



О р д е н а Л е н и н а  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша.  
А к а д е м и и Н а у к С С С Р

В.М. Головизнин, М.А. Рязанов, А.А. Самарский,  
О.С. Сороковикова

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ  
СО СБАЛАНСИРОВАННЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ  
КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ

Препринт № 56 за 1984 г.

Москва.

## А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрены алгоритмы численного решения задач газовой динамики в эйлеровых переменных с согласованными аппроксимациями конвективных потоков массы и импульса. Особенностью предлагаемых методов является то, что для них выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения, но также и дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии.

Свойства приведенных алгоритмов, включающих, в частности, полностью консервативные варианты методов коррекции потоков и схемы *FLIC* исследуются на серии одномерных тестовых расчетов.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрены алгоритмы численного решения задач газовой динамики в эйлеровых переменных с согласованными аппроксимациями конвективных потоков массы и импульса, основной особенностью которых является то, что для них выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения, но также и дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии.

Общие подходы к построению разностных схем газовой динамики, обладающих такими свойствами в эйлеровых и смешанных эйлеро-во-лагранжевых переменных, предложены в работах [1-6]. Там они были названы "полностью консервативными" [1], или схемами "сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков" [5,6]. Класс указанных схем достаточно широк и включает в себя как схемы с произвольным наперед заданным порядком аппроксимации на достаточно гладких решениях, так и схемы с аппроксимацией конвективных производных "вверх по потоку" [5,6].

Возможности достаточно полного теоретического анализа нелинейных разностных схем сильно ограничены, поэтому основой изучения свойств разностных схем газовой динамики является, в настоящее время эмпирическое или полуэмпирическое исследование их особенностей на решении тестовых задач.

Основной целью настоящей работы является сравнительное изучение свойств различных алгоритмов, включающих в себя, в частности, полностью консервативные варианты метода коррекции потоков [7] и схемы FLIC [8] на серии тестовых расчетов.

## § 1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим одномерные уравнения адиабатической газовой динамики, замыкаемые уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \rho x^{\ell-1}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u x^{\ell-1}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho x^{\ell-1} u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u x^{\ell-1}}{\partial x} = -x^{\ell-1} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho x^{\ell-1} \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon u x^{\ell-1}}{\partial x} = -p \frac{\partial u x^{\ell-1}}{\partial x}, \quad (3)$$

$$x \in [x', x''].$$

Здесь  $\rho$  - плотность,  $u$  - скорость,  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия,  $P$  - давление,  $X$  - декартова координата или радиус,  $\ell = 1, 2, 3$  соответственно в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии,  $\gamma$  - показатель адиабаты.

Введем произвольную неравномерную сетку по переменной  $X$ . Узлы сетки будем нумеровать целым индексом  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ; центры ячеек - полуцелым индексом  $i+1/2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ;  $h_i = X_{i+1} - X_i$ .

Ось времени также разобьем на интервалы  $\tau^j = t^{j+1} - t^j$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$ .

Пусть сеточные функции  $\rho_{i+1/2}^j$ ,  $\varepsilon_{i+1/2}^j$ ,  $P_{i+1/2}^j$  относятся к центрам ячеек,  $u_i^j$  - к узлам, а по времени все значения относятся к моментам  $t^j$ . Для учета граничных условий используются фиктивные ячейки с индексами  $1/2$  и  $N+1/2$ , так что узлы  $X_{1/2}^j$  и  $X_{N+1/2}^j$  совпадают с границами области  $X_1 = X_1'$  и  $X_N = X_N''$ . При граничных условиях первого рода задаются  $u_1^j$ ,  $\rho_{1/2}^j$ ,  $\varepsilon_{1/2}^j$ ,  $u_N^j$ ,  $\rho_{N+1/2}^j$ ,  $\varepsilon_{N+1/2}^j$ , а при условии сноса в фиктивные ячейки заносятся значения переменных из соседних расчетных. В случае условия непротекания:  $u_1^j \equiv 0$  (или  $u_N^j \equiv 0$ ).

