиям

$$\theta_A'(0) = 0, \ \theta_A(+\infty) = 0. \tag{1.6}$$

В силу первого из них функция (1.3) является решением уравнения (1.1) всюду в $R_+^1 \times R^N$.

В § 2 установлено существование бесконечного набора различных нетривиальных автомодельных функций $\theta_A(\xi) > 0$, определенных при любых $\xi \geqslant 0$. Показано, что структура семейства $\{\theta_A\}$ различна в случаях $\beta \geqslant 1+2/N$ и $1 < \beta < 1+2/N$, причем это различие в конечном итоге определяет главные особенности асимптотического поведения решений задачи при $\beta \geqslant 1+2/N$ и $\beta \in (1, 1+2/N)$ (смысл этого вывода разъясняется в конце работы).

В § 3 установлено, что каждое автомодельное решение, вообще говоря, является «центром притяжения» широкого множества решений задачи (1.1), (1.2), отвечающих различным «неавтомодельным» начальным распределениям $u_0(x)$, т. е. частные решения $u_A(t, x)$ являются асимптотически устойчивыми относительно не слишком «больших» возмущений

«автомодельной» начальной функции $u_A(0, x)$, не выводящих $u_0(x)$ из множества притяжения $\mathscr{W}_A$. Тем самым, функции u_A — искомые (автомодельные) с. ф. нелинейной среды и являются элементами аттрактора эволюционного уравнения. Таким образом, здесь возникает ставшая уже привычной ситуация, когда с. ф. представляют собой подходящие автомодельные (инвариантные) решения параболического уравнения, которые в результате из разряда просто отдельных частных решений уравнения переходят в разряд глобальных аттракторов широкого множества достаточно произвольных решений (см. библиографию в [6]—[8]). Отметим также, что автомодельные закономерности развития процесса часто сохраняются и при достаточно «сильных возмущениях» нелинейного оператора рассматриваемого параболического уравнения, что позволяет в ряде случаев построить полную систему так называемых приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения с коэффициентами достаточно произвольного вида [6], [7], [9]—[12] (однако нередко «порождающие» автомодельные решения лежат в семействе инвариантных решений уравнения, не имеющего, на первый взгляд, ничего общего с рассматриваемым; подобные «вырожденные» п. а. р., удовлетворяющие уравнению более низкого порядка, чем исходное, построены в [9], [7], [10]). Нетривиальные п. а. р. существуют и у задачи (1.1), (1.2) при «критическом» значении параметра $\beta=1+2/N$, а также при некоторых начальных функциях u_0 в случае $\beta>1+2/N$.

В § 3 показано, что при $\beta\in(1, 1+2/N)$ автомодельные решения исчерпывают все множество радиально симметричных с. ф.[1] При этом структура множества притяжения $\mathscr{W}_A$, отвечающая решению (1.3) с фиксированной автомодельной функцией $\theta_A(\xi)$, определяется с помощью верхних $\theta_+(\xi)$ и нижних $\theta_-(\xi)$ ($\theta_+\geqslant\theta_-$ в R_+^1) решений уравнения (1.4), на основе которых в § 2 доказывалось существование данного решения задачи (1.4), (1.6) (и вообще, отметим, что доказанная в § 3 асимптотическая устойчивость решений (1.3) одновременно позволяет установить некоторые свойства решений задачи (1.4), (1.6), которые довольно трудно получить непосредственно из анализа обыкновенного дифференциального уравнения).

В случае $\beta\geqslant1+2/N$ выделены классы решений задачи (1.1), (1.2), которые эволюционируют при $t\to+\infty$ по другим, чем в (1.3), «неавтомодельным законам». При $\beta>1+2/N$ асимптотическое поведение большинства из них описывается семейством различных автомодельных решений уравнения теплопроводности без стока

$$v_t=\Delta v,\ t>0,\ x\in R^N, \tag{1.7}$$

но, как уже упоминалось выше, существуют и такие решения, асимптотическая эволюция которых описывается нетривиальными п. а. р. Для случая $\beta=1+2/N$ в § 3 выделено семейство решений задачи (1.1), (1.2), асимптотическое поведение которых при $t\to+\infty$ описывается п. а. р.

$$u_a(t, x)=[(T+t)\ln(T+t)]^{-\frac{N}{2}}g_*(\xi),\quad \xi=\frac{|x|}{(T+t)^{1/2}}. \tag{1.8}$$

Оно отличается от автомодельного решения (1.3) (при $\beta=1+2/N$) до-

[1] Вопрос существования не радиально симметричных автомодельных решений (1.3), где $\xi=x(T+t)^{-1/2}\in R^N$ остается открытым. Отметим, что в указанный в [13] класс уравнений, все решения которого являются симметричными относительно некоторой точки, см. (1.4), $\xi\in R^N$ не попадает.

полнительным логарифмическим множителем. Функция $g_*(\xi)$ определяется, вообще говоря, единственным образом (см. § 3). Эти результаты уточняют соответствующие выводы [14]. Отметим, что в [14], кроме того, получены достаточные условия асимптотической устойчивости однородного автомодельного решения (1.3) с функцией (1.5), которые, как показано в данной работе, являются и необходимыми.

П. а. р. (1.8) удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \Delta u_a - \frac{N}{2} \frac{u_a}{(T+t)\ln(T+t)}. \tag{1.9}$$

Любопытно проследить, как меняется структура аттрактора исходного параболического уравнения (1.1) в зависимости от изменения параметра $\beta > 1$ (в случае радиально симметричных решений). При $\beta \in (1, 1+2/N)$ аттрактор целиком состоит из однопараметрического семейства автомодельных решений типа (1.3) и, следовательно, его размерность равна 1. При $\beta > 1+2/N$, как уже отмечалось, в число с. ф. дополнительно входит многообразие автомодельных решений уравнения теплопроводности (1.7) без стока, который при определенных ограничениях на начальную функцию $u_0(x)$ является несущественным при $t \to +\infty$. Последнее семейство в силу линейности (1.7) является уже двумерным. Значение параметра $\beta = 1+2/N$ тем самым является «критическим», при переходе через него меняется тип уравнения для одного набора с. ф. ((1.1) переходит в (1.7)) и их структура, а также, по-видимому, размерность аттрактора. При этом в точке $\beta = 1+2/N$ возникает новая асимптотика — п. а. р. (1.8), удовлетворяющее уравнению (1.9), которое заметно отличается от исходного.

Исследование асимптотического поведения решений задачи (1.1), (1.2) во многом опирается на результаты и представления, развитые в работах [2], [3], [15]—[17] (см. также библиографию в [2], [4], [5], [7]), которые посвящены анализу неограниченных автомодельных с. ф. (режимов с обострением), отвечающих квазилинейному уравнению теплопроводности с источником

$$u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in R^N, \tag{1.10}$$

где $\sigma \geqslant 0$, $\beta > 1$ — постоянные, $\nabla(\cdot) = \mathrm{grad}_x(\cdot)$ (см., кроме того, [18], где рассматривались глобальные автомодельные решения уравнения (1.10) при $\beta > 1+2/N$).

Замечание. В §§ 2 и 3 мы старались как можно реже использовать полулинейную структуру уравнения (1.1), т. е. возможность сведения задачи (1.1), (1.2) к эквивалентному интегральному уравнению за счет обращения оператора $\partial/\partial t - \Delta$. Поэтому большинство результатов работы без принципиальных изменений переносятся на случай квазилинейного уравнения

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1} - u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in R^N, \tag{1.11}$$

где $\beta > \sigma+1$, $\sigma > 0$ (некоторые конкретные возможности такого обобщения обсуждаются в тексте §§ 2 и 3). Построение верхних и нижних решений уравнения (1.11) следует согласовать с пространственно-временной структурой его автомодельных решений, которые в этом случае имеют вид

$$u_A(t, x) = (T+t)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T+t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}}. \tag{1.12}$$

Для функции $\theta_A \geqslant 0$ тогда получается вырождающееся обыкновенное дифференциальное уравнение, которое допускает финитные обобщенные решения. Здесь также возникает «критическое» значение параметра, равное $\beta_* = \sigma + 1 + 2/N$, причем структура семейства $\{\theta_A\}$ и асимптотические свойства решений уравнения с частными производными существенно различаются в случаях $\beta \geqslant \sigma + 1 + 2/N$ и $\beta \in (\sigma + 1, \sigma + 1 + 2/N)$ (отметим, что эта же «критическая» величина β_* проявляется и в случае уравнения с источником (1.8) [2], [16], она тем самым характеризует некоторые общие закономерности эволюции глобальных решений уравнений (1.9) и (1.8) при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$). Несколько подробнее о квазилинейном уравнении (1.11) будет сказано в приведенном ниже обзоре.

3. Краткий обзор результатов исследования нестационарных решений нелинейных уравнений теплопроводности со стоком. Предварительно отметим ту роль, которую, на наш взгляд, играет изучение нестационарных решений нелинейных параболических уравнений (к ним относятся, в частности, (1.10), (1.1) и (1.11)) в теории диссипативных структур и синергетике, которые интенсивно развиваются в последнее время, см. [19]—[24]. Сейчас известно и достаточно подробно изучено большое число различных диссипативных структур, возникающих в открытых термодинамических системах за счет взаимодействия, фактически, трех «противоборствующих» процессов: диффузии (диссипативный процесс) и, особо подчеркнем, процессов выделения и поглощения «энергии», т. е. действия объемных источников и стоков. В результате, в среде по истечении определенного времени могут возникать устойчивые стационарные или квазистационарные периодические структуры сложной формы (например, в известной модели «брюсселятор» [19], [21], [24]), периодические бегущие волны (бора в [25]) и др. Специально отметим, что во всех таких задачах проявляется эффект локализации эволюционных процессов на определенных длинах или участках среды, в каждом из которых они протекают как бы независимо. Можно утверждать, что локализация в том или ином виде — необходимая предпосылка возникновения сложных структур в диссипативной среде. Более того, оценка размеров области локализации, а они часто могут быть не произвольными и определяются внутренними свойствами среды, позволяет заранее предсказать спектр с. ф., которые могут возникать и устойчиво эволюционировать в рассматриваемой области (процесс самоорганизации в среде [2]).

С нашей точки зрения для понимания «законов» взаимодействия процессов выделения и поглощения «энергии», формирующих, в конечном счете, спектр диссипативных структур, необходимо предварительно изучить их в простейших моделях по отдельности, т. е. отдельно рассмотреть уравнение с источником и уравнение со стоком. На этом пути сразу возникает понятие существенно нестационарных диссипативных структур, амплитуда и пространственный профиль которых быстро меняется со временем. Здесь уместно провести аналогию, например, с общепринятыми выводами о том, что в окрестности точки бифуркации стационарных, квазистационарных или периодических решений бесконечномерных нелинейных эволюционных уравнений число степеней свободы системы снижается до небольших конечных значений, что, в общем, свидетельствует о существовании общих закономерностей развития неустойчивостей в различных нелинейных средах (см. [26]—[28]). Мы

считаем, что в элементарных нестационарных моделях «нелинейная теплопроводность» + «источник» (или + «сток») должна содержаться такая же общность, относящаяся уже к характеру протекания существенно нестационарных процессов, т. е. развитию различных быстрых (или даже сингулярных по времени) процессов присущи общие черты, которые на качественном уровне проявляют некоторые простейшие модели. Эта общность, несомненно, присутствует в процессах, протекающих в «сверхбыстрых» режимах с обострением (см. [2], [5] и приведенную там библиографию).

Для сравнения ниже в весьма сжатой форме указывается проблематика и основные направления исследования режимов с обострением, возникающих в нелинейных средах с объемным энерговыделением — процессом, противоположным поглощению.

3.1. Об уравнениях с источником. Свойства нестационарных решений квазилинейных параболических уравнений с объемным энерговыделением, например, вида (1.10) изучались в большом числе работ, см. обзоры в [5], [2]. Сейчас можно говорить об установлении некоторых общих закономерностях протекания таких процессов. В частности, большой интерес с точки зрения приложений представляет изучение тепловых режимов с обострением, которым отвечают неограниченные решения уравнения (1.10), существующие в течение конечного времени, с амплитудой, неограниченно возрастающей на конечном интервале изменения времени: $\sup\limits_x u(t, x) \to +\infty$ при $t \to T_0^- < +\infty$ ($t = T_0$ — момент обострения). Было установлено, что в задаче Коши для (1.10) при значениях параметров нелинейной среды $\beta \geqslant \sigma + 1$ неограниченные решения локализованы в пространстве в том смысле, что $u(t, x) \to +\infty$, $t \to T_0^-$ в ограниченной области (при $\beta > \sigma + 1$ — LS-режим — на множестве меры нуль, при $\beta = \sigma + 1$ — на фундаментальной «длине», зависящей только от величины $\sigma > 0$, профиль немонотонного начального возмущения $u_0(x)$ при этом роли не играет). Эффект локализации при $\beta \geqslant \sigma + 1$ в конечном итоге определяет возможность возникновения в среде сложных структур (с. ф.), развивающихся в режиме с обострением. Исследования показали, что сложные с. ф. с большим числом точек экстремума на пространственном профиле представляют собой автомодельные решения уравнения (1.10) следующего вида (ср. (1.3)):

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta - 1}} \theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(T_0 - t)^m}, \tag{1.13}$$

где $m = [\beta - (\sigma + 1)]/2(\beta - 1)$ и функция $\theta_A(\xi) \geqslant 0$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\nabla_\xi (\theta_A^\sigma \nabla_\xi \theta_A) - m \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta_A}{\partial \xi_i} \xi_i - \frac{1}{\beta - 1} \theta_A + \theta_A^\beta = 0, \qquad \xi \in R^N, \tag{1.14}$$

$\theta_A(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to +\infty$. В недавней работе [29] показано, что уравнение (1.14) при $\beta > \sigma + 1$ в многомерном случае имеет определенный набор не радиально-симметричных решений весьма разнообразного вида, например, решение, эффективно локализованное в области, представляющую из себя звезду (о более ранних исследованиях уравнения (1.14) см. в [2], [3], [5], [15], [17]). Каждое из таких решений определяет в соответствии с (1.13) нестационарную диссипативную структуру, развиваю-

щуюся при $t \to T_0^-$ в режиме с обострением, со своей «архитектурой» пространственного профиля, своей областью локализации и присущими только ей «законами» объединения элементарных структур в более сложные.

Эффект локализации тепла проявляется также в задачах для уравнения без источника, например, вида

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \ t > 0, \ x > 0, \tag{1.15}$$

где объемное энерговыделение моделируется действием на границе полупространства $x > 0$ режима с обострением (см. [30] и приведенный там список литературы). Развитые специальные методы исследования нелинейных параболических уравнений позволяют провести достаточно подробное исследование неограниченных решений уравнения теплопроводности с источником общего вида

$$u_t = \nabla (k(u) \nabla u) + Q(u), \tag{1.16}$$

где $k \geqslant 0$, $Q \geqslant 0$ — практически произвольные функции (соответственно коэффициент теплопроводности и мощность объемных источников энергии), см. [5]. Это в первую очередь касается: 1) условий возникновения режимов с обострением, 2) условий на k, Q проявления эффекта локализации тепла, 3) в некоторой общности удается решить и вопрос о «тонкой» пространственно-временной структуре неограниченных решений — с. ф. нелинейной среды (1.16).

