МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ — ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА — МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, 2
Труды, посвященные семидесятилетию академика Л. Илиева
София, 1984, с. 65—73

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГАЗОДИНАМИКИ

А. А. Самарский

Посвящается академику Л. Илиеву к его семидесятилетию

В большом числе реальных ситуаций изучаются явления [1—3], происходящие в конечной массе сплошной среды. Пусть процессы в среде описываются уравнениями газовой динамики с учетом теплопроводности и объемных источников или стоков тепла, т. е. в общем случае мы будем иметь дело с открытой в термодинамическом смысле системой. Среда может сжиматься или расширяться под действием поршня, причем на поршие, кроме гидродинамического условия, задается еще определенный тепловой режим. В работах, выполненных под руководством автора совместно с С. П. Курдюмовым, Н. В. Змитренко и А. П. Михайловым, изучались режимы разлета и сжатия такой среды как с помощью численных экспериментов, так и путем построения и исследования автомодельных решений. Численные эксперименты проводились как в рамках одномерных плоских, цилиндрических или сферических нестационарных задач, так и в случае двумерных нестационарных подходов [3—13].

Эти исследования связаны с большим кругом задач физики плазмы, задачами астрофизики, явлениями кавитации и многими другими областями науки и техники. Обзор методов решения и области приложения этих задач можно найти в [8, 14, 15]. В настоящей работе обсуждаются построенные в работах [3—7] примеры новых явлений в газодинамике, возникающих при определенном классе граничных режимов, заданных на поршне. Речь идет о действии на среду режимов с обострением, когда величины, задаваемые на поршне, за конечное время нарастают до бесконечных значений. Эти работы являются развитием работ [3, 16, 17], в которых исследовались процессы локализации тепловых процессов в нелинейной сплошной среде. В п. 1 обсуждается возможность с помощью регулирования режимов на поршие осуществить процесс сжатия конечной массы вещества так, чтобы профили всех величин по пространству при изменении во времени проходили те же состояния, что и в задаче разрежения, но в обратном порядке. То есть, если в задаче сжатия профили плотности, температуры по массе нарастают с обострением, то в задаче разрежения сохраняются те же самые профили величин по массе, но со временем они убывают в обычных режимах. Обсуждается, таким образом, вопрос о повороте процессов во времени в конечной массе диссипативной среды.

В п. 2 обсуждается возможность метастабильно локализовать действие поршня на среду на конечном участке среды. Например, сжать до очень больших плотностей конечный участок среды, не вызывая конечное время гидродинамических изменений на остальной массе среды. Рассматривается также более общий класс решений, иллюстрирующий принцип эффективной локализации гидродинамических процессов. Эти рассмотрения проводятся в рамках одномерных нестационарных задач газодинамики.

1. 1. Рассмотрим сплошную среду, движение которой описывается уравнениями газовой динамики или уравнениями газовой динамики с учетом теплопроводности и объемных источников и стоков тепла. В последнем случае в среде присутствуют диссипативные эффекты.

Рассмотрим одномерные движения конечной массы M_0 такой среды, совершаемые под действием сферического, цилиндрического или плоского поршня. Параметр M_0 выбран так, что полная масса $M=(2\pi N+(1-N)(1-N/2))M_0$, где $N=0$, 1, 2 для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Все величины, характеризующие среду, зависят только от времени t и одной пространственной координаты r. Координата поршня $r_*(t)$ есть заданная или определяемая функция времени.

2. Адиабатическое движение рассматриваемой конечной массы среды без диссипативных эффектов (в этом случае она представляет собой термодинамически замкнутую систему) может происходить как обратимым образом (изменение энтропии всей массы вещества $\Delta S_{tot}=0$), так и необратимо (при этом $\Delta S_{tot}>0$ и в среде наблюдаются необратимые процессы — ударные волны).

Система с диссипацией (рассматриваемая конечная масса среды с учетом теплопроводности и источников или стоков тепла) в общем случае уже является открытой. В такой системе может быть $\Delta S_{tot}<0$ даже при наличии диссипативных процессов за счет отвода тепла через поршень.