Для сокращения записи будем использовать следующие обозначения:  $f = f(t^j)$ ,  $\overset{\sim}{f} = f(t^{j+1})$ ,  $\underset{\sim}{f} = f(t^{j-1})$ ,  $V_{i+1/2} = (X_{i+1} - X_i)/\ell$  - объем ячейки  $(i+1/2)$ ,  $m_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} V_{i+1/2}$  - заключенная в ней масса,  $M_i = (m_{i+1/2} + m_{i-1/2})/2$  - масса газа, отнесенная к узлу  $i$ ;  $E_{k,i}$  - кинетическая энергия массы газа  $M_i$ ;  $C_{i+1/2} = [\gamma(\gamma-1)\varepsilon]^{1/2}$  - скорость звука;  $F_i(\rho u)$  и  $F_i(\rho \varepsilon u)$  потоки массы и тепла через границу ячеек  $i-1/2$  и  $i+1/2$ ;  $\Phi_{i+1/2}(\rho u u)$  и  $\Phi_{i+1/2}(\rho u^2 u/2)$  - потоки импульса и кинетической энергии через сечение ячейки в ее центре  $i+1/2$ .

Разностную схему, аппроксимирующую (1)-(3), будем называть полностью консервативной (ПКС), если из ее уравнений, как алгебраические следствия, вытекают дискретные аналоги уравнений баланса кинетической, а также закона сохранения полной энергии  $E = \varepsilon + u^2/2$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho x^{\ell-1} u^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^2 u x^{\ell-1}}{\partial x} = -x^{\ell-1} u \frac{\partial P}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial \rho x^{\ell-1} E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u x^{\ell-1}}{\partial x} = - \frac{\partial \rho u x^{\ell-1}}{\partial x},$$

причем в разностных уравнениях не содержатся дисбалансные источники мощности.

В схемах данной работы разностное уравнение состояния имеет вид  $P_{i+1/2} = (\gamma - 1) \rho_{i+1/2} \varepsilon_{i+1/2}$  и в дальнейшем не выписывается.

## § 2. ОПИСАНИЕ МЕТОДОВ

п. I Полностью консервативная частично трехслойная схема (ПКС-I).

$$\frac{\hat{m}_{i+1/2} - m_{i+1/2}}{\tau^j} + F_{i+1}(\rho u) - F_i(\rho u) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_i(\hat{u}_i + u_i) - M_i(u_i + \hat{u}_i)}{2\tau^j} + F_{i+1/2}(\rho u u) - F_{i-1/2}(\rho u u) = \\ = -\chi_i^{\ell-1} (P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{(\hat{m} \hat{\varepsilon})_{i+1/2} - (m \varepsilon)_{i+1/2}}{\tau^j} + F_{i+1}(\rho \varepsilon u) - F_i(\rho \varepsilon u) = -P_{i+1/2}^* (u_{i+1} \chi_{i+1}^{\ell-1} - u_i \chi_i^{\ell-1}) \quad (6)$$

где

$$F_i(\rho u) = \rho_i u_i \chi_i^{\ell-1}, \quad (7)$$

$$\rho_i = \frac{\rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2}}{2} - \alpha_i \cdot \text{sign}(u_i) \frac{\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}}{2}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad (8)$$

$F_i(\rho \varepsilon u)$  и  $(\rho \varepsilon)_i$ ; определяются аналогично (7) и (8);

$$F_{i+1/2}(\rho u u) = \frac{1}{4} [F_{i+1}(\rho u) + F_i(\rho u)] (u_i + u_{i+1}), \quad (9)$$

$P_{i+1/2}^*$  - эффективное давление с учетом искусственной вязкости:

$$P_{i+1/2}^* = P_{i+1/2} - \theta \cdot \alpha \cdot c_{i+1/2} \rho_{i+1/2} h_i (\bar{u}_{i+1} \chi_{i+1}^{\ell-1} - \bar{u}_i \chi_i^{\ell-1}) / V_{i+1/2}, \quad (10)$$

$\theta = 1$  при  $\bar{u}_{i+1} \chi_{i+1}^{\ell-1} < \bar{u}_i \chi_i^{\ell-1}$  и  $\theta = 0$  в остальных случаях,  $\alpha$  - безразмерный подборочный коэффициент порядка единицы.