Тем не менее, ряд важных проблем в теории режимов с обострением в теплопроводных средах остается нерешенными даже по отношению к уравнению (1.11) со степенными нелинейностями. Здесь мы выделим две из них. Первая состоит в конструктивном описании всего набора с. ф. нелинейной среды, т. е. всех возможных решений эллиптического уравнения (1.14) (результаты, полученные в [29], во многом опирались на качественные и численные методы). В этой связи отметим, что (1.14) не допускает эквивалентной вариационной формулировки, поэтому к ней, по-видимому, не применимы развитые в последние годы вариационные методы исследования нелинейных эллиптических задач в R^N (см., например, работу [31]). Вторая проблема состоит в исследовании асимптотической устойчивости при $t \to T_0^-$ всех с. ф., которое позволяет провести «эволюционный отбор» с. ф. нелинейной среды. Существующие здесь трудности, в общем, связаны с сингулярностью решения по времени и его неустойчивостью в обычном смысле по отношению к возмущениям начальной функции. Надо сказать, что этот вопрос остается открытым и в других задачах для нелинейных уравнений и систем типа Шредингера, гиперболических уравнений и т. д. (см. об этом, например, в [5]). Отметим, что такая же проблема возникает для уравнений (1.1) или (1.11) с поглощением при значениях $\beta \in (0, 1)$, когда возможен сингулярный процесс полного остывания за конечное время; см. ниже.

С указанной выше точки зрения свойства нестационарных решений параболических уравнений с поглощением изучены не столь подробно, как в случае уравнений с источниками. Это в основном относится к задаче Коши, в которой естественным образом возникает понятие с. ф. нелинейной среды. Последнее в значительной мере стимулировало выполнение данной работы. В то же время исследованию уравнений с поглощением (1.1), (1.11), а также уравнения общего вида

$$u_t = \nabla (k(u) \nabla u) - Q(u), \ k \geqslant 0, \ Q \geqslant 0 \tag{1.17}$$

посвящена большая литература, получен ряд важных и интересных результатов; на некоторых из них мы сейчас кратко остановимся.

3.2. Уравнение нелинейной теплопроводности со стоком. Впервые обратили внимание на интересное свойство локализации тепловых возмущений в средах с поглощением авторы работы [32]. Там было, в частности, построено простое частное обобщенное решение задачи Коши для уравнения с линейным стоком

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1} - u,\ t > 0,\ x \in R^N,$$

которое имеет вид

$$u(t, x) = \exp(-t)\,[x_0(t)]^{-N}\left[\frac{\sigma}{2(2+N\sigma)}\left(a^2 - \frac{|x|^2}{x_0^2(t)}\right)^+\right]^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad (1.18)$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная и

$$x_0(t) = \left\{\frac{1}{\sigma}[1 - \exp(-\sigma t)]\right\}^{\frac{1}{2+N\sigma}}, \quad t > 0 \qquad (1.19)$$

(в (1.18) введено обозначение $(p)^+ = \{p$, если $p \geqslant 0$; 0, если $p < 0\}$). В каждый момент времени $t > 0$ это решение финитно по x, носитель обобщенного решения — шар радиуса $R(t) = ax_0(t)$. При этом, как следует из (1.19), $R(t)$ возрастает, причем $R(t) \to a\sigma^{-1/(2+N\sigma)} < +\infty$ при $t \to +\infty$, т. е. тепловые возмущения проникают на конечное расстояние и локализованы в области $\{|x| < a\sigma^{-1/(2+N\sigma)}\}$ в течение всего времени. В [32] приведены также другие примеры локализованных решений уравнения (1.17) и (1.1), $\beta \in (0, 1)$, в одномерном случае. В последующей работе [33] локализованные решения уравнения (1.11), $N = 1$, при $\beta \neq 1$ были построены численно.

Затем в работе [34] были доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений (1.17), $N = 1$, установлена справедливость теорем сравнения решений, введены понятия обобщенных верхних и нижних решений (супер и субрешений, см. также [35]). На основе этого аппарата в [34] с помощью сравнения со стационарными решениями были получены достаточные (и близкие к необходимым) условия локализации тепловых возмущений. Для уравнения (1.11), $N = 1$, они выглядят следующим образом: если $\beta < \sigma + 1$, то финитные тепловые возмущения локализованы, при $\beta > \sigma + 1$ локализации нет и образующаяся тепловая волна проникает как угодно далеко (как потом было показано в [36], это же имеет место и при $\beta = \sigma + 1$). Для уравнения (1.17), $N = 1$, общего вида достаточное условие локализации выглядит следующим образом [34]:

$$\int_0^1 \left[\int_0^\eta Q(\varphi^{-1}(\zeta))\,d\zeta\right]^{-1/2} d\eta < +\infty, \qquad (1.20)$$

где φ^{-1} — функция, обратная к $\varphi(u) = \int_0^u k(s)\,ds$, $u \geqslant 0$. Для уравнения (1.11), $N = 1$, (1.20) является необходимым и достаточным условием локализации финитных решений.

В [34], кроме того, изучен любопытный эффект полного остывания за конечное время: если функция $Q(u) > 0$, $u > 0$, удовлетворяет усло-

вию

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{Q(\eta)} < +\infty, \tag{1.21}$$

то при любом ограниченном начальном возмущении $u_0(x) \geqslant 0$ найдется такое $T>0$, что $u(t, x) \equiv 0$ при всех $t \geqslant T$ (этот результат получен на основе сравнения решения задачи Коши с пространственно-однородным решением $U(t)$, удовлетворяющим обыкновенному дифференциальному уравнению $U'(t) = -Q(U(t))$; для (1.1) и (1.11) условие (1.21) означает, что $\beta \in (0, 1)$). Дифференциальные свойства обобщенных решений уравнения (1.11), $N=1$, изучались в [37]; показано, что обобщенное решение $u(t, x)$ обладает ограниченной производной $(u^\lambda)_x$, где $\lambda = \max\{\sigma, (\sigma+1-\beta)/2\}$ (этот результат является точным).

В [35] с помощью построения верхних и нижних решений получены условия движения или неподвижности в течение конечного времени финитного фронта тепловой волны, описываемой уравнением (1.11), $N=1$. В [38] определены условия движения тепловой волны вперед («волна разогрева») или назад («волна охлаждения»). Во всех случаях характер движения фронта зависит от асимптотического поведения $u_0(x)$ в окрестности начальной точки вырождения. По поводу обобщения результатов [35] на случай уравнения (1.17) общего вида см. [39]. Весьма наглядно возможные режимы движения тепловой волны, а также эффект полного остывания иллюстрирует следующее решение уравнения (1.11) при $\beta = 1-\sigma$, $\sigma \in (0, 1)$, см. [38], [39]:

$$u_A(t, x) = \psi(t)\,\theta(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{\varphi(t)},$$

где $\psi(t) \geqslant 0$ и $\varphi(t) \geqslant 0$ — соответственно амплитуда и ширина тепловой структуры:

$$\psi^\sigma(t) = a_0 t^{-\frac{N\sigma}{2+N\sigma}} \left(A - b_0 t^{\frac{2(1+N\sigma)}{2+N\sigma}}\right)^+,$$

$$\varphi^2(t) = c_0 t^{\frac{2}{2+N\sigma}} \left(A - b_0 t^{\frac{2(1+N\sigma)}{2+N\sigma}}\right)^+.$$

Здесь $A>0$ — произвольная постоянная,

$$a_0 = \left[\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma}\right]^{\frac{N\sigma}{2+N\sigma}}, \quad b_0 = \frac{\sigma^2}{4(1+N\sigma)} \left[\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma}\right]^{\frac{2(1+N\sigma)}{2+N\sigma}},$$

$$c_0 = \left[\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma}\right]^{\frac{2}{2+N\sigma}}$$

и функция $\theta(\xi) \geqslant 0$ финитна: $\theta(\xi) = [(1-\xi^2)^+]^{1/\sigma}$. Размеры носителя данного обобщенного решения меняются со временем немонотонно. На интервале $(0, t_*)$, где

$$t_* = \left[\frac{A}{(2+N\sigma)\,b_0}\right]^{\frac{2+N\sigma}{2(1+N\sigma)}},$$

ширина структуры $\varphi(t)$ возрастает, затем поверхность теплового «фронта» начинает двигаться назад к началу координат $x=0$, и, наконец, в

момент времени

$$t = T_0 = \left(\frac{A}{b_0}\right)^{\frac{2+N\sigma}{2(1+N\sigma)}}$$

$\psi(t)$ и $\varphi(t)$ одновременно обращаются в ноль ($u_A(T_0, x) \equiv 0$), т. е. наступает полное остывание. Автомодельное решение является локализованным, в любой момент времени диаметр его носителя не превосходит $2\varphi(t_*) < +\infty$.

Теоремы существования и единственности обобщенных решений краевых задач для (1.17), $N=1$, доказаны в [36]. Там же получены условия локализации краевых граничных режимов в среде с поглощением (см. также [38], [41]). О локализации в случае уравнений с поглощением, содержащих дополнительные члены, например,

$$u_t = (u^{\sigma+1})_{xx} - (u^\lambda)_x - u^\beta, \ \lambda \geqslant 1,$$

см. в [42]—[43]. Отметим, что здесь в зависимости от соотношения между параметрами σ, β, λ локализация может быть односторонней; в частности, если $\lambda < \min\{\sigma+1, \beta\}$, т. е. локализация слева [42]).

Отметим, что несколько ранее первой работы [32] в [44] было построено локализованное частное решение другого квазилинейного уравнения с линейным поглощением

$$u_t = (|u_x|^\sigma u_x)_x - u, \ \sigma > 0 \tag{1.22}$$

(см. также [45], [46]). В дальнейшем различные (в основном качественные) исследования локализации и характера движения тепловых фронтов в случае более общих, чем в (1.11) и (1.22), нелинейностей были выполнены в [47]—[49] и др.

Вернемся к одномерному уравнению (1.17). Локализация тепловых возмущений возможна, естественно, лишь в том случае, когда тепловая волна имеет конечный фронт, т. е. возмущения в среде распространяются с конечной скоростью. Полученное в [50] необходимое и достаточное условие наличия этого свойства выглядит следующим образом:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{k(\eta)\, d\eta}{\eta + \int_0^\eta \frac{k(\zeta)\, Q(\zeta)\, d\zeta}{\zeta\left(1 + \left[1 + \frac{k(\zeta)\, Q(\zeta)}{\zeta}\right]^{1/2}\right)}} \right\} < +\infty \tag{1.23}$$

(легко проверить, что при выполнении условия локализации (1.20) сходимость интеграла в (1.23) также имеет место). Несколько довольно тонких результатов для уравнения (1.17) общего вида при $N=1$ получено в [51]. Они относятся к условиям отсутствия эффекта полного остывания (что будет, если (1.21) не выполнено?) и выяснению вопроса о близости (1.20) к необходимому условию локализации.

Для вырождающегося уравнения (1.17) со многими пространственными переменными теоремы существования, единственности, различные виды теорем сравнения и др. были установлены в [43], [52], [53] (см. также [54] и приведенную в указанных работах библиографию). Интересный эффект, непосредственно связанный со свойством полного остывания за конечное время, обнаружен в [55], где рассматривалось урав-

нение (1.17) при $k\equiv 1$. Было показано, что при выполнении условия

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{(\eta Q(\eta))^{1/2}} < +\infty \tag{1.24}$$

(если Q — монотонная функция, то из (1.24) следует (1.21)) всякое решение задачи Коши с нефинитной начальной функцией $u_0(x)>0$ в R^N, $u_0(x)\to 0$, $|x|\to+\infty$, в любой момент времени $t>0$ становится финитным по x.

Вопросы, связанные с асимптотическим поведением при $t\to+\infty$ нестационарных решений уравнений типа (1.11), рассматриваемого в ограниченной области $\Omega\subset R^N$, изучались в [56], [57]. В [56] анализировалась задача для уравнения $u_t=\Delta(|u|^\sigma u)-|u|^{\beta-1}u$ («параболическое» продолжение (1.11) в область отрицательных значений u) с условиями Неймана на границе $(\partial/\partial n)(|u|^\sigma u)=0$, $t>0$, $x\in\partial\Omega$. Было показано, что в случае $\beta>\sigma+1$ при $t\to+\infty$ всегда происходит стабилизация к пространственно-однородному решению $y(t)=[(\beta-1)t]^{-1/(\beta-1)}$ в том смысле, что

$$u(t, x)/y(t)\to c,\ t\to+\infty,$$

где c в зависимости от начального возмущения $u_0(x)\equiv u(0, x)$ в Ω принимает одно из значений -1, 0, $+1$. При этом ограничение $\beta>\sigma+1$ существенно; в случае $\beta=\sigma+1$ уравнение имеет бесконечный набор пространственно-неоднородных решений в разделяющихся переменных вида $u_l(t, x)=y(t)X_l(x)$ (разумеется, функции X_l не являются знакопостоянными в Ω). В краевой задаче для (1.11) с условием Дирихле $u(t, x)=0$ на $\partial\Omega$, подробно изученной в [57], в зависимости от величины параметров β и σ стабилизация может происходить по различным законам. В случае $\beta>\sigma+1$ при больших t сток является несущественным по сравнению с оператором диффузии и асимптотика процесса описывается автомодельным решением $v_A=(1+t)^{-1/\sigma}g(x)$ уравнения $v_t=\Delta v^{\sigma+1}$, где $g(x)>0$ в Ω такова, что $\Delta g^{\sigma+1}+\frac{1}{\sigma}g=0$ в Ω, $g=0$ на $\partial\Omega$. Если $\beta=\sigma+1$, то стабилизация происходит в соответствии с точным автомодельным решением u_A уравнения (1.11), $u_A=(1+t)^{-1/\sigma}f(x)$, где $f(x)>0$ удовлетворяет задаче $\Delta f^{\sigma+1}+\frac{1}{\sigma}f-f^{\sigma+1}=0$ в Ω, $f=0$ на $\partial\Omega$. Если же $1\leqslant\beta<\sigma+1$ (при этих значениях в задаче Коши происходит локализация возмущений, см. (1.20)) несущественным при $t\to+\infty$ является диффузионный член уравнения. В результате при $t\to+\infty$ решение задачи асимптотически сходится всюду в $\operatorname{supp} u(+\infty, x)$ к пространственно-однородному решению $y(t)$ $(y'(t)=-y^\beta(t))$, т. е.

$$t^{\frac{1}{\beta-1}}u(t, x)-(\beta-1)^{-\frac{1}{\beta-1}}\to 0,\quad t\to+\infty,$$

для любых $x\in\operatorname{supp} u(+\infty, x)$; для всех остальных $x\in\Omega$ $u(t, x)\equiv 0$. В [56], [57] получены оценки скорости стабилизации.

Асимптотическое поведение решений задачи Коши для (1.11) изучено в меньшей степени. Помимо уже упоминавшейся ранее работы [14] (см. также § 3 данной статьи) и результата [57] о стабилизации к однородному состоянию при $1\leqslant\beta<\sigma+1$, об асимптотических свойствах решений (1.11), $N=1$, говорят также точные оценки скорости движения тепловых фронтов, полученные в [39], [58], [59], см., кроме того, ука-

занную там библиографию. В [39], [58] установлено, что в случае $\beta>\sigma+3$ размеры носителя финитного решения задачи Коши оцениваются по формуле $\operatorname{supp} u(t, x) \sim t^{1/(\sigma+2)}$, $t\to+\infty$, что можно связать со сходимостью $u(t, x)$ к известному автомодельному решению $v_A = t^{-1/(\sigma+2)} f(xt^{-1/(\sigma+2)})$ уравнения $v_t = (v^{\sigma+1})_{xx}$. Это означает, что при $\beta>\sigma+3$ в задаче Коши сток в уравнении несущественен при $t\to+\infty$ (об этом же свидетельствуют выводы [52]). Для $\sigma+1<\beta<\sigma+3$ в [59] получена оценка

$$\operatorname{supp} u(t, x) \sim t^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}, \quad t\to+\infty,$$

что можно расценить, как свидетельство асимптотической устойчивости автомодельного решения (1.12). И, наконец, если $\beta=\sigma+1$, то $\operatorname{supp} u(t, x) \sim \ln t$ при больших t [59] (в частности, $\operatorname{supp} u\to R^1$ при $t\to+\infty$ и локализации при $\beta=\sigma+1$ нет). В этом случае уравнение (1.11), $N=1$, $\beta=\sigma+1$ имеет автомодельное решение такого вида:

$$u_A(t, x) = (1+t)^{-1/\sigma} f(\eta), \ \eta = x - \alpha \ln(1+t), \ \alpha = \text{const},$$

которое в предположении устойчивости обеспечивает нужную оценку.