Из общих термодинамических соображений ясно, что для обратимого адиабатического движения замкнутой системы справедливо следующее утверждение. Движение, получающееся из некоторого реально осуществленного движения заменой времени t на $-t$ и одновременной заменой знака скорости, является физически реальным процессом. Такое „обращение времени" можно представлять следующим образом. Пусть в некоторый момент времени $t=t_1$ в процессе движения имеют место распределения плотности $\rho(r, t_1)$ и скорости $v(r, t_1)$. Распределение энтропии $S(r, t_1)=S(r)$ считаем известным. Тогда в силу адиабатичности движения давление $p(r, t_1)$ и температура $T(r, t_1)$ могут быть вычислены по значению плотности. Не ограничивая общности, в дальнейшем адиабатический случай можно считать изэнтропическим: $S(r, t)=\text{const}$. Полная энтропия $S_{tot}=M_{tot}S_0/M_0$, где $S_0=\int_0^{r_*}S(r, t)\,r^N dr$, аналогично тому, как $M_0=\int_0^{r_*}\rho(r, t)\,r^N dr$. От момента $t=t_1$ до момента $t=t_2>t_1$ $(t_1\leq t\leq t_2)$ поршень движется от $r_1=r_*(t_1)$ до $r_2=r_*(t_2)$, не нарушая адиабатичности ($dS/dt=0$ для всей массы газа). Такие движения существуют [1—3]. Пусть на момент t_2 плотность и скорость имеют распределения $\rho(r, t_2)$ и $v(r, t_2)$. Поменяем теперь скорости на противоположные и рассмотрим момент $t=t_2$ как начальный с данными $\rho(r, t_2)$ и $v(r, t_2)$. Поршень с момента t_2 начинает двигаться таким образом, что повторяет свою траекторию в течение времени $t_2\leq t\leq t_3$, $t_3-t_2=t_2-t_1$

в обратном порядке так, что $r_*(t_3)=r_*(t_1)$,

и, вообще,

$r_*(t_1+t')=r_*(t_3-t')$ для $0\leq t'\leq t_2-t_1$. При этом

(1) $$\rho(r, t_1+t')=\rho(r, t_3-t'),$$
$$v(r, t_1+t')=-v(r, t_3-t').$$

Кроме того, очевидно, что $T(r, t_1+t')=T(r, t_3-t')$ и $p(r, t_1+t')=p(r, t_1-t')$.

Оказывается, что для среды с диссипацией возможно построить два „взаимно симметричных" или „зеркальных" движения, т. е. таких, что движение при $t_2<t<t_3$ „повторяет" в обратном порядке движение для $t_1<t<t_2$. Профили плотности, давления, температуры, модуля скорости в „обратном" движении такие же, как и в „прямом", а знаки скоростей противоположны (для „взаимно симметричных" движений справедливо (1)). В определенном смысле пример таких движений демонстрирует „обращение времени" для системы с диссипативными эффектами. Построим его, используя аппарат автомодельных решений для конечной массы вещества.

3. Система уравнений газовой динамики с учетом эффектов теплопроводности и тепловыделения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(r^N v);\ \frac{\partial r}{\partial t}=v;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-r^N\frac{\partial p}{\partial x};$$

(2) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}(r^N W)+\frac{Q}{\rho};$$

$$W=-\varkappa\rho r^N\frac{\partial T}{\partial x};\ p=R\rho T;\ \varepsilon=\frac{R}{\gamma-1}T;$$

$$\varkappa=\varkappa_0 T^{m_1}\rho^{k_1};\ Q=Q_0 T^{m_2}\rho^{k_2}.$$

Здесь $x=\int_0^r \rho r^N dr$ — массовая лагранжева координата. Зависимости внутренней энергии ε и давления от температуры и плотности соответствует в (2) уравнениям состояния идеального газа. Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ и источник тепла Q взяты в виде степенных функций температуры и плотности. Зависимость потока тепла W от градиента темлературы следует закону Фурье.