Из (4)-(5) следует уравнение баланса кинетической энергии

$$\hat{E}_{k,i} = \hat{M}_i \hat{u}_i u_i / 2 :$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E}_{k,i} - E_{k,i}}{\tau^j} + \Phi_{i+1/2} (\rho u^2 u / 2) - \Phi_{i-1/2} (\rho u^2 u / 2) = \\ = -u_i \chi_i^{\ell-1} (P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Phi_{i+1/2} (\rho u^2 u / 2) = \frac{1}{4} [F_{i+1}(\rho u) + F_i(\rho u)] u_i u_{i+1},$$

а из (6) и (11), в силу сопряженности разностных операторов в их правых частях и дивергентности конвективных членов в (11) - закон сохранения полной энергии  $E_{p,i} = E_{k,i} + \frac{1}{2} (m_{i+1/2} E_{i+1/2} + m_{i-1/2} E_{i-1/2})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E}_{p,i} - E_{p,i}}{\tau^j} + \Phi_{i+1/2} (\rho u^2 u / 2) + \frac{1}{2} [F_{i+1}(\rho \epsilon u) + F_i(\rho \epsilon u)] - \\ - \Phi_{i-1/2} (\rho u^2 u / 2) - \frac{1}{2} [F_i(\rho \epsilon u) + F_{i-1}(\rho \epsilon u)] = \\ = \frac{-1}{2} [P_{i+1/2}^* (u_{i+1} \chi_{i+1}^{\ell-1} + u_i \chi_i^{\ell-1}) - P_{i-1/2}^* (u_i \chi_i^{\ell-1} + u_{i-1} \chi_{i-1}^{\ell-1})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Дивергентность потоков в уравнении баланса кинетической энергии обеспечивается условием согласованности (9) потоков массы и импульса.

Как следует из (4)-(10), данная схема для (1)-(3) является частично трехслойной (по скорости) и имеет первый порядок аппроксимации по времени. При  $\alpha_i \equiv 1$  аппроксимация по пространству с первым порядком представляется направленными против потока

разностями [9] с определением плотности и внутренней энергии в узлах сетки по алгоритму:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_{i+1/2}, & \text{если } u_i \leq 0, \\ \varphi_{i-1/2}, & \text{если } u_i > 0 \end{cases}$$

( $\varphi = \rho$  либо  $\varphi = \rho \varepsilon$ ), а при  $\alpha_i \equiv 0$  - симметричными разностями второго порядка.

п.2 Трехслойная полностью консервативная схема второго порядка аппроксимации по времени (ПКС-II).

$$\frac{\hat{m}_{i+1/2} - \check{m}_{i+1/2}}{\tau^{j-1} + \tau^j} + F_{i+1}(\rho u) - F_i(\rho u) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{(\hat{M}_i + M_i)(\hat{u}_i + u_i) - (M_i + \check{M}_i)(u_i + \check{u}_i)}{2(\tau^{j-1} + \tau^j)} + F_{i+1/2}(\rho u u) - F_{i-1/2}(\rho u u) =$$

$$= -\chi_i^{\ell-1} (P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*), \quad (14)$$

$$\frac{(\hat{m} \hat{\varepsilon})_{i+1/2} - (\check{m} \check{\varepsilon})_{i+1/2}}{\tau^{j-1} + \tau^j} + F_{i+1}(\rho \varepsilon u) - F_i(\rho \varepsilon u) =$$

$$= -P_{i+1/2}^* (u_{i+1} \chi_{i+1}^{\ell-1} - u_i \chi_i^{\ell-1}) \quad (15)$$

Здесь  $F_i$ ,  $F_{i+1/2}$ ,  $P_{i+1/2}^*$  определяются выражениями (7)-(10), за исключением того, что

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{i+1/2} + \varphi_{i-1/2}}{2} - \alpha_i \cdot \text{sign}(u_i) \frac{\check{\varphi}_{i+1/2} - \check{\varphi}_{i-1/2}}{2} \quad (8')$$

( $\varphi = \rho$  либо  $\varphi = \rho \varepsilon$ ). Второй член в (8') при  $\alpha_i \neq 0$ .

как и в (8), вводит в схему разностную диффузию, обуславливая первый порядок аппроксимации по пространству. Из (I3)-(I5) следуют уравнение баланса кинетической и закон сохранения полной энергии, причем  $\hat{E}_{k,i} = (\hat{M}_i + M_i) \cdot (\hat{u}_i u_i) / 4$ .