В заключение отметим, что остается открытым вопрос о структуре сингулярных решений уравнения (1.11) с поглощением в условиях полного остывания за конечное время, когда $\beta\in(0, 1)$. В этом случае существуют полностью затухающие локализованные автомодельные решения вида (1.13), $u_A\equiv 0$ при $t\geqslant T_0$, где (финитная) функция θ_A удовлетворяет эллиптическому уравнению (ср. (1.14))

$$\Delta_\xi \theta_A^{\sigma+1} - m \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \theta_A}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{1}{\beta-1} \theta_A - \theta_A^\beta = 0, \qquad \xi\in R^N, \tag{1.25}$$

и, как обычно, $\theta_A(\xi)\to 0$ при $|\xi|\to+\infty$. Важно отметить, что это уравнение допускает немонотонные решения, в то время как решения (1.12) без затухания ($\beta>1$) немонотонными быть не могут (это прямо следует из уравнения для функции θ_A). При этом возникают принципиальные проблемы исследования многообразия решений нелинейной эллиптической задачи (1.25) и тем самым определения спектра возможных с. ф. нелинейной среды с поглощением, а также доказательства их асимптотической устойчивости.

§ 2. О радиально симметричных автомодельных решениях

Этот параграф целиком посвящен исследованию решений краевой задачи (1.4), (1.6) для обыкновенного дифференциального уравнения. Одновременно удобно рассмотреть семейство задач Коши для того же уравнения

$$\mathbf{A}_R(\theta) = 0, \ \ \xi>0; \ \ \theta'(0) = 0, \ \ \theta(0) = \mu, \tag{2.1}$$

где постоянная $\mu>0$ выступает в роли параметра. Необходимо найти такие значения $\mu>0$, которым отвечает положительная в R_+^1 функция $\theta = \theta(\xi; \mu)$, удовлетворяющая условию $\theta(+\infty; \mu) = 0$. Тогда $\theta(\xi; \mu)$ будет искомой «автомодельной» функцией $\theta_A(\xi)$. Из вида оператора $\mathbf{A}_R$ непосредственно вытекает

Лемма 1. *При всех* $0<\mu<(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}=\theta_H$ *решение задачи* (2.1) *является строго убывающим всюду, где оно положительно. Если* $\mu\geqslant\theta_H$, *то* $\theta(+\infty;\mu)>0$.

Формальный асимптотический анализ уравнения (1.4) при $\xi\to+\infty$ (т. е. при $\theta_A\to 0^+$) дает следующие асимптотики возможных решений задачи (1.4), (1.6): либо это «степенная» асимптотика

$$\theta_A(\xi)=C\xi^{-\frac{2}{\beta+1}}+\ldots,\quad \xi\to+\infty;\quad C>0, \tag{2.2}$$

либо «экспоненциальная»

$$\theta_A(\xi)=D\xi^{\frac{1}{\beta-1}-\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)+\ldots,\quad \xi\to+\infty;\quad D>0. \tag{2.3}$$

Можно сказать, что (2.3) является предельным случаем «степенной» асимптотики (2.2), т. е. (2.2) «переходит» в (2.3) при $C\to 0^+$ (этот вывод будет обоснован в дальнейшем). Существование решений типа (2.2) и (2.3) устанавливается с помощью анализа уравнения (1.4) в окрестности $\xi=+\infty$ на основе теорем о неподвижных точках непрерывных преобразований, тем же способом получаются соответствующие асимптотики для производных $\theta_A'(\xi)$, $\theta_A''(\xi)$, а также доказывается локальная разрешимость задачи Коши для всех достаточно малых $\xi>0$.

Исследование задачи (1.4), (1.6) проводится разными методами в случае $\beta\geqslant 1+2/N$ и $\beta\in(1,1+2/N)$.

1. Случай $\beta\geqslant 1+2/N$. Ниже показано, что при $\beta\geqslant 1+2/N$ существует лишь одно бесконечное множество функций с асимптотикой типа (2.2) (последнее устанавливается так же, как в п. 2, путем построения верхних и нижних решений уравнения (1.4), кроме того, другим способом это будет доказано в § 3).

Теорема 1. *Пусть* $\beta\geqslant 1+2/N$. *Тогда при всех* $\mu\in(0,\theta_H)$ *решение задачи* (2.1) *строго положительно в* R_+^1, $\theta(+\infty;\mu)=0$, *причем оно не может иметь «экспоненциальную» асимптотику типа* (2.3).

Доказательство. Умножим уравнение (2.1) на ξ^{N-1} и проинтегрируем обе его части по интервалу $(0,\xi)$. В результате получим равенство

$$\xi^{N-1}\theta'(\xi)+\frac{1}{2}\theta(\xi)\xi^N=\int_0^\xi \eta^{N-1}\theta(\eta)\left[\frac{N}{2}-\frac{1}{\beta-1}+\theta^{\beta-1}(\eta)\right]d\eta. \tag{2.4}$$

При $\beta\geqslant 1+2/N$ имеем $N/2-1/(\beta-1)\geqslant 0$ и, следовательно, правая часть (2.4) строго положительна. Пусть $\theta=\theta(\xi;\mu)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi=\xi^*>0$. Тогда, очевидно, $\theta'(\xi^*;\mu)\leqslant 0$, левая часть (2.4) при $\xi=\xi^*$ неположительна и равенство (2.4) невозможно. Итак, $\theta(\xi;\mu)>0$ в R_+^1 и в силу монотонности $\theta(+\infty;\mu)=0$.

Второе утверждение теоремы также следует из (2.4). Действительно, если бы $\theta(\xi;\mu)$ имело «экспоненциальную» асимптотику и $\theta(\xi;\mu)=o(\xi^{-\alpha})$ при $\xi\to+\infty$ для всех $\alpha>0$ (тогда, как нетрудно показать, этим же свойством обладала и производная θ', см. [18]), то (2.4) при $\xi=+\infty$ давало бы противоречие.

Замечание. В § 3 будет показано, что при $\beta>1+2/N$ решение с фиксированной постоянной $C>0$ в разложении (2.2) единственно.

При $\beta\geqslant 1+2/N$ решения $\theta(\xi;\mu)$ легко упорядочить по величине параметра μ.

Теорема 2. *Пусть* $\beta \geqslant 1+2/N$. *Тогда решение* $\theta(\xi;\ \mu)$ *монотонным образом зависит от параметра* $\mu \in (0,\ \theta_H)$, *т. е. если* $0<\mu_1<\mu_2<\theta_H$, *то*

$$\theta_1 = \theta(\xi;\ \mu_1) < \theta(\xi;\ \mu_2) = \theta_2 \text{ всюду в } R_+^1. \tag{2.5}$$

Доказательство. Положим $z=\theta_2-\theta_1$. Предположим противное: пусть существует такое $\xi=\xi_*$, что $z>0$ на $(0,\ \xi_*)$, $z(\xi_*)=0$ и, следовательно, $z'(\xi_*)\leqslant 0$. Тогда из тождеств (2.4) для функций θ_1 и θ_2 легко получить

$$\xi_*^{N-1} z'(\xi_*) = \int_0^{\xi_*} \eta^{N-1} z(\eta) \left\{ \frac{N}{2} - \frac{1}{\beta-1} + \beta \int_0^1 [\rho\theta(\eta;\ \mu_1) + \right.$$

$$\left. + (1-\rho)\,\theta(\eta;\ \mu_2)]^{\beta-1}\, d\rho \right\} d\eta > 0,$$

что противоречит условию $z'(\xi_*)\leqslant 0$.

На рис. 1 приведено примерное схематическое изображение поведения функций $\theta=\theta(\xi;\ \mu)$ при различных значениях параметра $\mu \in (0,\ \theta_H)$.

2. **Случай** $\beta \in (1,\ 1+2/N)$. Здесь картина поведения решений, отвечающих различным значениям μ, несколько иная, чем изображенная на рис. 1.

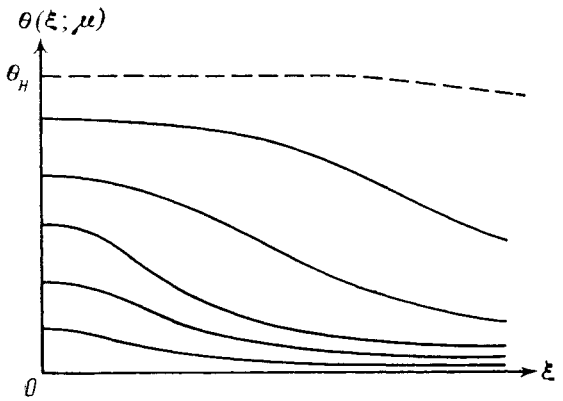

Рис. 1. Случай $\beta \geqslant 1+2/N$

2.1. Рассмотрим сначала задачу (2.1) при достаточно малых $\mu>0$. Докажем предварительно следующее простое утверждение:

Лемма 2. *При всех*

$$0<\mu\leqslant\left(\frac{1}{\beta-1}-\frac{N}{2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad 1<\beta<1+\frac{2}{N}, \tag{2.6}$$

не существует всюду положительного решения задачи (2.1) *с асимптотиками* (2.2) *или* (2.3).

Доказательство. Предположим противное, пусть $\theta(\xi;\ \mu)>0$ в R_+^1 при некотором μ из множества (2.6). Тогда переходя к пределу в (2.4) при $\xi\to+\infty$ и учитывая при этом, что $\theta\xi^N\to 0$, $\theta'\xi^{N-1}\to 0$ при $\xi\to+\infty$, получим

$$\int_0^{+\infty} \eta^{N-1}\theta(\eta;\ \mu)\left[\frac{N}{2}-\frac{1}{\beta-1}+\theta^{\beta-1}(\eta;\ \mu)\right] d\eta = 0.$$

Однако в силу монотонности $\theta(\xi;\mu)$ по ξ этот интеграл строго меньше выражения

$$\int^{+\infty} \eta^{N-1}\theta(\eta;\mu)\left[\frac{N}{2}-\frac{1}{\beta-1}+\mu^{\beta-1}\right]d\eta,$$

которое при выполнении (2.6) неположительно, что приводит к противоречию.

Нетрудно показать, что в условиях леммы решение $\theta(\xi;\mu)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi=\xi_\mu<+\infty$. Это связано с некоторыми довольно громоздкими выкладками (см., например, [18]). Вместо этого будет доказана более простая

Лемма 3. *Пусть* $\beta\in(1,\ 1+2/N)$. *Тогда найдется такое значение* $\mu_1\in(0,\ \theta_N)$, *что при всех* $\mu\in(0,\ \mu_1)$ *решение задачи* (2.1) *обращается в нуль в некоторой точке* $\xi=\xi_\mu<+\infty$.

Доказательство проводится путем «линеаризации» уравнения (2.1) относительно тривиального решения $\theta\equiv0$. Предварительно продолжим уравнение в область отрицательных значений θ, например, следующим образом: вместо (2.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta')'+\frac{1}{2}\theta'\xi+\frac{1}{\beta-1}\theta-|\theta|^{\beta-1}\theta=0,\quad \xi>0 \tag{2.7}$$

(в области $\theta\geqslant0$ оно совпадает с исходным). Положим теперь

$$f_\mu(\xi)=\frac{\theta(\xi;\mu)}{\mu},\quad \xi>0,$$

где $\theta(\xi;\mu)$ — решение (2.7) с условиями (2.1). Тогда, очевидно,

$$f_\mu(0)=1,\ f_\mu'(0)=0 \tag{2.8}$$

и $f_\mu(\xi)$ удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{F}_R(f_\mu)\equiv\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}f_\mu')'+\frac{1}{2}f_\mu'\xi+\frac{1}{\beta-1}f_\mu=\mu^{\beta-1}|f_\mu|^{\beta-1}f_\mu \tag{2.9}$$

с малым параметром $\mu^{\beta-1}$ при нелинейном «возмущающем» члене в правой части. Рассмотрим соответствующую линейную задачу, отвечающую значению $\mu=0$:

$$\mathbf{F}_R(f_0)=0,\quad \xi>0;\quad f_0(0)=1,\quad f_0'(0)=0. \tag{2.10}$$

Заменой

$$\xi=2(-\eta)^{\frac{1}{2}},\quad \eta<0, \tag{2.11}$$

(2.10) сводится к краевой задаче для вырожденного гипергеометрического уравнения

$$f_0''\eta+\left(\frac{N}{2}-\eta\right)f_0'-\frac{1}{\beta-1}f_0=0,\quad \eta<0.$$

Предложение (см. [60]). *Если* $N/2\geqslant1/(\beta-1)$, *то* $f_0(\eta)>0$ *при всех* $\eta<0$. *Если* $N/2<1/(\beta-1)$, *т. е.* $\beta<1+2/N$, *то* $f_0(\eta)$ *имеет при* $\eta<0$ *по крайней мере один корень.*

Справедливость леммы 3 вытекает из этого предложения, а также непрерывной зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения (2.9) от малого параметра $\mu^{\beta-1}$.

2.2. Начнем увеличивать параметр μ, пусть теперь (2.6) не выполнено. Докажем сначала следующее утверждение:

Теорема 3. *При* $\beta\in(1, 1+2/N)$ *задача* (2.1) *имеет по крайней мере одно положительное решение с экспоненциальной асимптотикой.*

Доказательство основано на построении подходящих верхнего θ_+ и нижнего θ_- решений уравнения (2.1), которые будем искать в «экспоненциальном» виде

$$\theta_\pm(\xi)=A_\pm\exp(-\alpha_\pm\xi^2),\quad \xi>0\quad (\theta'_\pm(0)=0), \tag{2.12}$$

где $A_\pm$, $\alpha_\pm$ — положительные постоянные, подлежащие определению. Нетрудно поверить, что

$$\mathbf{A}_R(\theta_\pm)=A_\pm\exp(-\alpha_\pm\xi^2)\Big[\alpha_\pm(4\alpha_\pm-1)\xi^2+$$
$$+\frac{1}{\beta-1}-2N\alpha_\pm-A_\pm^\beta\exp(-\alpha_\pm\xi^2(\beta-1))\Big]$$

и поэтому θ_+ будет верхним решением (т. е. $\mathbf{A}_R(\theta_+)\leqslant 0$ в R^1_+), если

$$\alpha_+<\frac{1}{4},\quad A_+^{\beta-1}\geqslant\left(\frac{1}{\beta-1}-2N\alpha_+\right)\exp\left[\frac{\beta-1}{1-4\alpha_+}\left(\frac{1}{\beta-1}-2N\alpha_+\right)\right], \tag{2.13}$$

и соответственно θ_- будет нижним решением ($\mathbf{A}_R(\theta_-)\geqslant 0$ в $R^1{}_+$) при выполнении, например, таких условий:

$$\alpha_-=\frac{1}{4},\quad A_-^{\beta-1}\leqslant\frac{1}{\beta-1}-\frac{N}{2}. \tag{2.14}$$

Отметим, что, как следует из (2.14), «экспоненциальное» нижнее решение существует только в том случае, когда $1/(\beta-1)-N/2>0$, т. е. при $\beta<1+2/N$.

При произвольных значениях $A_\pm$, $\alpha_\pm$, удовлетворяющих, соответственно, (2.13) и (2.14), всюду в $R^1{}_+$ справедливо неравенство $\theta_-(\xi)<\theta_+(\xi)$ и поэтому (см., например, [61]) задача (2.1) имеет по крайней мере одно положительное решение $\theta(\xi;\mu)$ такое, что $\theta_-\leqslant\theta\leqslant\theta_+$ в $R^1{}_+$. Из последнего неравенства вытекает «экспоненциальный» характер асимптотики этого решения (например, $\theta=o\left(\exp\left(-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\xi^2\right)\right)$ при $\xi\to+\infty$ для любого $\varepsilon\in(0, 1/4)$).