Система (2) допускает решения в виде разделения переменных

(3) $$F_i(x, t)=B_i t^{n_i} f_i(s),\ s=x/M_0,$$

где F_i — искомые функции (скорость, давление, плотность и т. д., пронумерованные индексом i), B_i и n_i — постоянные, f_i — безразмерные представители размерных F_i. Степенная зависимость от времени t^{n_i} в (3) допускается степенной зависимостью коэффициентов диссипации от температуры и плотности в (2), причем задание величин m_α, k_α, $\alpha=1, 2$, фиксирует значения всех n_i в (3). Величины n_i из (3) в силу соображений размерности связаны между собой, так что достаточно определить лишь одну из них. В качестве таковой удобно выбрать показатель n в формуле $r(x, t)=Bt^n\lambda(s)$ для радиуса, так что закон движения поршня $r_*(t)$ выглядит следующим образом:

(4) $$r_*(t)=Bt^n\lambda_*,$$

$\lambda_*=\lambda(1)$ — безразмерная координата поршня. Таким образом, n связан с m_α, k_α в силу условий автомодельности, а по значению n могут быть вычислены все остальные n_i [3]. Граничные режимы (на поршне) соответствуют при этом формулам (3), в которых надо положить $s=1$. Граничные условия при $s=0$ естественно взять в виде условий симметрии. Начальные данные в автомодельной задаче сингулярны (что соответствует значению $t=0$ или $|t|=\infty$ в (3)). Устойчивая автомодельная задача „выходит" с течением времени иа решение (3) с достаточно произвольных начальных данных, заданных в коиечный, несингулярный момент времени [3].

Величины B_i могут быть выражены в силу размерностных соотношений через параметры M_0, R и B из (4). При этом можно фиксировать зиачение λ_*, например, $\lambda_*=1/n$. Тогда скорость поршня имеет вид $v_*(t)=Bt^{n-1}$, т. е. граиичное условие для безразмерной скорости $f_1(s)=\alpha(s)$ прн $s=1$ есть $\alpha(1)=1$.

Решения вида (3), как показано, например, в [3], относятся как к задачам разрежения (при этом $0<t<+\infty$, асимптотически $t\to+\infty$), так и к задачам сжатия (при этом $-\infty<t<0$, и асимптотически $t\to 0$). Такой подход полностью эквиваленте подходу, в котором для задач сжатия $-\infty<t<t_f$, асимптотически $t\to t_f$ и множитель t^{n_i} в (3) заменен на $(t_f-t)^{n_i}$. В любом случае для представителей размерных величин $F_i(x,t)$ получается одна и та же система обыкноненных дифференциальных уравнений:

$$n(1-n)\delta\lambda=d\beta/d\lambda\,;\ \alpha=n\lambda\,;\ s=\int\limits_0^\lambda \delta(\eta)\,\eta^N d\eta\,;$$

$$n_\gamma\beta=-\lambda^{-N}d(\lambda^N\omega)/d\lambda+q\,;$$

$$\omega=-\tilde{\varkappa}\,d\theta/d\lambda\,;$$

$$\beta=\delta\theta\,;\tilde{\varkappa}=\tilde{\varkappa}_0\theta^{m_1}\delta^{k_1}\,;\ q=q_0\theta^{m_2}\delta^{k_2}\,; \tag{5}$$

$$n_\gamma=\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{n}{n_*}-1\right);\ n_*=2/(2+\mu)\,;\ \mu=(\gamma-1)(N+1).$$

Здесь δ, β, ω, q, $\tilde{\varkappa}$, θ, q_0, $\tilde{\varkappa}_0$ — представители соответственно плотности, давления, потока тепла, источника тепла, коэффициента теплопроводности, температуры и постоянных Q_0 и $\varkappa_0$. В последних двух случаях в формулах (3) естественно $n_i=0$ (это и порождает условия автомодельности). Система (5) записана относительно безразмерного радиуса λ.