II.3 Двухслойная консервативная схема с согласованными потоками массы и импульса (КС-I)

$$\frac{\hat{M}_{i+1/2} - M_{i+1/2}}{\tau^j} + F_{i+1/2}(\rho u) - F_i(\rho u) = 0, \quad (I6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_i \hat{u}_i - M_i u_i}{\tau^j} + F_{i+1/2}(\rho u u) - F_{i-1/2}(\rho u u) = \\ = -\chi^{l-1} (P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*), \end{aligned} \quad (I7)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{M} \hat{E})_{i+1/2} - (M E)_{i+1/2}}{\tau^j} + F_{i+1/2}(\rho e u) - F_i(\rho e u) = \\ = -P_{i+1/2}^* (u_{i+1} \chi_{i+1}^{l-1} - u_i \chi_i^{l-1}) + Q_{e,i+1/2}, \end{aligned} \quad (I8)$$

где  $F_i$ ,  $\rho_i$ ,  $F_{i+1/2}$ ,  $P_{i+1/2}^*$  определяются формулами (7)-(10), только в (10) скорости берутся на слое  $t^j$ ;

$Q_{e,i+1/2} = -\frac{1}{4} m_{i+1/2} [(\hat{u}_{i+1} - u_{i+1})^2 + (\hat{u}_i - u_i)^2] / \tau^j \leq 0$  - искусственный сток тепла порядка  $O(\tau)$ , обеспечивающий консервативность схемы компенсированием дисбаланса по мощности в уравнении кинетической энергии, следующем из (I6)-(I7):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_i \hat{u}_i^2 - M_i u_i^2}{\tau^j} + \Phi_{i+1/2}(\rho u^2 u/2) - \Phi_{i-1/2}(\rho u^2 u/2) = \\ = -u_i \chi_i^{l-1} (P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*) + Q_{k,i}, \end{aligned} \quad (I9)$$

где  $Q_{k,i} = \frac{1}{2} \hat{M}_i (\hat{u}_i - u_i)^2 / \tau^j \geq 0$ . Поскольку сумма  $Q_{k,i} + 0.5 (Q_{e,i+1/2} + Q_{e,i-1/2})$ , как легко проверить, является дивергентным выражением порядка  $O(\tau h^2)$ , закон сохранения полной энергии  $E_{\Pi,i} = 0.5 (M_i u_i^2 + m_{i-1/2} E_{i-1/2} + m_{i+1/2} E_{i+1/2})$  в схеме выполняется. Появление дисбаланса  $Q_{k,i}$  обусловлено несогласованностью временных разностей в (I6) и (I7).



## п.4 Двухэтапные методы.

В схемах пп. I-3 вклады конвективного переноса и сил давления рассчитываются одновременно. В ряде схем ([8], [10]) переход на следующий временной слой осуществляется в два этапа. На первом (лагранжевом) этапе учитывается только влияние давления и вычисляются промежуточные значения скорости и энергии (плотность не меняется). На втором этапе учитывается перенос с использованием этих значений. Полученные таким образом двухэтапные схемы обладают суммарной аппроксимацией [II] на уравнениях системы (1)-(3).

В соответствии с этим принципом строятся двухэтапные алгоритмы и на основе схем пп. I-3. Приведем двухэтапную ПКС, основанную на ПКС-I.

Первый (лагранжев) этап. Промежуточные значения скорости ( $\tilde{u}_i$ ) и внутренней энергии ( $\tilde{\epsilon}_{i+1/2}$ ) находятся из уравнений:

$$M_i \frac{\tilde{u}_i - u_i}{2\tau^j} = -\chi_i^{l-1} (P_{i+1/2}^* - P_{i-1/2}^*), \quad (20)$$

$$m_{i+1/2} \frac{\tilde{\epsilon}_{i+1/2} - \epsilon_{i+1/2}}{\tau^j} = -P_{i+1/2}^* (u_{i+1} \chi_{i+1}^{l-1} - u_i \chi_i^{l-1}). \quad (21)$$

Второй этап (переноса) Искомые значения  $\hat{u}_i$ ,  $\hat{\epsilon}_{i+1/2}$ ,  $\hat{p}_{i+1/2}$  находятся из уравнений:

$$\frac{\hat{m}_{i+1/2} - m_{i+1/2}}{\tau^j} + F_{i+1}(\rho \tilde{u}) - F_i(\rho \tilde{u}) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\hat{M}_i(\hat{u}_i + u_i) - M_i(u_i + \tilde{u}_i)}{2\tau^j} + F_{i+1/2}(\rho u \tilde{u}) - F_{i-1/2}(\rho u \tilde{u}) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{(\hat{m} \hat{\epsilon})_{i+1/2} - (m \tilde{\epsilon})_{i+1/2}}{\tau^j} + F_{i+1}(\rho \tilde{\epsilon} \tilde{u}) - F_i(\rho \tilde{\epsilon} \tilde{u}) = 0, \quad (24)$$