Замечание. Можно уточнить пространственную структуру решения, полагая вместо (2.12)

$$\theta_\pm(\xi)=A_\pm(a_\pm^2+\xi^2)^{\delta_\pm}\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right),\quad \xi>0,$$

причем, как нетрудно показать, для нижнего решения можно взять $\delta_-=1/(\beta-1)-N/2$, а подходящее верхнее существует при любых $\delta_+>1/(\beta-1)-N/2$. Таким образом,

$$\theta(\xi;\mu)=o\left\{\xi^{\frac{1}{\beta-1}-\frac{N}{2}+\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right)\right\},\quad \xi\to+\infty, \tag{2.12'}$$

для любого $\varepsilon>0$ (при $\varepsilon=0$ асимптотика (2.12′) совпадает с (2.3)).

Покажем теперь, что наименьшим среди всех положительных решений задачи (1.4), (1.6) является решение именно с «экспоненциальной» асимптотикой.

Теорема 4. *Пусть* $\beta\in(1, 1+2/N)$. *Положим*

$$\mu_*=\sup\mathscr{M}=\sup\{\mu>0\,|\,\theta(\xi;\mu)=0 \text{ для некоторого } \xi=\xi_\mu<+\infty\}. \tag{2.15}$$

Тогда $\mu_* \in (0, \theta_H)$, *функция* $\theta^*_A(\xi) \equiv \theta(\xi; \mu_*)$ — *решение задачи* (1.4), (1.6) — *имеет «экспоненциальную» асимптотику и является минимальной среди всех других ее решений.*

Доказательство. В силу леммы 3 множество $\mathcal{M}$ не пусто, а из теоремы 3 вытекает, что оно ограничено сверху. Следовательно, $\sup \mathcal{M}$ существует, $\mu_* \in (0, \theta_H)$ и $\theta(\xi; \mu_*) > 0$ в R^1_+. Последнее вытекает из непрерывности зависимости решения задачи (2.1) от параметра μ на произвольном компакте из R^1_+. Вторая часть теоремы будет доказана в § 3.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает такое

Следствие. *Пусть* $\beta \in (1, 1+2/N)$. *Тогда при любых* $\mu \in (\mu_*, \theta_H)$ *функции* $\theta(\xi; \mu)$ *строго положительны и являются решениями задачи* (1.4), (1.6).

2.3. Перейдем теперь к исследованию решений со «степенной» асимптотикой, которые, как показано ниже, существуют при любых значениях $\beta > 1$.

Теорема 5. *При* $\beta > 1$ *задача* (1.4), (1.6) *имеет бесконечное множество решений со «степенной» асимптотикой* (2.2).

Доказательство. Будем на этот раз искать верхние и нижние решения уравнения (2.1) в виде

$$\theta_\pm(\xi) = A_\pm (a_\pm^2 + \xi^2)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad \xi > 0 \quad (\theta'_\pm(0) = 0). \tag{2.16}$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{A}_R(\theta_\pm) = A_\pm (a_\pm^2 + \xi^2)^{-\frac{2\beta-1}{\beta-1}} \left\{ \left(\frac{a_\pm^2 - 2N}{\beta - 1} - A_\pm^{\beta-1} \right) a^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{a_\pm^2 - 2N}{\beta - 1} + \frac{4\beta}{(\beta-1)^2} - A_\pm^{\beta-1} \right] \xi^2 \right\}. \tag{2.17}$$

Поэтому $\mathbf{A}_R(\theta_+) \leqslant 0$ в R^1_+, т. е. $\theta_+(\xi)$ — верхнее решение, если

$$A_+^{\beta-1} \geqslant \frac{a_+^2 - 2N}{\beta - 1} + \frac{4\beta}{(\beta-1)^2}. \tag{2.18}$$

Аналогично, $\mathbf{A}_R(\theta_-) \geqslant 0$ в R^1_+ и $\theta_-(\xi)$ — нижнее решение в том случае, когда

$$a_-^2 > 2N, \quad A_-^{\beta-1} \leqslant \frac{a_-^2 - 2N}{\beta - 1}. \tag{2.19}$$

Остается теперь выделить пары функций θ_- и θ_+ так, что $\theta_- \leqslant \theta_+$ в R^1_+. Тогда между ними лежит положительное решение задачи (1.4), (1.6). Фиксируем произвольное $C > 0$, удовлетворяющее условию

$$C^{\beta-1} > \frac{4}{\beta-1} \left(\frac{\beta}{\beta-1} - \frac{N}{2} \right), \tag{2.20}$$

и положим $A_+ = A_- = C$. Тогда функции (2.16) имеют одинаковую асимптотику

$$\theta_\pm(\xi) = C\xi^{-\frac{2}{\beta-1}} + \ldots, \quad \xi \to +\infty.$$

Очевидно, что $\theta_+ \geqslant \theta_-$ в R^1_+, если $a_+ \leqslant a_-$. Возьмем

$$a_+^2 = (\beta - 1)\left[C^{\beta-1} - \frac{4}{\beta-1}\left(\frac{\beta}{\beta-1} - \frac{N}{2} \right) \right], \quad a_-^2 = 2N + (\beta - 1) C^{\beta-1} > 2N.$$

Тогда $a_- \geqslant a_+ > 0$ (последнее неравенство обеспечивается условием (2.20)) и неравенства (2.18) и (2.19) выполнены. Следовательно, суще-

ствует решение $\theta_A(\xi)$ задачи (1.4), (1.6) такое, что $\theta_-(\xi)\leqslant\theta_A(\xi)\leqslant\leqslant\theta_+(\xi)$ в R^1_+, причем оно имеет асимптотику (2.2).

Замечание. Как следует из (2.20), при $N=1$ и $N=2$ каждому произвольному значению $C>0$ в разложении (2.2) отвечает по крайней мере одно решение задачи (1.4), (1.6).

На рис. 2 показано примерное поведение решений задачи (2.1) при различных $\mu\in(0, \theta_H)$ в случае $\beta\in(1, 1+2/N)$. Отметим, что здесь различные кривые $\theta=\theta(\xi;\ \mu)$ могут, вообще говоря, пересекаться, однако это

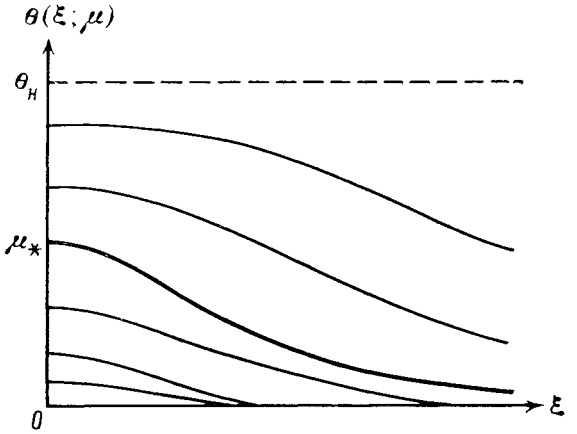

Рис. 2. Случай $\beta\in(1,1+2/N)$. Жирной линией выделена «автомодельная» функция $\theta_A{}^*(\xi)\equiv\theta(\xi;\ \mu_*)$ с «экспоненциальной» асимптотикой

может быть лишь в тех точках, где θ достаточно мало. Именно, справедливо следующее утверждение, которое доказывается так же, как теорема 2.

Теорема 6. *Пусть* $\beta\in(1, 1+2/N)$. *Тогда в области*

$$\theta>\left\{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta-1}-\frac{N}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}$$

решения $\theta(\xi;\ \mu)$ *монотонным образом зависят от параметра* μ.

В заключение приведем решение задачи (1.4), (1.6), представимые в явном виде [62]. Пусть $\beta=2$. Тогда функции

$$\theta_A^{\pm}(\xi)=\frac{A^{\pm}}{(a^{\pm}+\xi^2)^2}+\frac{B^{\pm}}{(a^{\pm}+\xi^2)},\quad \xi>0,$$

где

$$A^{\pm}=48\left(-N-14\mp10\left(1+\frac{N}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$B^{\pm}=24\left(2\pm\left(1+\frac{N}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\quad a^{\pm}=2\left(N+14\pm10\left(1+\frac{N}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

удовлетворяют уравнению (1.4). Из них $\theta^+(\xi)$ строго положительно в R^1_+ при любом целом $N\geqslant1$. Отметим, что при $N=1$ величина $\beta=2$ попадает в интервал $(1,\ 1+2/N)\equiv(1,\ 3)$, при $N=2$ имеем $\beta=2=1+2/N$, а для всех $N\geqslant3$ — $\beta=2>1+2/N$.

§ 3. Собственные функции нелинейной задачи

В этом параграфе исследуется асимптотическое поведение решений задачи (1.1), (1.2) и, в частности, доказывается устойчивость автомодельных решений. При этом одна из основных проблем состоит в выделении в пространстве начальных функций областей притяжения, отвечающих каждой с. ф. рассматриваемой нелинейной задачи (автомодельных решений, которые являются главными «кандидатами» на роль с. ф., как показано в § 2, бесконечно много).

В § 2 автомодельные функции $\theta_A(\xi)>0$ упорядочены за счет введения параметра $\mu=\theta_A(0)\in(0, \theta_H)$. Множество притяжения, отвечающее автомодельному решению[2]

$$u_A(t, x; T)=(T+t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta(\xi; \mu), \quad \xi=\frac{x}{(T+t)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.1}$$

где $T=\text{const}>0$, мы будем обозначать через $\mathscr{W}_\mu$ (естественно, нас интересуют нетривиальные множества $\mathscr{W}_\mu$, состоящие не только из автомодельных начальных распределений $u_A(0, x; T)$). Под асимптотической устойчивостью автомодельного решения (3.1), как обычно (см., например, [6], [7] и приведенную там библиографию), понимается сходимость при $t\to+\infty$ автомодельного представления решения исходной задачи (1.1), (1.2), отвечающего некоторому значению $T>0$

$$\theta_T(t, \xi)=\mathbf{P}_T(u(t, x))(t, \xi)=(T+t)^{\frac{1}{\beta-1}}u(t, \xi(T+t)^{\frac{1}{2}}), \qquad t>0, \ \xi\in R^N, \tag{3.2}$$

к соответствующей автомодельной функции $\theta_A=\theta(\xi; \mu)$. Величина T в (3.2) определяется по виду начальной функции $u_0\in\mathscr{W}_\mu$. Очевидно, что нормировка (3.2) автомодельного решения (3.1) дает в точности функцию $\theta(\xi; \mu)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие элементарные оценки решения задачи (1.1), (1.2) сверху и снизу.

Лемма 4. *Пусть $\beta>1$. Тогда всюду в $R^1_+\times R^N$*

$$u(t, x)\leqslant(T_0+t)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad T_0=\left[\frac{\theta_H}{\sup u_0}\right]^{\beta-1}, \tag{3.3}$$

и для любого $t_0>0$ всюду в $[t_0, +\infty)\times R^N$

$$u(t, x)\geqslant(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}F_0\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{3.4}$$

где постоянная $F_0=F_0(t_0)$ имеет вид

$$F_0=\int\limits_{R^N}\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{4t_0}\right)u_0(\zeta)\,d\zeta>0.$$

1. Случай $\beta>1+2/N$.

1.1. Устойчивость автомодельных с. ф. При $\beta>1+2/N$ условия устойчивости автомодельных решений определить особенно просто. Ниже доказаны теоремы о равномерной по $\xi\in R^N$ стабилизации $\theta\to\theta_A$ при $t\to+\infty$.

---

[2] Здесь $\xi\in R^N$, построенные в § 2 автомодельные функции зависят от одной переменной $|\xi|$.

Теорема 7. *Пусть при* $\beta>1+2/N$ *существует такое* $T>0$, *что*

$$u_0(x)-u_A(0,\ x;\ T)\in L^1(R^N). \tag{3.5}$$

Тогда

$$\|\theta_T(t,\xi)-\theta_A(\xi)\|_{C_\xi(R^N)}=O\left(t^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{\beta-1}}\right), \tag{3.6}$$

$$\|\theta_T(t,\xi)-\theta_A(\xi)\|_{L^1_\xi(R^N)}=O\left(t^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{\beta-1}}\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0. \tag{3.6'}$$

Доказательство. Положим

$$w_0^+(x)=\max\{u_0(x),\ u_A(0,x;T)\},\quad w_0^-(x)=\min\{u_0(x),\ u_A(0,x;T)\}$$

и через $w^\pm(t,x)$ обозначим решения уравнения (1.1) с начальными условиями $w^\pm(0,x)=w_0^\pm(x)$, $x\in R^N$. Очевидно, что $w^+\geqslant u_A(t,x;T)$, $w^-\leqslant u_A(t,x;T)$. Рассмотрим функцию $z^+=w^+-u_A\geqslant 0$, которая удовлетворяет задаче

$$z_t^+=\Delta z^+-(w^+)^\beta+u_A^\beta\leqslant\Delta z^+,\quad t>0,\quad x\in R^N, \tag{3.7}$$
$$z^+(0,x)=z_0^+(x)\equiv w_0^+(x)-u_A(0,x;T)\in L^1(R^N).$$

Отсюда сразу получаем

$$z^+(t,x)\leqslant\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\int\limits_{R^N}\exp\left(-\frac{|y|^2}{4t}\right)z_0^+(x+y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\|z_0^+\|_{L^1(R^N)}=O\left(t^{-\frac{N}{2}}\right). \tag{3.8}$$

Аналогично выводится оценка снизу функции $z^-(t,x)$. Теперь, учитывая, что $z^-\leqslant u-u_A\leqslant z^+$ и

$$\|u-u_A\|_{C_x(R^N)}=(T+t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\|\theta_T(t,\xi)-\theta_A(\xi)\|_{C_\xi(R^N)}, \tag{3.9}$$

приходим к оценке (3.6).

Вторая оценка получается еще проще. Аналогично предыдущему из уравнений для функций $z^\pm$ имеем

$$\|u(t,x)-u_A(t,x;T)\|_{L^1_x(R^N)}\leqslant\|u_0(x)-u_A(0,x;T)\|_{L^1_x(R^N)}.$$

Отсюда, поскольку

$$\|u-u_A\|_{L^1_x(R^N)}=(T+t)^{-\frac{1}{\beta-1}+\frac{N}{2}}\|\theta_T-\theta_A\|_{L^1_\xi(R^N)},$$

вытекает (3.6′).

Замечание. Необходимо отметить, что несмотря на встречающийся в (3.8) тепловой потенциал, эта теорема без труда может быть полностью перенесена на случай квазилинейного уравнения (1.9). При этом вместо (3.8) используется следующая оценка решения задачи Коши для уравнения $p_t=\Delta p^{\sigma+1}$, $\sigma>0$, приведенная, например, в [63]:

$$\sup_{x\in R^N}p(t,x)\leqslant\frac{c}{t^k}\|p(0,x)\|^{\frac{2k}{N}}_{L^1(R^N)},$$

где $k=N/(2+N\sigma)$, $c>0$ — постоянная, не зависящая от функции $p(0,x)$ (в этом случае легко проверить, что сходимость $\theta_T\to\theta_A$, $t\to+\infty$, в нормах $C(R^N)$ и $L^1(R^N)$ будет иметь место при $\beta>\sigma+1+2/N$).

В следующей теореме указано, по-видимому, оптимальное множество устойчивости $\mathscr{W}_\mu$ автомодельного решения (3.1).

Теорема 8. *При* $\beta>1+2/N$ *множество притяжения* $\mathscr{W}_\mu$, *отвечающее данному автомодельному решению* (3.1), *имеет вид*

$$\mathscr{W}_\mu=\{u_0\geqslant 0 \mid \text{существует такое } T>0, \text{ что}$$
$$u_0(x)-u_A(0, x; T)=o(|x|^{-2/(\beta-1)}) \text{ при } |x|\to+\infty\}. \tag{3.10}$$

Замечание. Оптимальность множества (3.10) вытекает из теоремы 5.