Разница в задачах сжатия и разрежения заключается в системе (5) лишь в знаках безразмерных диссипативных коэффициентов $\tilde{\varkappa}_0$ и q_0: они положительны для задач разрежения и отрицательны для сжатия: [3]. Вместе с тем как для сжатия, так и для разрежения $\alpha>0$, но размерная скорость $v=nr/t$ положительна для разрежения ($t>0$) и отрицательна для сжатия ($t<0$).

4. В классе решений (3) взаимно симметричным движениям соответствуют решения для сжатия ($t<0$) и разрежения ($t>0$) с одинаковыми пространственными распределениями величин $f_i(s)$ или $f_i(\lambda)$. Последние, в свою очередь, определяются системой (5). Определим взаимно симметричные движения как движения в средах с одними и теми же $\varkappa$ и Q, причем одно из этих движений (безразлично сжатие или разрежение) будем называть „прямым", а другое „обратным". Тогда задача заключается в нахождении одинаковых решений двух задач для системы (5) с одинаковыми граничными условиями при $\lambda=0$ и $\lambda=\lambda_*$ и одинаковыми величинами $|\tilde{\varkappa}_0|$ и $|q_0|$, но с противоположными знаками $\tilde{\varkappa}_0$ и q_0.

Пусть „прямое" движение имеет параметры $n^{(1)}=n$ и γ_1, так что

$$n_\gamma^{(1)}=\frac{2}{\gamma_1-1}\left(\frac{n^{(1)}}{n_*^{(1)}}-1\right),\ n_*^{(1)}=\frac{2}{2+(\gamma_1-1)(N+1)}.$$

Тогда анализ системы (5) показывает, что „обратное“ движение должно обладать параметрами

$$n^{(2)} = n, \quad n_\gamma^{(2)} = -n_\gamma^{(1)}. \tag{6}$$

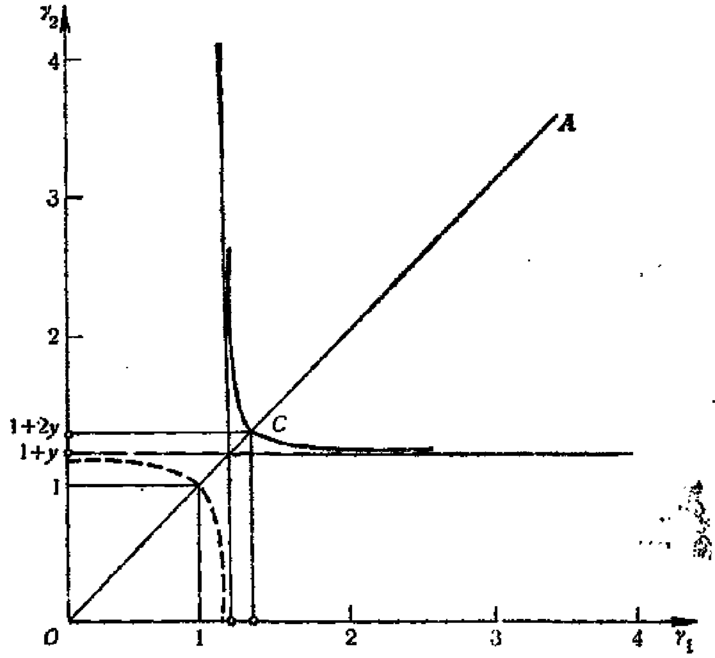

Рис. 1

γ_1	$4/3=1.(3)$	$5/3=1.(6)$	2	$n=2/3$
γ_2	$4/3=1.(3)$	$11/9=1.(2)$	$6/5=1.2$	$N=2$

Последнее приводит к связи между показателями адиабаты γ_2 и γ_1 в „обратном“ и „прямом“ движении:

$$\gamma_2 = 1 + \left[\frac{n(N+1)}{1-n} - \frac{1}{\gamma_1 - 1}\right]^{-1}. \tag{7}$$