где  $F_i(\rho \tilde{u}) = \rho_i \tilde{u}_i \chi_i^{k-1}$  ( $\rho_i$  определяется формулой (8) с заменой  $u_i$  на  $\tilde{u}_i$ ,  $F_i(\rho \tilde{\epsilon} \tilde{u})$  - аналогично).

$$F_{i+1/2}(\rho u \tilde{u}) = \frac{1}{4} [F_{i+1}(\rho \tilde{u}) + F_i(\rho \tilde{u})] (u_i + u_{i+1}). \quad (9')$$

Очевидно, такой метод также будет полностью консервативным. Это следует, во-первых, из принципа суммарной аппроксимации уравнениями (20)-(24) системы (1)-(3), а, во-вторых, из условия согласованности (9') потоков  $F_i$  и  $F_{i+1/2}$ . Последнее оставляет свободу выбора способа аппроксимации потоков в уравнении неразрывности (и независимо - потоков внутренней энергии) всех описанных схем.

### § 3. КОРРЕКЦИЯ ПОТОКОВ

Практика расчета задач газовой динамики в эйлеровых переменных показывает, что схемы с аппроксимацией конвективных членов направленными против потока разностями хорошо отражают физическую картину течения и обладают хорошей устойчивостью. Основным недостатком указанных схем является нелинейная разностная диффузия, возрастающая с увеличением скорости переноса. Схемы с симметричными аппроксимациями конвективных членов практически лишены этого недостатка, однако приводят к образованию нефизических осцилляций в окрестностях разрывов. Объединение достоинств схем этих двух типов осуществляется в различных модификациях метода коррекции потоков [7], [12]. Так, в [12], идея коррекции потоков реализована на основе сравнения схем первого порядка точности со схемами более высокого порядка. Такой подход переносится и на случай описанных схем с согласованными аппроксимациями конвективных потоков.

Рассмотрим какую-либо из схем § 2 пп. 1-3 или из соответствующих двухэтапных схем, с потоками массы вида:

$$F_i^{(\mu)} = \mu_i F_i^{(0)} + (1 - \mu_i) F_i^{(1)}, \quad (25)$$

где  $F_i^{(0)}$  и  $F_i^{(1)}$  - выражения (7) при  $d_i = 0$  и  $d_i = 1$  соответственно ( $d_i$  - из формулы (8)),  $\mu_i$  - весовые множи-

тели, определяемые по следующему алгоритму.

Вначале полагаем  $\mu_i \equiv 0$  и из разностного уравнения непрерывности находится величина  $\bar{m}_{i+1/2}$  и плотность  $\bar{\rho}_{i+1/2} = \bar{m}_{i+1/2} / V_{i+1/2}$ . Затем для каждой ячейки вычисляются допустимые пределы изменения массы газа, которые при пересчете плотности с потоками (25) при  $\mu_i \neq 0$  не приведут к образованию новых локальных экстремумов по сравнению с уже имеющимися:

$$Q_{i+1/2}^+ = (\rho_{i+1/2}^{\text{MAX}} - \bar{\rho}_{i+1/2}) V_{i+1/2} / \tau^j, \quad (26)$$

$$Q_{i+1/2}^- = -(\rho_{i+1/2}^{\text{min}} - \bar{\rho}_{i+1/2}) V_{i+1/2} / \tau^j, \quad (27)$$

где  $\rho_{i+1/2}^{\text{MAX}} = \max_{k=i-1, i, i+1} (\bar{\rho}_{k+1/2}, \rho_{k+1/2})$ ,  $\rho_{i+1/2}^{\text{min}} = \min_{k=i-1, i, i+1} (\bar{\rho}_{k+1/2}, \rho_{k+1/2})$

(для схемы ПКС-II в (27)-(28) вместо  $\tau^j$  берется  $\tau^{j-1} + \tau^j$ ).