Доказательство. Рассмотрим первую оценку (3.8) для функции $z^+(t, x)$. В данном случае, вообще говоря, $z_0^+(x)\notin L^1(R^N)$, однако в силу условия $u_0\in\mathscr{W}_\mu$ найдется такая монотонно убывающая функция $\varphi=\varphi(|x|)=o(|x|^{-2/(\beta-1)})$, $|x|\to+\infty$, что $z_0^+(x)\leqslant\varphi(|x|)$ в R^N. Пусть для простоты $\sup\limits_x z_0^+(x)=z_0^+(0)$. Тогда из (3.8) имеем

$$\sup_x z(t, x)=z^+(0, x)=O\left(t^{-\frac{N}{2}}\int\limits_0^{+\infty} y^{N-1}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)\varphi(y)\,dy\right).$$

Из этой оценки, а также аналогичной для функции z^- с учетом (3.9) получаем

$$\|\theta_T-\theta_A\|_{C_\xi(R^N)}=O\left[t^{\frac{1}{\beta-1}}\int\limits_0^{+\infty}\eta^{N-1}\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)\varphi(t^{\frac{1}{2}}\eta)\,d\eta\right],$$

причем, как нетрудно убедиться, правая часть стремится к нулю при $t\to+\infty$.

Из теоремы 8 непосредственно вытекает одно любопытное следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\beta>1+2/N$. *Фиксируем произвольное* $C>0$. *Тогда задача* (1.4), (1.6) *может иметь не более одного решения с данным главным членом в «степенной» асимптотике* (2.2).

Подчеркнем, что здесь теорема единственности решение обыкновенного дифференциального уравнения доказывается на основе анализа решений соответствующего уравнения с частными производными.

1.2. «Неавтомодельные» с. ф. (приближенные решения). Теорема 8, разумеется, остается справедливой и в том случае, когда $u_A\equiv 0$, т. е. при $\theta_A(\xi)\equiv 0$. Поэтому множество притяжения $\mathscr{W}_0$, отвечающее автомодельной функции $\theta_A(\xi)=\theta(\xi; 0)\equiv 0$, имеет вид

$$\mathscr{W}_0=\{u_0\geqslant 0 \mid u_0(x)=o(|x|^{-\frac{2}{\beta-1}}), \quad |x|\to+\infty\}. \tag{3.11}$$

Таким образом, если при $\beta>1+2/N$ $u_0\in\mathscr{W}_0$, то

$$\theta_T(t, \xi)\to 0 \text{ при } t\to+\infty \tag{3.12}$$

равномерно по $\xi\in R^N$. Отметим, что это одновременно доказывает такое известное нам утверждение (см. теорему 1):

Следствие 2 из теоремы 8. *При* $\beta>1+2/N$ *задача* (1.4), (1.6) *не имеет решения* $\theta_A(\xi)$ *с «экспоненциальной» асимптотикой* (2.3).

Действительно, в противном случае существовало бы такое автомодельное решение $u_A(t, x; T)$, что $u_A(0, x; T)\in\mathscr{W}_0$. Тогда $\mathbf{P}_T(u_A(t, x; T))\equiv\theta_A(\xi)>0$ в R^N, что противоречит (3.12).

Итак, если $u_0\in\mathscr{W}_0$, то решение $u(t, x)$ эволюционирует при $t\to+\infty$ по неавтомодельным законам. Ниже будет показано, что асимптотическое

поведение «почти всех» таких решений определяется пространственно-временной структурой семейства автомодельных решений уравнения теплопроводности

$$v_t = \Delta v, \quad t > 0, \quad x \in R^N, \tag{3.13}$$

т. е., другими словами, если $u_0 \in \mathscr{W}_0$, то в случае $\beta > 1 + 2/N$ в исходном уравнении (1.1) нелинейный сток энергии $-u^\beta$ становится несущественным при $t \to +\infty$ по сравнению с диффузионным членом. Отметим, что такая ситуация довольно типична для квазилинейных параболических уравнений. В частности, на основе этого своеобразного «асимптотического вырождения» определенных членов уравнения в [6], [7], [9], [10]—[12] построены широкие классы устойчивых п. а. р. различных нелинейных уравнений теплопроводности с достаточно произвольными (нестепенными) коэффициентами.

Нам понадобится однопараметрическое семейство автомодельных решений уравнения (3.13), которое имеет вид

$$v_A(t, x; T) = (T + t)^{-\alpha} f_a(\eta), \quad \eta = \frac{|x|}{(T + t)^{1/2}}, \tag{3.14}$$

где $\alpha > 0$ — параметр. Подстановка (3.14) в (3.13) приводит к такой задаче для функции $f_a > 0$:

$$\eta^{1-N} (\eta^{N-1} f_a')' + \frac{1}{2} f_a' \eta + \alpha f_a = 0, \quad \eta > 0, \tag{3.15}$$

$$f_a'(0) = 0, \quad f_a(+\infty) = 0. \tag{3.16}$$

Условия разрешимости (3.15), (3.16) и некоторые необходимые свойства ее решений указаны в следующем утверждении:

Предложение (см. [60]). *При любых $\alpha \in (0, N/2)$ задача* (3.15), (3.16) *имеет положительное в R_+^1 решение $f_a(\eta)$, причем, если $\alpha \in (0, N/2)$, то*

$$f_a(\eta) = M\eta^{-2\alpha} + \ldots, \quad \eta \to +\infty; \quad M = \text{const} > 0. \tag{3.17}$$

Если $\alpha = N/2$, то единственным подходящим решением является функция

$$f_a = f_a^*(\eta) = M \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right), \quad \eta > 0; \quad M > 0. \tag{3.18}$$

При $\alpha > N/2$ положительных решений не существует.

Обозначим через $f_T(t, \eta)$ (здесь в отличии от (3.14) $\eta \in R^N$) автомодельное представление решения $u(t, x)$, согласованное с видом автомодельного решения (3.14) уравнения (3.13)

$$f_T(t, \eta) = (T + t)^\alpha u(t, \eta (T + t)^{\frac{1}{2}}), \quad t > 0, \quad \eta \in R^N. \tag{3.19}$$

Так же, как и ранее в теореме 8, в случае $u_0 \in \mathscr{W}_0$ асимптотика решения задачи (3.15), (3.16), определяемая выбором параметра $\alpha \in (0, N/2]$ в (3.14), зависит от специфики начальной функции. В частности, при этом существенно различаются два случая: $u_0 \notin L^1(R^N)$ и $u_0 \in L^1(R^N)$. Сначала будет рассмотрен случай $u_0 \notin L^1(R^N)$, которому отвечают значения $\alpha < N/2$. Отметим, что при доказательстве сформулированной теоремы не используется возможность обращения оператора $\partial/\partial t - \Delta$, т. е. это же утверждение нетрудно переформулировать применительно к квазилинейному уравнению (1.11).

Теорема 9. *Пусть* $\beta>1+2/N$ *и, кроме того,*

$$\beta(N-2)\leqslant N, \tag{3.20}$$

т. е. $\beta\in(1+2/N, +\infty)$ *при* $N=1$ *или* $N=2$ *и* $\beta\in(1+2/N, N/(N-2))$ *при* $N\geqslant 3$. *Пусть существует* $\alpha\in(1/(\beta-1), N/2)$ *и такие положительные постоянные* T, M *и* A, *что*

$$u_0(x)-v_A(0, x; T)\in L^1(R^N), \tag{3.21}$$

$$u_0(x)\leqslant Av_A(0, x; T), \quad x\in R^N. \tag{3.22}$$

Тогда $\|f_T(t, \eta)-f_a(\eta)\|_{L^1_\eta(R^N)}\to 0$ *при* $t\to+\infty$.[3]

Доказательство. Положим $z=v_A-u$. Тогда для z получаем уравнение

$$z_t=\Delta z+u^\beta, \quad t>0, \ x\in R^N; \ z(0, x)\in L^1(R^N). \tag{3.23}$$

Положим $z^+=\max\{0, z\}\geqslant 0$, $z^-=-\min\{0, z\}\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, $x\in R^N$. Очевидно, что $\|z(t)\|_{L^1(R^N)}=\|z^+(t)\|_{L^1(R^N)}+\|z^-(t)\|_{L^1(R^N)}$, причем в силу (3.21) $z^\pm(0, x)\in L^1(R^N)$. Из (3.23) непосредственно следует, что

$$\frac{d}{dt}\|z^+(t)\|_{L^1(R^N)}\leqslant\int\limits_{R^N}u^\beta(t, x)\,dx, \quad \frac{d}{dt}\|z^-(t)\|_{L^1(R^N)}\leqslant 0 \tag{3.24}$$

(эти неравенства выводятся при естественных предположениях $\Delta|z|(t, \cdot)\in L^1(R^N)$, $z\in C^1(R^1_+; R^N)$). Из (3.22) на основе принципа максимума заключаем, что $u\leqslant Av_A$ в $R^1_+\times R^N$ и тогда из первой оценки (3.24) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\|z^+(t)\|_{L^1(R^N)}\leqslant A^\beta\int\limits_{R^N}v_A^\beta(t, x; T)\,dx=(T+t)^{-\alpha\beta+\frac{N}{2}}A^\beta\|f_a\|^\beta_{L^\beta(R^N)}, \quad t>0. \tag{3.25}$$

Нетрудно проверить, используя разложение (3.17), что при любом $\alpha>1/(\beta-1)$ и всех β, удовлетворяющих (3.20), имеет место включение $f_a\in L^\beta(R^N)$. Тогда (3.25) означает, что

$$\frac{d}{dt}\|z^+(t)\|_{L^1(R^N)}\leqslant\text{const}\cdot(T+t)^{\frac{N}{2}-\alpha\beta}, \quad t>0. \tag{3.26}$$

Из второй оценки (3.24) получаем

$$\|z^-(t)\|_{L^1(R^N)}\leqslant\text{const}, \quad t>0. \tag{3.27}$$

Наконец, учитывая, что

$$\|z(t)\|_{L^1(R^N)}=(T+t)^{-\alpha+\frac{N}{2}}\|f_T(t, \eta)-f_a(\eta)\|_{L^1_\eta(R^N)}, \tag{3.28}$$

из (3.27), (3.28) при условии $\alpha<N/2$ получаем

$$\|f_T(t, \eta)-f_a(\eta)\|_{L^1_\eta(R^N)}=\begin{cases} O(t^{1-\alpha(\beta-1)}), & \alpha<\dfrac{N+2}{2\beta}, \\ O(t^{\alpha-\frac{N}{2}}\ln t), & \alpha=\dfrac{N+2}{2\beta}, \\ O(t^{\alpha-\frac{N}{2}}), & \alpha>\dfrac{N+2}{2\beta}. \end{cases}$$

[3] Оценка скорости сходимости будет получена в процессе доказательства теоремы.

Следовательно, если $\alpha \in (1/(\beta-1), N/2)$, то $\|f_T - f_a\|_{L^1(R^N)} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание 1. Данная теорема не является вполне «оптимальной» по допустимым значениям параметра β (это относится к ограничению (3.20)). Однако, если (3.20) не выполнено, то удобно провести доказательство сходимости $f_T \to f_a$, $t \to +\infty$, в норме $L^{p+1}(R^N)$, выбирая величину $p>0$ из условия $p>N/2\alpha\beta-1$. Тогда, предполагая, что $u_0(x)-v_A(0, x; T) \in L^{p+1}(R^N)$, нетрудно аналогичным образом показать, что при $\alpha \in (1/(\beta-1), N/2)$ $\|f_T - f_a\|_{L^{p+1}(R^N)} \to 0$, $t \to +\infty$ (при этом необходимы ограничения $z=v_A-u \in C^1(R^1_+; L^{p+1}(R^N))$, $z^{(p+1)/2} \in H^1(R^N)$).

Замечание 2. В теореме 9 получена асимптотика решений $u(t, x)$, отвечающих начальным функциям вида (это следует из (3.21))

$$u_0(x) \sim |x|^{-2\alpha}, \quad |x| \to +\infty, \tag{3.29}$$

при $\alpha \in (1/(\beta-1), N/2)$. Ограничение $\alpha>1/(\beta-1)$ действительно является существенным, так как при $\alpha=1/(\beta-1)$ соответствующие с. ф. следует искать в классе автомодельных решений (3.1). Если же $\alpha \in (0, 1/(\beta-1))$, то, как показано в [14], $\theta_T(t, \xi)$ стремится к пространственно однородному решению $\theta_A(\xi) \equiv \theta_H = (\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$, причем этот вывод справедлив для любых $\beta>1$. При $\alpha \in (1/(\beta-1), N/2)$ все функции из (3.29) имеют бесконечную начальную «энергию»: $u_0 \notin L^1(R^N)$. Это же справедливо и при $\alpha=N/2$, однако здесь с. ф. не имеет «автомодельной» структуры, как в (3.1) и (3.14). Об этом, например, говорит тот факт, что уравнение теплопроводности (3.13) с начальной функцией

$$v(0, x) = v_0(x) \sim |x|^{-N}, \quad |x| \to +\infty, \tag{3.30}$$

имеет, как нетрудно показать, неавтомодельную асимптотику

$$v(t, x) \to ct^{-\frac{N}{2}} \ln t \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad t \to +\infty, \quad c = \text{const} > 0. \tag{3.31}$$

Таким образом, случай $\alpha=N/2$ в (3.29) является «критическим» в том смысле, что здесь задача (1.1), (1.2), $\beta>1+2/N$, имеет нетривиальное п. а. р., согласованное с асимптотикой (3.31) соответствующей линейной задачи (3.13), (3.30) без стока.

Случай $u_0 \in L^1(R^N)$, $u_0 \not\equiv 0$, рассмотрен в работе [14], где сформулирована теорема о сходимости при $t \to +\infty$ автомодельного представления (3.19), отвечающего значению $\alpha=N/2$ к функции $c^* f_a^*(\eta)$, где $c^*>0$ — постоянная, зависящая от начальной функции. Отметим, что этот же результат при некоторых дополнительных ограничениях на $u_0(x)$ может быть получен другим способом, без привлечения интегрального уравнения для функции $u(t, x)$, которое, по-видимому, используется в [14]. Тем самым аналогичное утверждение при $\beta>\sigma+1+2/N$ справедливо для квазилинейного уравнения (1.11). Не останавливаясь на этом подробно, отметим лишь, что главная проблема здесь состоит в следующем: необходимо доказать, что предельная функция $f_a(\eta)$, к которой сходится функция $f_T(t, \eta)$ при $t=t_i \to +\infty$ (в силу сравнительно просто выводимых оценок решения задачи (1.1), (1.2) она удовлетворяет уравнению (3.13)):

1) является единственной, т. е. не зависит от выбора последовательности $\{t_i\}$;

2) отлична от нуля.

При этих условиях сразу получаем $f_a(\eta)=c^*f_a^*(\eta)>0$ в R^N (по крайней мере, это будет справедливо для функций $u_0=u_0(|x|)$).