На рис. 1 приведен график зависимости (7) γ_2 от γ_1 для фиксированных n и N. Через y обозначена величина $y=(1-n)/(N+1)\,n$. Конкретные величины n и N, для которых построен график, а также таблица значений γ_1 и γ_2 приведены на рисунке. Из (7) видно, что взаимно симметричные движения возможны лишь при $n \leq 1$, если считать, что $1<\gamma_{1,2}<\infty$. Из анализа (7) следует, что прямые $\gamma_1 = 1+y$ и $\gamma_2 = 1+y$ являются асимптотами: при $\gamma_1 \to 1+y$, $\gamma_2 \to \infty$, напротив, при $\gamma_1 \to \infty$ $\gamma_2 \to 1+y$. При $\gamma_1 = 1+2y$ будет $\gamma_2 = \gamma_1$. Вторая ветвь гиперболы (обозначенная на рисунке пунктиром) физически нереальна, так как на ней либо $\gamma_1 < 1$ (выше биссектрисы OA координатного угла), либо $\gamma_2 < 1$ (ниже OA). Случай равенства $\gamma_1 = \gamma_2$ (точка C на графике) соответствует движениям с сохранением энтропии. В самом деле, при $\gamma_1 = \gamma_2$ из (7) следует, что $n = n_*$, но, как указано, например, в [3],

$$\frac{dS_{\rm tot}}{dt} = \frac{2RM_{\rm tot}}{\gamma - 1}\,\frac{(n/n_*)-1}{t}, \tag{8}$$

где $S_{\rm tot}$ — полная энтропия массы газа. При $n=n_*$ имеем $dS_{\rm tot}/dt=0$. Этому случаю соответствуют движения газа без учета диссипативных процессов, при которых „прямое“ и „обратное“ движение физически осуществимы для одной и той же среды с одним и тем же показателем γ.

В общем случае диссипативной среды значения γ_1 и γ_2 различны. Из (7) при этом следует, что если $n_*^{(1)}>n$, то $n_*^{(2)}<n$, и наоборот. Это в соответствии с (8) обеспечивает одинаковое изменение со временем энтропии S_{tot} (убывание или возрастание) в „прямом" и „обратном" движениях. В самом деле, из условия (7) при учете $n_*<1$ получается формула для связи $n_*^{(2)}$ и $n_*^{(1)}$:

$$\frac{n-n_*^{(1)}}{n-n_*^{(2)}}=-\frac{1-n_*^{(1)}}{1-n_*^{(2)}}<0, \tag{9}$$

из которой следуют вышеприведенные утверждения. Они согласуются с физическим смыслом задачи, так как рост или убывание энтропии в среде с источником и теплопроводностью определяется профилем температуры (т. е. положительным или отрицательным потоком тепла через поршень), а последний одинаков для „прямого" и „обратного" движений.

5. В настоящей работе не затрагиваются результаты численных исследований системы (2). Такие исследования должны показать, устойчивы ли оба взаимно симметричных движений; либо одно из них обязательно неустойчиво, либо устойчивость последнего зависит от параметров задачи.

2. 1. Приведенные выше примеры „обращения времени" основаны на анализе задачи о сжатии конечной массы вещества поршнем. Интерес к этой проблеме связан также с возможностью получения сверхвысоких плотностей вещества без возникновения в нем ударных волн и других волн конечной амплитуды (оптимальное сжатие) [3]. „Градиентная катастрофа", приводящая к появлению разрыва в волне сжатия, не имеет места в том случае, когда газ сжимается в некотором режиме с обострением, т. е. давление на поршне стремится к бесконечности при $t\to t_f<\infty$ (S-режим):

$$p(0,t)=p_0(-t)^{-\frac{2\gamma(N+1)}{2+(N+1)(\gamma-1)}},\quad -\infty\leq t<0. \tag{10}$$

Закон (10) следует из автомодельного представления (3) и уравнений газовой динамики (система (2) из п. 1 при $W=0$, $Q=0$). Разделение переменных x и t автоматически обеспечивает отсутствие ударных волн при сжатии. Для удобства координата $x\geq 0$ отсчитывается от поршня.

Аналитическое решение, соответствующее закону (10), имеет вид

$$p(x,t)=p_0(-t)^{-2\gamma/(\gamma+1)}(1-x/M_\Phi)^{-2\gamma/(\gamma+1)} \tag{11}$$

$$v(x,t)=\frac{2\gamma}{\gamma+1}(p_0/M_\Phi)(-t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(1-x/M_\Phi)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}.$$

Для простоты взят случай $N=0$, $p=a_0\rho^\gamma$ (плоское изоэнтропическое сжатие). Величина

$$M_\Phi=(\gamma a_0^{-1/\gamma}p_0^{1+1/\gamma})^{1/2} \tag{12}$$

определяет массу сжимаемого вещества, зависящую от параметров задачи.

Решение (11) описывает изоэнтропическое сжатие конечной массы газа $0\leq x<M_\Phi$ до неограниченных плотностей и давлений.

Обратим внимание на еще одно необычное свойство решения (11), которое можно назвать остановившейся волной сжатия. Учитывая, что $p(M_\Phi, t)=v(M_\Phi,t)=0$, решение (11) для $x>M_\Phi$ можно доопределить следующим образом:

(13) $$p(x,t)-v(x,t)=0,\ \rho(x,t)=\rho_0,\ x>M_\Phi.$$

Как следует из (11), (12), газ, подвергающийся сжатию, граничит с холодным неподвижным веществом с плотностью $\rho_0>0$, занимающим полупространство $x>M_\Phi$.

За границу $x=M_\Phi$ движение не проникает, т. е. имеет место локализация газодинамических процессов на конечной массе газа, несмотря на неограниченный рост давления и скорости звука в зоне локализации $0\leq x<M_\Phi$. Фронт волны сжатия и полуширина (т. е. координата точки, в которой давление равно половине давления на поршне) не меняются с течением времени.

2. Можно ли найти более широкий класс режимов изоэнтропического сжатия газа поршнем и имеет ли место в таких режимах локализация газодинамических процессов?

Рассмотрим более общий закон изменения давления на поршне:

(14) $$p(0,t)=p_0(-t)^n,\ n<0,\ t_0\leq t<0$$

и построим соответствующие автомодельные решения [6, 7].

В начальный момент времени газ покоится:

(15) $$v(x,t_0)=0,\ x\geq 0.$$

Для постановки автомодельной задачи необходимо избавиться от параметра времени и плотности. Поэтому положим момент начала сжатия $t_0=-\infty$ и будем предполагать, что плотность (и давление) газа стремятся к нулю при $t\to t_0$:

(16) $$p(x,t)=a_0\rho^\gamma(x,t)\to 0,\ t\to-\infty.$$

Это соответствует тому, что в начальный момент радиус поршня равен минус бесконечности: $r(0,t)\to-\infty,\ t\to-\infty$.

Как следует из анализа размерностей, решение уравнений газовой динамики с условиями (14)—(16) представляется в виде

(17) $$\begin{gathered}p(x,t)=p_0(-t)^n\pi(\xi)\\ \rho(x,t)=\rho_0(-t)^k g(\xi),\ k=n/\gamma,\ \rho_0=(p_0/a_0)^{1/\gamma}\\ v(x,t)=v_0(-t)^l u(\xi),\ l=\frac{(\gamma-1)n}{2\gamma},\ v_0=(p_0^{\gamma-1}/a_0)^{1/2\gamma},\end{gathered}$$

где автомодельная координата ξ

(18) $$\xi=x/x_0(-t)^m,\ m=\frac{(\gamma+1)n+2\gamma}{2\gamma},\ x_0=(p_0^{\gamma+1}/a_0)^{1/2\gamma}.$$

Для автомодельных функций получаем задачу

(19) $$\begin{gathered}m\xi g'+g^2u'=kg\\ \gamma g^{\gamma-1}g'+m\xi u'=lu,\ \pi=g^\gamma,\ \pi(0)=1,\ \pi(\xi_\Phi)=u(r_\Phi)=0.\end{gathered}$$