Первое прямо следует из монотонности $\|u(t,x)\|_{L^1_x(R^N)}\equiv\|f_T(t,\eta)\|_{L^1_\eta(R^N)}$ (при этом учитывается, что различные кривые (3.18) не могут пересекаться). Второе нетрудно получить путем построения специального вида нижнего решения уравнения (1.1). Именно, положим

$$u_-(t,x)=\psi(t)(T+t)^{-\frac{N}{2}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4(T+t)}\right], \tag{3.32}$$

где функция $\psi(t)>0$ будет указана ниже. Тогда u_- будет нижним решением уравнения (1.1), т. е. $\mathbf{B}(u^-)\leqslant 0$ в $R^1_+\times R^N$, если

$$\psi'(t)\leqslant-\psi^\beta(t)(T+t)^{-\frac{N}{2}(\beta-1)},\quad t>0.$$

Нетрудно проверить, что при $\beta>1+2/N$ в качестве $\psi(t)$ можно взять функцию, равномерно по всем $t\geqslant 0$ отделенную от нуля, например, следующего вида:

$$\psi(t)=\psi_0+A(T+t)^{-\gamma},\ t>0;\ \psi_0>0,\ A>0, \tag{3.32'}$$

где $\gamma=\frac{N}{2}(\beta-1)-1>0$ и $\gamma A>(\psi_0+AT^{-\gamma})^\beta$. Поэтому при соответствующих ограничениях на $u_0(x)$ имеем: $u(t,x)\geqslant u_-(t,x)$ в R^N, т. е. $f_T(t,\eta)>$ $>\psi_0\exp(-|\eta|^2/4)$ при любых $t>0$, $\eta\in R^N$. Отметим, что положить просто $\psi(t)=\psi_0$ нельзя (это легко проверить, тогда (3.32) не будет нижним решением), поэтому в (3.32′) введена малая «добавка», которая все-таки «компенсирует» нелинейный член $-u_-^\beta$ в неравенстве $\mathbf{B}(u_-)\leqslant 0$, которому должно удовлетворять нижнее решение. Последнее фактически и означает, что этот член уравнения является несущественным при $t\to$ $\to+\infty$ по сравнению с диффузионным.

Замечание 3. Использованное в теореме 9 семейство автомодельных решений (3.14) является двупараметрическим: каждая функция f_a характеризуется, во-первых, значением параметра α в задаче (3.15), (3.16) и, во-вторых, как всякое решение линейного уравнения, величиной постоянного множителя M в (3.17). Как следует из условия (3.21), последний параметр также является существенным. Отсюда можно заключить, что при $\beta>1+2/N$ размерность аттрактора рассматриваемого параболического уравнения не меньше двух.

2. Случай $\beta\in(1,1+2/N]$. Устойчивость автомодельных с. ф. Некоторые из полученных ниже результатов справедливы при любых $\beta>1$. Исследование здесь разбивается на несколько этапов.

Предварительно для удобства сформулируем следующую простую лемму, которая вытекает из принципа максимума:

Лемма 5. *Пусть $\theta_+(\xi)\in C^2(R^N)$ — какое-либо верхнее решение* (2.12) *или* (2.16) *уравнения* (2.1). *Пусть для некоторого $T>0$*

$$u_0(x)\leqslant T^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta_+\left(\frac{x}{T^{1/2}}\right),\quad x\in R^N. \tag{3.33}$$

Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) *справедлива оценка*

$$u(t,x)\leqslant(T+t)^{-1/(\beta-1)}\theta_+\left(\frac{x}{(T+t)^{1/2}}\right),\quad t>0,\quad x\in R^N. \tag{3.34}$$

Замечание. Лемма останется справедливой, если θ_+ заменить на соответствующее нижнее решение θ_- уравнения (2.1) и поменять в (3.33), (3.34) знаки неравенства на противоположные. При этом от функции θ_- не требуется C^2-гладкости во всем пространстве R^N, достаточно, чтобы $\theta_- \in C^2$ всюду, где $\theta_- > 0$, т. е. $\theta_-(\xi)$ здесь может быть и финитной функцией.

2.1. Вспомогательное утверждение. На первом этапе будет использован подход к исследованию асимптотического поведения решений параболических уравнений, предложенный для исследования других задач в [64], [65] (он же применялся в [14]).

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций[4]

$$u_k(t, x) = k^{\frac{1}{\beta-1}} u(kt, k^{\frac{1}{2}} x), \quad t > 0, \quad x \in R^N, \tag{3.35}$$

где $k > 0$ — произвольная постоянная. Каждая из функций u_k удовлетворяет исходному уравнению (1.1)

$$\mathbf{B}(u_k) = 0, \quad (t, x) \in R^1_+ \times R^N, \tag{3.36}$$

$$u_k(0, x) = k^{\frac{1}{\beta-1}} u_0(k^{\frac{1}{2}} x), \quad x \in R^N. \tag{3.37}$$

Лемма 6. *Пусть* $\beta \in (1, 1+2/N]$ *и выполнено условие* (3.33). *Тогда при всех достаточно больших* k *справедливы оценки*

$$u_k(t, x) \leqslant c_1, \quad t \geqslant \tau > 0, \quad x \in R^N, \tag{3.38}$$

$$\| u_k(t) \|^2_{L^2(R^N)} \leqslant c_2, \quad \int_\tau^T \| \nabla u_k(s) \|^2_{L^2} ds \leqslant c_3, \tag{3.39}$$

$$\int_\tau^T \| (u_k)_t(s) \|^2_{L^2(R^N)} \leqslant c_4, \quad \| \nabla u_k(\tau) \|^2_{L^2} \leqslant c_5, \tag{3.40}$$

где положительные постоянные c_i *не зависят от* k.

Первые две оценки прямо следуют из (3.33), остальные легко выводятся из уравнения (3.36) и предыдущих оценок (см., например, [64]).

Из леммы 6 на основе теорем вложения С. Л. Соболева [66] получаем такое утверждение:

Теорема 10. *Из любой монотонной последовательности* $k_j \to +\infty$, *можно выбрать такую подпоследовательность* $k_i \to +\infty$, *что*

$$u_k(t, x) \to w(t, x), \quad k = k_i \to +\infty, \tag{3.41}$$

причем сходимость равномерна на любом компакте из $[\tau, +\infty) \times R^N$ *и предельная функция* $w(t, x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1).

Полагая теперь в (3.41) $t = 1$, $k_i = T + t_i$ для достаточно больших i и $x = \xi$, получим такое

Следствие. *В сделанных предположениях*

$$\theta_T(t_i, \xi) \to w(1, \xi), \quad \xi = \frac{x}{(T + t_i)^{1/2}}, \quad t_i \to +\infty, \tag{3.42}$$

равномерно на каждом компакте из R^N.

Здесь θ_T — автомодельное представление (3.2) решения $u(t, x)$. Функция w в (3.41), (3.42) может, вообще говоря, зависеть от выбора после-

[4] Семейство (3.35) фактически позволяет другим способом определить автомодельное представление (3.2), хотя, конечно, используемые ниже методы применимы для непосредственного анализа асимптотического поведения автомодельного представления (3.2) при $t \to +\infty$.

довательности k_j в теореме 10 (отметим, что пока неизвестно, является ли w автомодельным решением уравнения (1.1)). Однако при $\beta\in(1, 1+2/N)$ у всех возможных функций w имеется одно общее свойство, которое выделяется на основе проведенного в § 2 анализа решений «автомодельного» уравнения (1.4).

Теорема 11. *Пусть* $\beta\in(1, 1+2/N)$. *Тогда если* $u_0(x)\not\equiv 0$, *то* $w(1, \xi)\not\equiv 0$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $u_0(0)>0$. Тогда, как нетрудно проверить, найдутся такие достаточно малые $T>0$ и $\mu_1>0$, что

$$u_0(x)\geqslant T^{-1/(\beta-1)}\theta\left(\frac{|x|}{T^{1/2}};\ \mu_1\right),\quad |x|<T^{1/2}\operatorname{supp}\theta(\xi;\ \mu_1),$$

где $\theta(\xi;\ \mu_1)$ — решение задачи (2.1). Поэтому (см. замечание к лемме 5)

$$u(t,\ x)\geqslant (T+t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta\left(\frac{|x|}{(T+t)^{1/2}};\ \mu_1\right),\quad t>\theta,\quad |x|<(T+t)^{1/2}\cdot\operatorname{supp}\theta(\xi;\ \mu_1),$$

и, следовательно,

$$\theta_T(t,\ \xi)\geqslant\theta(\xi;\ \mu_1)>0,\ |\xi|<\operatorname{supp}\theta(\xi;\ \mu_1)$$

для всех $t>0$.

Замечание. При $\beta>1+2/N$ (см. теорему 9), а также в случае $\beta=1+2/N$ теорема 11 перестает быть справедливой. Это можно связать с отсутствием при $\beta\geqslant 1+2/N$ «финитных» решений $\theta(\xi;\ \mu)$ задачи (2.1) (теорема 1).

2.2. Устойчивость автомодельных решений. Прежде всего покажем, что независимость предельной функции w в (3.41) от выбора последовательности k_j гарантирует ее «автомодельность».

Лемма 7. *Пусть*

$$u_k(t,\ x)\to w(t,\ x),\ k\to+\infty. \tag{3.43}$$

Тогда

$$w(t,x)=t^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta(\xi),\quad \xi=\frac{x}{t^{1/2}}, \tag{3.44}$$

где $\theta(\xi)=w(1,\ \xi)$.

Действительно, из (3.43) непосредственно следует, что $\gamma^{1/(\beta-1)}w(\gamma t,\ \gamma^{1/2}x)\equiv w(t,\ x)$ для любых $\gamma>0$. Полагая в этом равенстве $\gamma=t^{-1}$, приходим к (3.44).

Таким образом, при выполнении (3.43) функция w является автомодельной и $\theta(\xi)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\mathbf{A}(\theta)\equiv\Delta_\xi\theta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\xi_i+\frac{1}{\beta-1}\theta-\theta^\beta=0,\quad \xi\in R^N, \tag{3.45}$$

которое в радиально-симметричном случае совпадает с рассмотренным в § 2 уравнением (1.4).

Теперь необходимо перейти к исследованию, которое позволило бы конкретизировать вид предельной радиально-симметричной «автомодельной» функции $\theta=\theta_A(|\xi|)$ в (3.44), а также отвечающее ей множество притяжения $\mathscr{W}_\mu$ ($\mu=\theta_A(0)$) в пространстве начальных функций. Для этого удобно перейти к уравнению для автомодельного представления (3.2). Вводя новое «время» по формуле $\tau=\ln(1+t/T)$, получаем, что

функция $\theta_T=\theta_T(\tau, \xi)$ удовлетворяет следующей параболической задаче:

$$\frac{\partial\theta_T}{\partial\tau}=\mathbf{A}(\theta_T), \quad (t, \xi)\in R^1_+\times R^N, \tag{3.46}$$

$$\theta_T(0, \xi)=T^{\frac{1}{\beta-1}}u_0(T^{\frac{1}{2}}\xi), \quad \xi\in R^N. \tag{3.47}$$

Сопоставляя (3.46) и (2.1), убеждаемся, что в новых обозначениях вопрос об асимптотической устойчивости автомодельных решений (3.1) сводится к проблеме устойчивости и построения областей притяжения стационарных решений уравнения (3.46). Здесь, исходя из леммы 7, удобно определить условия «монотонности по k» функциональных последовательностей $u_k(t, x)$ в (3.35), что равносильно требованию монотонности по τ автомодельного представления $\theta_T(\tau, \xi)$. Эти условия дает следующая

Лемма 8. *Пусть* $\theta_+(\xi)$ (*соответственно*, $\theta_-(\xi)$) — *какое-либо верхнее* (*нижнее*) *решение уравнения* (2.1) (см. формулы (2.12) и (2.16) в § 2), *т. е.* $\mathbf{A}_R(\theta_+)\leqslant 0$ ($\mathbf{A}_R(\theta_-)\geqslant 0$) *всюду в* R^N. *Тогда решение уравнения* (3.46) *с начальной функцией* $\theta_T(0, \xi)=\theta_+(\xi)$ (*соответственно*, $\theta_T(0, \xi)=\theta_-(\xi)$) *является невозрастающим* (*неубывающим*) *по* τ *в* R^N:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_T(\tau, \xi)\leqslant 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_T\geqslant 0\right) \text{ в } R^1_+\times R^N. \tag{3.48}$$

Справедливость леммы вытекает из принципа максимума. Действительно, функция $z=(\theta_T)_\tau$ удовлетворяет следующему «линейному» параболическому уравнению:

$$z_\tau=\Delta_\xi z+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial z}{\partial\xi_i}\xi_i+\left(\frac{1}{\beta-1}-\beta\theta^{\beta-1}\right)z \text{ в } R^1_+\times R^N,$$

причем $z(0, \xi)=\mathbf{A}_R(\theta_+(\xi))\leqslant 0$ в R^N. Следовательно, $z\leqslant 0$ всюду в $R_+{}^1\times R^N$. Утверждения, подобные лемме 8, были установлены для частного вида параболических уравнений в [61], [67], и в общем случае — в [68], [69], где они использовались для доказательства теорем сравнения решений параболических уравнений с различными нелинейными операторами. Отметим, что требование гладкости на функцию $\theta_-(\xi)$, обеспечивающую критичность решения $(\theta_T)_\tau\geqslant 0$ в $R_+{}^1\times R^N$, могут быть ослаблены; достаточно, чтобы неравенство $\mathbf{A}_R(\theta_-)\geqslant 0$ было выполнено лишь там, где $\theta_->0$ (см. [68], [69]). Поэтому в качестве $\theta_-(\xi)$ можно взять, например, финитную функцию, гладкость которой может нарушаться в тех точках, где $\theta_-=0$.

Из леммы 7 и 8 вытекает

Теорема 12. *Пусть* $\beta>1$ *и радиально-симметричная функция* $u_0(x)$ *в* (1.2) *такова, что*

$$\theta_T(0, \xi)=T^{\frac{1}{\beta-1}}u_0(T^{\frac{1}{2}}\xi)$$

является верхним или нижним решением уравнения (2.1). *Тогда существует такая радиально-симметричная «автомодельная» функция* $\theta_A(|\xi|)$, *удовлетворяющая* (1.4), (1.6), *что*

$$\theta_T(\tau, \xi)\to\theta_A(|\xi|), \ \tau\to+\infty,$$

равномерно на каждом компакте из R^N.

Замечание. Разумеется, все множество верхних и нижних решений уравнения (2.1) не исчерпывается теми функциями $\theta_\pm$, которые указаны в § 2 (см. (2.12), (2.16)). Например, каждой «автомодельной» функции отвечает целое семейство таких функций

$$\theta_\pm(\xi)=A_\pm\theta_A(|\xi|),$$

где $A_+>1$, $A_-<1$ — постоянные. Действительно, в этом случае

$$\mathbf{A}_R(\theta_\pm(\xi))=A_\pm\theta_A^\beta(|\xi|)(1-A_\pm^{\beta-1}),$$

т. е.

$$\mathbf{A}_R(\theta_+)<0,\ \mathbf{A}_R(\theta_-)>0 \text{ в } R^N.$$

Перейдем теперь к построению множества притяжения $\mathscr{W}_\mu$, отвечающего данной функции $\theta_A=\theta(|\xi|;\ \mu)$. Это можно сделать с помощью следующего утверждения, которое вытекает из леммы 8:

Лемма 9. *Пусть θ_+, $\theta_-\in C^2(R^N)$ — соответственно верхнее и нижнее радиально-симметричные решения уравнения* (2.1), *которым отвечает одна единственная «автомодельная» функция $\theta_A=\theta(|\xi|;\ \mu)$ такая, что*

$$\theta_-(|\xi|)\leqslant\theta_A(|\xi|)\leqslant\theta_+(|\xi|),\ \xi\in R^N.$$

Тогда множество

$$\mathscr{H}_\mu=\{u_0\geqslant 0\mid \text{существует такая } T>0, \text{ что } \theta_-(|\xi|)\leqslant$$
$$\leqslant T^{1/(\beta-1)}u_0(T^{1/2}\xi)\leqslant\theta_+(|\xi|),\ \xi\in R^N\}$$

принадлежит $\mathscr{W}_\mu$.

Таким образом, проблема выделения множеств $\mathscr{W}_\mu$ тесно связана с задачей о классах единственности решений $\theta_A(|\xi|)$ задачи (1.4), (1.6).

Ниже мы подробнее остановимся на исследовании множества $\mathscr{W}_A^*$, отвечающего «минимальной» функции $\theta_A^*(|\xi|)=\theta(|\xi|;\ \mu_*)$, указанной в теореме 4 (§ 2).