Здесь $0<\xi_\Phi\leq\infty$ — координата фронта волны, т. е. точки, отделяющей область газа, пришедшую в движение от невозмущенного газа. Заменой переменных $\eta=\ln\xi$, $g(\xi)=\xi^{2/(\gamma+1)}G(\eta)$, $u=\xi^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}v(\eta)$, $\pi(\xi)=\xi^{2\gamma/(\gamma+1)}p(\eta)$ задача (11) сводится к анализу решений уравнения

$$\frac{dv}{dG}=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\gamma vG^{\gamma+1}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}mv-nG^\gamma\right)\Big/\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}G^{\gamma+2}-\frac{2m}{\gamma+1}G-lvG^2\right)$$

с соответствующими краевыми условиями.

3. Исследование показывает, что при $n < -2\gamma/(\gamma+1)$ решения поставленной задачи не существует (случай, соответствующий более „быстрому" нарастанию давления на поршне, чем в S-режиме $(n = -2\gamma/(\gamma+1))$. Этот результат имеет простой физический смысл. Из размерностной оценки глубины проникновения возмущений по характерной скорости звука следует, что волна сжатия должна иметь конечный по массовой координате фронт, увеличивающийся со временем. При этом на ее фронте должны удовлетворяться условия границы с вакуумом. Естественно, что существование такой газодинамической волны невозможно.

При $-2\gamma/(\gamma+1) < n < 0$, т. е. более „медленном" законе роста давления на поршне (LS-режим), решение задачи существует единственно и монотонно.

Решение в LS-режиме представляет собой волну сжатия с сокращающимися эффективными размерами. Например, полуширина волны уменьшается по закону (см. (18))

$$x_{\text{эф}}(t) \sim \xi_{\text{эф}}(-t)^m \to 0, \quad t \to 0 \tag{20}$$

$$\pi(\xi_{\text{эф}}) = \frac{1}{2}\pi(0),$$

приближаясь к поршню с течением времени.

Энергия, сообщаемая газу поршнем, сосредоточивается во все уменьшающейся области.

Фронт волны сжатия находится в бесконечно удаленной точке (что не противоречит конечной скорости распространения возмущений, так как от начала процесса $t_0 = -\infty$ к моменту $t > t_0$ проходит бесконечное время). Этот результат с необходимостью следует из (20) — иначе возмущенная область сокращалась бы с течением времени.

Асимптотика решения в окрестности фронта дается формулой

$$\pi(\xi) = \xi^{n/m}(c_1 + c_2\xi^{\ 1/m} + \ldots), \quad c_1 > 0, \ c_2 < 0 \tag{21}$$

$$u(\xi) = \xi^{l/m}(c_3 + c_4\xi^{-1/m} + \ldots), \quad c_3 > 0, \ c_4 < 0.$$

Несмотря на то что все величины на поршне неограниченно растут при $t \to -0$, в LS-режиме также имеет место локализация газодинамических процессов.

Действительно, для каждого фиксированного $0 < x^* < \infty$ величина $\xi^* = \xi^* = x^*/x_0(-t)^m \to \infty$ при $t \to 0$. Тогда, воспользовавшись (17) и (21), получаем

$$p(x,t) \to c_1 x^{n/m} + c_2 x^{n-1/m}(-t) + \ldots$$

$$v(x,t) \to c_3 x^{l/m} + c_4 x^{(l-1)/m}(-t) + \ldots \tag{22}$$

$$t \to 0, \quad x \in (0, \infty).$$

Таким образом, для каждой функции существует своя предельная кривая' любая величина при $x > 0$ ограничена сверху некоторой константой. При $t \to 0$ решение приближается к предельной кривой по закону (22). На рис. 2 схематично показано поведение давления в волне с течением времени. Крестиками отмечена полуширина, пунктиром — предельная кривая.

Локализация газодинамических процессов в автомодельном LS-режиме означает, что любое фиксированное физическое состояние не проникает далее некоторой конечной массы газа.

4. Автомодельным решением соответствует некоторая идеализированная ситуация. Как показывает вычислительный эксперимент, решения неавтомодельных задач (например, задач о сжатии однородного газа с момента $t_0 > -\infty$) „выходят" на построенные решения, если давление на поршне следует закону (14). При этом, естественно, не реализуется „бесконечный фронт" LS-режима. Глубина локализации LS-режима оценивается сверху через глубину локализации мажорующего S-режима

$$M_{\Phi LS} \leq M_{\Phi S} = (\gamma a_0^{-1/\gamma} p_0^{1+1/\gamma})^{1/2} (-t_0)^m,$$

причем в области локализации решение по-прежнему ограничено предельной кривой (22). Автомодельные закономерности в S и LS-режимах с хорошей степенью точности устанавливаются при росте давления на поршне в 10—15 раз по сравнению с начальным.

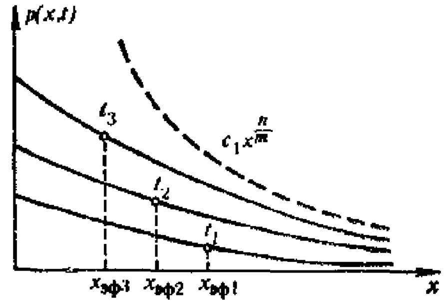

Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Kidder. Theory of homogenous isentropic compression and its applications to the laser fusion. *Nucl. Fusion*, 14, 1974, 53-60.
2. Я. М. Каждан. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня. *ПМТФ*, 1977, № 1, 23—30.
3. Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов. N- и S-режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. *ПМТФ*, 1977, № 1, 3—23.
4. N. V. Zmitrenko, S. P. Kurdyumov. Plasma finite mass compression and rarefaction regimes permitting a time-reverse in a dissipative medium. — In: 10th Europ. Conf. Contr. Fusion and Plasma Phys., 1, F-16. Moscow, 1981.
5. Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов. Режимы сжатия и разрежения конечной массы плазмы, допускающие обращение времени в диссипативной среде. Препринт ИПМ АН СССР, 1981, № 39.
6. М. А. Ануфриева, А. П. Михайлов. Локализация газодинамических процессов в изоэнтропических автомодельных режимах сжатия с обострением. Препринт ИПМ АН СССР, 1982, № 56.
7. А. П. Михайлов, В. В. Степанова. Локализация и структуры при автомодельном сжатии адиабатического газа в режиме с обострением. Препринт ИПМ АН СССР, 1982, № 118.
8. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, 1980.
9. В. М. Головизнин и др. Вариационные схемы магнитной гидродинамики в произвольной системе координат. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, 21, 1981, № 1, 54—68.
10. А. А. Самарский и др. Операторные разностные схемы. *Дифф. уравн.*, 1981, № 7, 1317—1327.
11. А. А. Самарский и др. Использование метода опорных операторов для аппроксимаций операций тензорного анализа. Препринт ИПМ АН СССР, 1981, № 97.
12. В. А. Гасилов и др. О численном моделировании Релей — Тейлорровской неустойчивости в несжимаемой жидкости. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 70.
13. Е. Г. Гамалий и др. Гидродинамическая устойчивость сжатия сферических лазерных мишеней. *Ж. эксп. теорет. физ.*, 79, 1980, 459—471.
14. А. А. Самарский. Теория разностных схем. Москва, 1978.
15. А. А. Самарский. О математическом моделировании и вычислительном эксперименте в физике. *Вестник АН СССР*, 1979, 38—49.
16. А. А. Самарский, И. М. Соболь. Примеры численного расчета температурных волн. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, 3, 1963, 703—719.
17. А. А. Самарский и др. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. *Доклады АН СССР*, 223, 1975, 1344—1347.

Институт прикладной математики АН СССР
Москва СССР

Поступила 30. 10. 1982 г.