Теорема 13. *Пусть $\beta\in(1,\ 1+2/N)$. Пусть начальная функция $u_0(x)\not\equiv 0$ такова, что*

$$u_0(x)\leqslant T^{-1/(\beta-1)}\theta_A^*\left(\frac{|x|}{T^{1/2}}\right),\quad x\in R^N. \tag{3.49}$$

Тогда $\theta_T(\tau,\ \xi)\to\theta_A^*(|\xi|)$ при $\tau\to+\infty$ равномерно на каждом компакте из R^N.

Доказательство. Из следствия к теореме 10 вытекает, что $\theta_T(\tau,\ \xi)\to w(1,\ \xi)$ при $\tau=\tau_i\to+\infty$, причем в силу (3.49) $w(1,\ \xi)\leqslant\leqslant\theta_A^*(|\xi|)$ в R^N. Тогда, действуя так же, как при доказательстве теоремы 11, нетрудно найти такие постоянные $\mu_1\in(0,\ \mu_*)$ и $\tau_0\geqslant 0$, что

$$\theta_-(\xi)=\theta(|\xi|;\ \mu_1)\leqslant\theta_T(\tau_0,\ \xi)\leqslant\theta_A^*(|\xi|),\quad \xi\in R^N.$$

Однако в силу леммы 8 радиально-симметричное по ξ решение $\theta_T^-(\tau,\xi)$ уравнения (3.46), отвечающее начальному распределению $\theta_T^-(\tau_0,\ \xi)=\theta(|\xi|;\ \mu_1)$, является неубывающим по τ, и поэтому из теоремы 4 (§ 2) следует, что $\theta_T^-(\tau,\ \xi)\to\theta_A^*(|\xi|)$, $\tau\to+\infty$. Отсюда $\theta_T(\tau,\ \xi)$ также стабилизируется к $\theta_A^*(|\xi|)$ при $\tau\to+\infty$.

Замечание. Таким образом, «автомодельная» функция $\theta_A^*(|\xi|)$ устойчива снизу. Если θ_A^* — единственное решение уравнения (1.4) с «экспоненциальной» асимптотикой, то она будет также устойчивой сверху, причем множество притяжения $\mathscr{W}_A^*$ в этом случае может быть опре-

делено, например, следующим образом (см. замечание 2 к теореме 12):

$$\mathscr{W}_A^* = \{u_0(x) \geqslant 0 \mid \text{существуют такие } T>0 \text{ и}$$

$$A \geqslant 1, \text{ что } 0 < u_0(x) \leqslant T^{-1/(\beta-1)} A\theta_A^*\left(\frac{|x|}{T^{1/2}}\right), \quad x \in R^N\}.$$

Отметим, что из теоремы 13 непосредственно вытекает такое утверждение, которое завершает доказательство теоремы 4 в § 2.

Следствие. *При* $\beta \in (1, 1+2/N)$ *«автомодельная» функция* $\theta = \theta_A^*(|\xi|)$ *является минимальным в* R^N *решением среди всех неотрицательных решений (в том числе и радиально-несимметричных) эллиптического уравнения* (3.45).

3. «Критический» случай $\beta = 1+2/N$, $u_0 \in L^1(R^N)$. **Приближенное автомодельное решение.** Устойчивость нетривиальных автомодельных решений (3.1) при $\beta = 1+2/N$ изучалась в предыдущем пункте. Напомним, что в силу теоремы 5 этим решениям отвечает бесконечная «энергия». Ниже рассматривается вопрос об эволюции начальных возмущений $u_0(x) \in L^1(R^N)$, причем мы ограничимся анализом случая, когда

$$u_0(x) = o\{\exp(-\gamma|x|^2)\}, \quad |x| \to +\infty, \tag{3.50}$$

для некоторой постоянной $\gamma > 0$. Будет показано, что здесь «стабилизирующим» является следующее автомодельное представление решения $u(t, x)$:

$$g_T(t, \xi) = \mathbf{Q}_T(u) \equiv [(T+t)\ln(T+t)]^{-\frac{N}{2}} u(t, \xi(T+t)^{\frac{1}{2}}), \tag{3.51}$$

где $T > 1$ — постоянная. Это означает, что в случае, когда $g_T(t, \xi)$ стабилизируется при $t \to +\infty$ к некоторой ограниченной функции $g_*(\xi) \not\equiv 0$, асимптотические свойства $u(t, x)$ описываются п.а.р. $u_a(t, x)$ такого вида:

$$u(t, x) \to u_a(t, x) = [(T+t)\ln(T+t)]^{-\frac{N}{2}} g_*\left(\frac{x}{(T+t)^{1/2}}\right). \tag{3.52}$$

По сравнению с (3.1) в (3.52) присутствует дополнительный логарифмический множитель.

Покажем сначала, что при больших t решение $u(t, x)$ ограничено снизу в R^N функцией, имеющей структуру п.а.р. в (3.52). Это утверждение уточняет один из результатов [14].

Лемма 10. *Пусть* $\beta = 1+2/N$, $u_0 \not\equiv 0$. *Тогда для любого* $T > 1$ *найдутся такие* $\tau > 0$ *и* $A \in (0, (N/2)^{N/2})$, *что всюду в* $[\tau, +\infty) \times R^N$

$$u(t, x) \geqslant u_-(t, x) = A[(T+t)\ln(T+t)]^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4(T+t)}\right]. \tag{3.53}$$

Для доказательства в силу оценки (3.4) достаточно показать, что функция u_- в (3.53) является нижним решением уравнения (1.1). Это прямо следует из вида уравнения для функции g_T, которое будет получено ниже.

Оценим теперь $u(t, x)$ сверху через функцию, близкую по своему виду при больших t к п.а.р. (3.52).

Лемма 11. *Пусть* $\beta = 1+2/N$ *и начальная функция* u_0 *удовлетворяет условию* (3.50). *Тогда для любого* $T > e^2$ *найдутся такие постоянные* $a > 0$

и $H>0$, *что*

$$u(t, x) \leqslant u_+(t, x) = H[(T+t)\ln(T+t)]^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4(T+t)[1+a\ln^{-1}(T+t)]^2}\right\} \tag{3.54}$$

всюду в $R_+^1 \times R^N$.

Доказательство. Покажем, что u_+ в (3.54) является верхним решением уравнения (1.1), если постоянная $H=H(a, T)>0$ достаточно велика. Тогда, выбирая a и H большими, с учетом (3.50) приходим к оценке (3.54). Итак, определим условия, при которых

$$\mathbf{B}(u_+) \geqslant 0 \text{ в } R_+^1 \times R^N. \tag{3.55}$$

Введем обозначения: $\tau=(T+t)$, $\varphi(\tau)=\tau^{1/2}[1+a\ln^{-1}\tau]$. Тогда, как нетрудно проверить, неравенство (3.55) эквивалентно такому:

$$\frac{1}{2}|\xi|^2\left(\frac{1}{2}-\varphi\varphi'\right)-\frac{N}{2}+\frac{N}{2}\frac{\varphi^2}{\tau}(1+\ln^{-1}\tau)-\frac{H^{\frac{2}{N}}\varphi^2}{\tau\ln\tau}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2N}|\xi|^2\right)\leqslant 0,$$
$$x \in R^N, \tag{3.56}$$

где введено обозначение $|\xi|^2=|x|^2/\tau$. Имеем

$$\varphi(\tau)\varphi'(\tau)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\ln\tau}\right)\left(1+\frac{a}{\ln\tau}-\frac{2a}{\ln^2\tau}\right)\geqslant\frac{1}{2}+\frac{a_1}{\ln\tau};$$

$$\frac{N}{2}\frac{\varphi^2(\tau)}{\tau}\left(1+\frac{1}{\ln\tau}\right)=\frac{N}{2}\left(1+\frac{a^2}{\ln^2\tau}+\frac{2a}{\ln\tau}\right)\left(1+\frac{1}{\ln\tau}\right)\leqslant\frac{N}{2}+\frac{a_2}{\ln\tau},$$

где

$$a_1=a_1(a, T)=\frac{a}{2}\left(1-\frac{2}{\ln T}\right)>0, \quad a_2=a_2(a, T)=$$
$$=\frac{N}{2}\left\{1+2a+\frac{a^2+2a}{\ln T}+\frac{a^2}{\ln T}\right\}.$$

С учетом этих оценок получаем, что (3.56) будет заведомо выполнено, если

$$-\frac{a_1}{2}|\xi|^2+a_2-H^{\frac{2}{N}}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2N}\right)\leqslant 0.$$

Очевидно, что при достаточно большом $H>0$ это неравенство будет справедливо. Например, если

$$H^{\frac{2}{N}} \geqslant Na_1 \max\left\{1, \exp\left(\frac{1}{N}\frac{a_2}{a_1}-1\right)\right\}.$$

Лемма доказана.

Из двух последних лемм вытекает, что при выполнении (3.50) и $u_0 \not\equiv 0$ «автомодельное» представление (3.51) (T — велико) при всех больших t ограничено сверху и снизу

$$A\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right)\leqslant g_T(t, \xi)\leqslant H\exp\left\{-\frac{|\xi|^2}{4\left(1+\frac{a}{\ln(T+t)}\right)^2}\right\}. \tag{3.57}$$

Следовательно, это же справедливо и для возможной предельной функции $g_*(\xi)$, причем оценки здесь имеют вид

$$A\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right)\leqslant g_*(\xi)\leqslant H\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \text{ в } R^N. \tag{3.57'}$$

Полагая $\tau=\ln(1+t/T)$, нетрудно вывести параболическое уравнение для функции $g_T=g_T(\tau, \xi)$

$$\frac{\partial g_T}{\partial \tau}=\Delta_\xi g_T+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(g_T)_{\xi_i\xi_i}+\frac{N}{2}g_T+\frac{1}{\tau+\ln T}\left(\frac{N}{2}g_T-g_T^{1+\frac{2}{N}}\right). \quad (3.58)$$

Из этого уравнения на основе поточечных (3.57), а также других интегральных оценок g_T (для их вывода необходимо предварительно привести дифференциальные члены в правой части (3.58) к дивергентному виду) получаем, что функция $g_T(\tau, \xi)$ стабилизируется при $\tau=\tau_i\to+\infty$ (τ_i— подпоследовательность произвольной последовательности $\tau_j\to+\infty$, $j\to+\infty$) равномерно на каждом компакте из R^N к решению стационарного уравнения, отвечающего $\tau=+\infty$, т. е. $g_*(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\xi g_*+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(g_*)_{\xi_i\xi_i}+\frac{N}{2}g_*=0, \quad \xi\in R^N. \quad (3.59)$$

В радиально-симметричном случае ($u_0=u_0(|x|)$) оно имеет вид (3.14), $\alpha=N/2$ и, следовательно,

$$g_*(\xi)=M\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right), \quad M=\text{const}, \quad (3.60)$$

причем в силу (3.57′) $M\in[A, H]$, где постоянные A и H, указанные в леммах 10 и 11, зависят от вида начальной функции u_0.

Отметим, что из вида уравнения (3.58) непосредственно вытекает справедливость леммы 10, так как функция $q(\xi)=\mathbf{Q}_T(u_-(t, x))\equiv\equiv A\exp(-|\xi|^2/4)$ удовлетворяет (3.59), и поскольку $(N/2)q-q^{1+2/N}\geqslant 0$ в R^N при $A\in(0, (N/2)^{N/2}]$, $q(\xi)$ является нижним решением уравнения (3.58).

Сам факт стабилизации $g_T(\tau, \xi)$ при $\tau=\tau_i\to+\infty$ нетрудно показать тем же способом, что и в п. 2.1. Именно, определяя в соответствии с (3.51) семейство функций

$$u_k(t, x)=(k\ln k)^{N/2}u(kt, k^{1/2}x), \quad t>0, \quad x\in R^N, \quad k>1, \quad (3.61)$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$(u_k)_t=\Delta u_k-(\ln k)^{-1}u_k^{1+2/N}, \quad (3.62)$$

с помощью оценок, аналогичных указанным в лемме 6, устанавливается, что для функциональной последовательности $\{u_k\}$ справедливо утверждение типа теоремы 10, т. е.

$$u_k(t, x)\to w(t, x), \quad k=k_i\to+\infty,$$

равномерно на каждом компакте из R^N, где функция w удовлетворяет уравнению (3.62) при $k=+\infty$, т. е.

$$w_t=\Delta w, \quad t>0, \quad x\in R^N. \quad (3.63)$$

Следовательно,

$$g_T(t_i, \xi)\to w(1, \xi), \quad \xi=\frac{x}{(T+t_i)^{1/2}}, \quad t_i\to+\infty.$$

Любопытно, что «логарифмическое» отклонение в п.а.р. (3.52) (или в (3.61)) от автомодельной зависимости (3.1) не меняет свойства инвариантности предельной функции $w(t, x)$, т. е. здесь как и ранее (см. лемму 7) справедлива следующая

Лемма 12. *Пусть*

$$u_k(t, x) \to w(t, x), \ k \to +\infty. \tag{3.64}$$

Тогда функция w является автомодельным решением уравнения (3.63)

$$w(t, x) = t^{-\frac{N}{2}} g(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^{1/2}}. \tag{3.65}$$

Доказательство. Условие (3.64) означает, что

$$(k \ln k)^{\frac{N}{2}} u(kt, k^{1/2}x) \to w(t, x), \quad k \to +\infty. \tag{3.66}$$

Умножим обе части (3.66) на $\delta^{N/2}$, $\delta = \text{const} > 0$, сделаем замены $t \to \delta t$, $x \to \delta^{1/2} x$ и положим $k' = k\delta$. Тогда получим

$$\left(\frac{\ln k}{\ln k'}\right)^{\frac{N}{2}} (k' \ln k')^{\frac{N}{2}} u(k't, (k')^{1/2}x) \to \delta^{\frac{N}{2}} w(\delta t, \delta^{\frac{1}{2}} x).$$

Однако в силу (3.64) левая часть сходится при $k' \to +\infty$ к $w(t, x)$, т. е. $w(t, x) = \delta^{N/2} w(\delta t, \delta^{1/2} x)$ для любого $\delta > 0$, откуда вытекает (3.65).

В заключение покажем, что в условиях леммы 12 предельная функция $g_*(\xi)$ не зависит от начальной функции $u_0(|x|)$ и является единственной в следующем смысле.

Теорема 14. *Пусть* $\beta = 1 + 2/N$ *и* $u_0 = u_0(|x|) \not\equiv 0$ *удовлетворяет* (3.50). *Пусть равномерно на каждом компакте из* R^N

$$g_T(\tau, \xi) \to g_*(\xi), \ \tau \to +\infty.$$

Тогда

$$g_*(\xi) = \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}} \left(1 + \frac{2}{N}\right)^{\frac{N^2}{4}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right), \quad \xi \in R^N. \tag{3.67}$$

Доказательство. Как было показано ранее, в сделанных предположениях предельными могут быть только функции вида (3.60), где $M \in [A, H]$, т. е. остается доказать, что в данном случае возможно лишь одно значение постоянной M, а именно

$$M = \left(\frac{N}{2}\right)^{N/2} \left(1 + \frac{2}{N}\right)^{N^2/4}, \tag{3.68}$$

которое, тем самым, не зависит от начальной функции. Интегрируя уравнение (3.58) по R^N, что можно делать в силу (3.57), приходим к равенству

$$\frac{d}{d\tau} \|g_T(\tau)\|_{L^1(R^N)} = \frac{1}{\tau + \ln T} G(g_T)(\tau) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\tau + \ln T} \left\{ \frac{N}{2} \|g_T(\tau)\|_{L^1(R^N)} - \|g_T(\tau)\|^{1+\frac{2}{N}}_{L^{1+2/N}(R^N)} \right\}, \quad \tau > 0. \tag{3.69}$$

В силу равномерной по τ ограниченности $\|g_T(\tau)\|_{L^1(R^N)}$ (см. (3.57)) из (3.69) вытекает требование сходимости интеграла:

$$\left| \int_{\tau_0}^{+\infty} \frac{G(g_T)(\tau)\, d\tau}{\tau + \ln T} \right| < +\infty \tag{3.70}$$

для всех $\tau_0 > 0$. Однако в условиях теоремы $G(g_T)(\tau) \to G(g_*)$ при

$\tau \to +\infty$. Отсюда с необходимостью получаем условие

$$G(g_*) \equiv \frac{N}{2} \|g_*\|_{L^1(R^N)} - \|g_*\|_{L^{1+\frac{2}{N}}(R^N)}^{1+\frac{2}{N}} = 0, \tag{3.71}$$

в противном случае интеграл в (3.70) расходится. Подставляя в (3.71) функцию g_* из (3.60), приходим к (3.68) и, следовательно, к (3.67), что завершает доказательство.

Отметим, что в условиях теоремы 14 п.а.р. (3.52)

$$u_a(t, x) = [(T+t)\ln(T+t)]^{-\frac{N}{2}} \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}} \left(1+\frac{2}{N}\right)^{\frac{N^2}{4}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4(T+t)}\right],$$

которое описывает поведение решений задачи при больших t, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \Delta u_a - \frac{N}{2} \frac{u_a}{(T+t)\ln(T+t)}, \quad t > 0, \quad x \in R^N,$$

которое существенно отличается от исходного (1.1).

4. Заключительные замечания. Подчеркнем, что во многих рассмотренных случаях эволюционные свойства решений задачи (1.1), (1.2) можно в определенном смысле предсказать и объяснить, анализируя структуру семейства $\{u_A\}$ его автомодельных решений типа (3.1) или, что то же самое, семейства решений $\{\theta(\xi; \mu),\ 0<\mu<\theta_H\}$ «автомодельного» уравнения (1.4), схематически изображенную на рис. 1 и 2. Как уже упоминалось ранее, функции $\theta(\xi; \mu)$ являются либо стационарными решениями уравнения (3.46), которому удовлетворяет автомодельное представление решения $u(t, x)$, либо критическими функциями, если $\theta(\xi; \mu)$ обращаются где-то в нуль (отметим, что последнее является общим свойством широкого класса квазилинейных параболических уравнений [68], [69]). Таким образом, наличие в семействе $\{\theta(\xi; \mu)\}$ «финитных» функций (случай $\beta \in (1, 1+2/N)$) гарантирует, что предельное распределение $\theta_T(+\infty, \xi)$ нетривиально и тем самым принадлежит классу рассмотренных автомодельных функций (теорема 11). И наоборот, если «финитных» функций в семействе $\{\theta(\xi; \mu)\}$ нет ($\beta \geqslant 1+2/N$), то это указывает на то, что с достаточно малых начальных функций, лежащих при $|\xi| \to +\infty$ «ниже» любых стационаров $\theta(\xi; \mu)$, происходит стабилизация к тривиальному решению (теорема 8 при $u_A \equiv 0$, лемма 11). Это означает, что здесь существуют с.ф., не принадлежащие семейству $\{\theta(\xi; \mu)\}$, которые поэтому следует искать в другом множестве «неавтомодельных» предельных функций (п. 1.2 и п. 3). Таким образом, структура непрерывного «поля» частных решений $\{u_A\}$ уравнения (1.1) позволяет выделить некоторые наиболее общие асимптотические свойства всех его возможных решений.

Эти представления по смыслу близки к выводам, полученным на основе метода стационарных состояний [70]—[72], в рамках которого самое общее свойство локализации неограниченных решений (режимов с обострением) нелинейных параболических задач определялось с помощью похожего анализа непрерывного «поля» функций, состоящего из построенных решений соответствующей стационарной задачи. В этой связи укажем также на работы [73], [74], где излагается один подход к исследованию эффекта локализации воздействия граничных режимов

с обострением на среду с нелинейной теплопроводностью, который, фактически, эквивалентен своеобразной «аппроксимации» граничного LS-режима с обострением на непрерывном «поле» локализованных S-режимов, каждому из которых отвечает свое весьма простое автомодельное решение. При этом исследуемый LS-режим такого простого решения, проявляющего свойство локализации, не имеет.

Общность указанных рассмотрений позволет сделать вывод о том, что построение полного непрерывного семейства («поля») каких-либо частных, достаточно простых (например, автомодельных или инвариантных) решений нелинейного параболического уравнения дает возможность за счет указанной выше «аппроксимации» обоснованно судить о многих важных эволюционных свойствах рассматриваемого процесса.

В заключение отметим, что с помощью построенных в § 2 автомодельных решений (1.3) можно проиллюстрировать результаты работы [75], где, в частности, изучались условия разрешимости задачи Коши для (1.1) с начальным условием $u(0, x)=\delta(x)$, δ — дельта-функция. Установлено, что при $\beta\geqslant 1+2/N$ она не имеет решения, точнее ее «решением» будет $u(t, x)\equiv 0$, так что $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t, x)\equiv 0\neq\delta(x)$ в R^N. Все положительные автомодельные решения (1.3), $T=0$, в этом случае имеют в качестве начальной функцию вида

$$u_A(0^+, x)=C|x|^{-2/(\beta-1)},\ x\neq 0;\ C=\mathrm{const}>0, \tag{3.72}$$

так что $u_A(0^+, x)\notin L^1(R^N)$, что правильно согласуется с выводом [75].

В случае $\beta\in(1, 1+2/N)$ автомодельные решения (1.3), $T=0$, удовлетворяют либо (3.72), если $\theta_A(\xi)$ — функция со «степенной» асимптотикой (2.2), либо начальному условию

$$u_A(0^+, x)=A_0\delta^l(x),\ x\in R^N;\ l=\frac{1}{\beta-1}\frac{2}{N}>1 \tag{3.73}$$

(в частности, $u_A(0^+, x)=0$ в $R^N\setminus\{0\}$), если функция $\theta_A=\theta_A^*(\xi)$ имеет «экспоненциальную» асимптотику (2.3). В (3.73) постоянная A_0 равна

$$A_0=\left\{\int\limits_{R^N}[\theta_A^*(\xi)]^{\frac{1}{l}}d\xi\right\}^l<+\infty.$$

В обоих случаях при $\beta\in(1, 1+2/N)$ $u_A(0^+, x)\notin L^1(R^N)$.

Таким образом, (3.72) и (3.73) характеризуют степень сингулярности в точке $x=0$ начальной функции, при которой задача Коши для (1.1) имеет в $R_+^1\times R^N$ классическое (и нетривиальное) решение.

Примечание. После того, как данная статья была послана в редакцию, нам стало известно о существовании работы [76], в которой несколько иным методом получены некоторые результаты §§ 2 и 3, относящиеся к анализу случая $\beta>1+2/N$ (случай $\beta\leqslant 1+2/N$ не рассматривался). Новым результатом [76], в основном, является доказательство существования бесконечномерного множества асимптотически устойчивых не радиально-симметричных автомодельных решений уравнения (1.1) вида (1.3), где функции $\theta_A(\xi)>0$ удовлетворяют эллиптическому уравнению $A(\theta_A)=0$ в R^N (оператор A определен в (3.45)). Отметим, что для доказательства устойчивости таких автомодельных решений применимы методы, использованные в § 3 (случай $\beta>1+2/N$). Укажем также на работу [77], в которой результаты [75] обобщаются на случай ква-

зилинейного уравнения (1.11) и, кроме того, при $1<\beta<\sigma+1+2/N$ изучена асимптотика решения задачи Коши $u(0, x)=\delta(x)$ при $t\to 0$. В работе [78] более подробно изложены результаты [14].

Авторы благодарны Л. А. Пелетье, приславшему препринты [76], [77].

Литература

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
2. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы вычислительной матем. и матем. физ. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
3. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
4. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы.— В кн.: Математика, кибернетика. М.: Знание, 1983.
5. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 12, с. 2123—2140.
6. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 291—322.
7. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником.— Матем. сб., 1984, т. 124(166), с. 163—188.
8. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 4, с. 614—632.
9. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.— Тр. МИАН, 1981, т. 158, с. 153—162.
10. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 435—455.
11. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III.— Матем. сб., 1983, т. 120(162), с. 3—21.
12. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV.— Матем. сб., 1983, т. 121(163), с. 131—155.
13. *Gidas B., Wei-Ming Ni, Nirenberg L.* Symmetry and related properties via the maximum principle.— Commun. in Math. Phys., 1979, v. 68, p. 209—243.
14. *Gmira A., Véron L.* Comportement asymptotique de la solution d'une équation non linéaire de la chaleur dans R^N.— Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, 1982, série I, v. 295, p. 727—730.
15. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.— ЖВМ и МФ, 1983, т. 23. № 2, с. 380—390.
16. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta$.— ДАН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362—1364.
17. *Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.* Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1107—1114.
18. *Haraux A., Weissler F. B.* Non-uniqueness for a semilinear initial value problem.— Indiana Univ. Math. J., 1982, v. 31, p. 167—189.
19. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
20. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.; Мир, 1977.
21. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
22. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— Успехи физ. наук, 1979, т. 128, № 4. с. 625—666.
23. Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983.
24. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.* Диссипативные структуры в триггерных средах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1875—1885.
25. *Еленин Г. Г.* Образование квазистационарных бегущих волн с периодической структурой из неустойчивых потоков баротропного газа, движущегося под действием нелинейных объемных сил. Препринт. № 126, М.: ИПМ, 1977.
26. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
27. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
28. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Пер. с англ./Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. М.: Мир, 1984.

29. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А.* Архитектура многомерных тепловых структур.— ДАН СССР, 1984, т. 274, № 5, с. 1071—1075.
30. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
31. *Berestycki H., Lions P.-L.* Nonlinear scalar field equations.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1983, v. 82, p. 313—375.
32. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 4, с. 1048—1054.
33. *Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла.— ЖВМ и МФ, 1973, т. 13, № 5, с. 1351—1356.
34. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВМ и МФ, 1974, т. 14, № 4, с. 891—905.
35. *Калашников А. С.* О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры.— ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 3, с. 689—696.
36. *Кершнер Р.* О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений: Дис. канд. физ.-матем. наук/МГУ, М., 1976.
37. *Калашников А. С.* О дифференциальных свойствах обобщенных решений уравнений типа нестационарной фильтрации.— Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1971, № 1, с. 62—68.
38. *Кершнер Р.* О поведении температурных фронтов в средах с нелинейной теплопроводностью при наличии поглощения.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1978, № 5, с. 44—51.
39. *Knerr B. F.* The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension.— Trans. of Amer. Math. Soc., 1979, v. 249, p. 409—424.
40. *Мартинсон Л. К.* Распространение тепловой волны в нелинейной среде с поглощением.— Прикл. механика и техн. физ., 1979, № 4, с. 36—39.
41. *Кершнер Р.* О поведении температурных фронтов в средах с нелинейной теплопроводностью при наличии поглощения. II.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1980, v. 35, p. 13—22.
42. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в процессах, описываемых квазилинейными вырождающимися параболическими уравнениями.— Тр. семин. им. И. Г. Петровского, 1975, вып. 1. М.: МГУ, с. 135—144.
43. *Кершнер Р.* О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1978, v. 32, p. 301—330.
44. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Нестационарные сдвиговые течения проводящей жидкости со степенным реологическим законом.— Магнитная гидродинамика, 1971, № 2, с. 50—58.
45. *Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Магнитогидродинамические сдвиговые течения жидкости по степенным реологическим законом в условиях поперечного сноса.— Магнитная гидродинамика, 1974, № 2, с. 58—62.
46. *Гранин И. С., Мартинсон Л. К.* О движении границы носителя обобщенного решения в задачах магнитной реологии.— Магнитная гидродинамика, 1978, № 1, с. 13—16.
47. *Гранин И. С., Мартинсон Л. К.* Движение фронта тепловой волны в нелинейной среде с поглощением.— Инж.-физ. журнал, 1980, т. 34, № 4, с. 728—731.
48. *Покровский Л. Д., Тараненко С. Н.* Об условиях пространственной локализации решений нелинейного уравнения теплопроводности.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 3, с. 747—751.
49. *Волосов К. А., Федотов И. А.* Асимптотические представления решения квазилинейного параболического уравнения в окрестности фронта.— ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 5, с. 1249—1253.
50. *Kersner R.* Filtration with absorption: necessary and sufficient condition for the propagation. of perturbations to have finite velocity. Препринт Иссл. Инст. Вычисл. Техн. и Авт. Венгерской АН, MN/8, 1982.
51. *Kersner R.* Nonlinear heat conduction with absorption: space localization and extinction in finite time.— SIAM J. Appl. Math., 1983, v. 43, p. 1274—1285.
52. *Sacks P. E.* The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations.— Comm. in Part. Differ. Equat., 1983, v. 8, p. 693—733.
53. *Bertch M.* A class of degenerate diffusion equations with a singular term.— Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl., 1983, v. 7, p. 117—127.
54. *Dibenedetto E.* Continuity of weak solutions to a general porous medium equation.— Indiana Univ. Math. J., 1983, v. 32, p. 83—118.
55. *Evans L. C., Knerr B. F.* Instantaneous shrinking of the support of nonegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities.— Illinois J. of Math., 1979, v. 23, p. 153—166.
56. *Alikakos N. D., Rostamian R.* Stabilization of solutions of the equation $\partial u/\partial t = \Delta\Phi(u) - \beta(u)$.— Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl., 1982, v. 6, p. 637—647.
57. *Bertch M., Nanby T., Peletier L. A.* Decay of solutions of a degenerate nonlinear diffusion equation.— Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl., 1982, v. 6, p. 539—554.
58. *Kersner R.* On the behavior when t growths to infinity of generalized solutions of

a degenerate quasilinear parabolic equation.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1979, v. 34, p. 157—163.
59. *Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A.* Sur le comportement de la frontière libre dans une équation en théorie de la filtration.— Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, 1982, série I, v. 295, p. 63—66.
60. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. I. М.: Наука, 1973.
61. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука. 1975.
62. *Бартман А. Б.* Распад плазмы при оптическом пробое газов.— В кн.: Тезисы докл. V Всесоюз. совещ. по неред. взаимод. оптич. излуч. с веществом. Л.: Изд-во ГОИ им. С. И. Вавилова, 1981, с. 264—265.
63. *Aronson D. G., Bénilan P.* Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans R^N.— Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, 1979, série A, v. 288, p. 103—105.
64. *Kamin S.* Similar solutions and the asymptotics of filtration equations.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1976, v. 60, p. 171—183.
65. *Friedman A., Kamin S.* The asymptotics behavior of gas in an n-dimensional porous medium.— Trans. of Amer. Math. Soc., 1980, v. 262, p. 551—563.
66. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
67. *Лихт М. К.* О распространении возмущений в задачах, связанных с вырождающимися квазилинейными уравнениями параболического типа.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 2, № 7, с. 953—957.
68. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1451—1461.
69. *Галактионов В. А.* Два метода сравнения решений параболических уравнений.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 832—835.
70. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач.— ДАН СССР, 1984, т. 278, № 6, с. 1296—1300.
71. *Галактионов В. А.* Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений.— ДАН СССР, 1982, т. 264, № 6, с. 1035—1040.
72. *Галактионов В. А.* Об условиях несуществования в целом и локализации решений задачи Коши для одного класса нелинейных параболических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 6, с. 1341—1354.
73. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.
74. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте. Препринт. № 103, М.: ИПМ АН СССР, 1977.
75. *Brezis H., Friedman A.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions.— J. Math. pures et appl., 1983, v. 62, p. 73—97.
76. *Kamin S., Peletier L. A.* Large time behavior of solutions of the heat equation with absorption. Preprint Math. Inst. Univ. Leiden. Nr. 25, 1983.
77. *Kamin S., Peletier L. A.* Source-type solutions of degenerate diffusion equations with absorption. Preprint Math. Inst. Univ. Leiden. Nr. 6, 1984.
78. *Gmira A., Veron L.* Large time behavior of the solution of a semilinear parabolic equation in R^N.— J. Diff. Equat., 1984, v. 53, p. 258—276.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1984