Затем полагается  $\mu_i \equiv 1$  и определяются суммы всех дополнительных по сравнению с  $\mu_i \equiv 0$  потоков, направленных внутрь и наружу ячейки  $(i+1/2)$  :

$$P_{i+1/2}^+ = \max(0, A_i) - \min(0, A_{i+1}),$$

$$P_{i+1/2}^- = \max(0, A_{i+1}) - \min(0, A_i),$$

$$A_i = F_i^{(0)}(\rho u) - F_i^{(1)}(\rho u).$$

По найденным величинам определяются вспомогательные значения  $\mu_{i+1/2}^\pm$  :

$$\mu_{i+1/2}^\pm = \begin{cases} \min(1, Q_{i+1/2}^\pm / P_{i+1/2}^\pm), & \text{если } P_{i+1/2}^\pm > 0, \\ 1, & \text{если } P_{i+1/2}^\pm = 0 \end{cases}$$

по которым и находятся весовые множители  $\mu_i$  :

$$\mu_i = \begin{cases} \min(\mu_{i+1/2}^+, \mu_{i-1/2}^-), & \text{если } A_i \geq 0, \\ \min(\mu_{i-1/2}^+, \mu_{i+1/2}^-), & \text{если } A_i < 0. \end{cases}$$

Условие огласования потоков массы и импульса (9), а также общее выражение для потоков кинетической энергии (см. (II)), как нетрудно убедиться, остаются в силе (с определением  $\bar{F}_i$  из (25)), следовательно, консервативные свойства полученных схем сохраняются.

Таким образом, в нашем случае, как и в работе [12], коррекция потоков импульса производится только на основе анализа рассчитываемого профиля плотности.

Поскольку аппроксимация конвективных потоков удельной внутренней энергии может проводиться независимо от остальных уравнений, описанный выше алгоритм применим и для отдельной коррекции

$\bar{F}_i(\rho \varepsilon u)$ .

Из (25) следует, что для  $\bar{F}_i(\mu)$  справедлива формула (7) при  $d_i = 1 - \mu_i$  (см. (8)) — иными словами, это те минимальные значения  $d_i$ , при которых схема остается монотонной. На практике, как оказалось в результате расчета ряда задач с контактными разрывами, имеет смысл задавать  $d_i \equiv d = \text{const} \sim 0.5$  как для  $\rho_i$ , так и для  $(\rho \varepsilon)_i$ , подбирая значение  $d$  экспериментально.

#### § 4. О РАСЧЕТАХ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Для расчета газодинамических течений в квазиодномерном приближении, например, в соплах переменной площади сечения  $S(x)$ , описанные схемы видоизменяются следующим образом: достаточно вместо  $x_i^{l-1}$  брать  $S(x_i)$ , а объем ячейки  $(i+1/2)$  вычислять по формуле:  $V_{i+1/2} = [S(x_{i+1}) + S(x_i)] h_i / 2$ .

#### § 5. ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ ДВУХЭТАПНАЯ СХЕМА С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ВСЕХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЦЕНТРАХ ЯЧЕЕК (ПКС-Ш)

Пусть скорость также относится к центрам ячеек. Рассмотрим для простоты плоский случай ( $l=1$ ) и равномерную по  $x$  сетку

Определим разностные операторы для произвольных функций  $\varphi_{i+1/2}$  и  $\psi_i$ , сопряженные в смысле скалярного произведения в пространстве сеточных функций [II]:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_i = \frac{\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}}{h}, \quad - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle_{i+1/2}^* = - \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{h}, \quad (28)$$

и

$$[\varphi]_i = \varphi_{i-1/2} + \theta(-\bar{u}_i)(\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) = \begin{cases} \varphi_{i+1/2}, & \text{если } \bar{u}_i \leq 0, \\ \varphi_{i-1/2}, & \text{если } \bar{u}_i > 0 \end{cases} \quad (29a)$$

$$[\psi]_{i+1/2}^* = \theta(-\bar{u}_i)\psi_i + [1 - \theta(-\bar{u}_{i+1})]\psi_{i+1} = \begin{cases} \psi_{i+1}, & \text{если } \bar{u}_i > 0, \bar{u}_{i+1} > 0, \\ \psi_i, & \text{если } \bar{u}_i \leq 0, \bar{u}_{i+1} \leq 0 \\ 0, & \text{если } \bar{u}_i > 0, \bar{u}_{i+1} \leq 0 \\ \psi_i + \psi_{i+1}, & \bar{u}_i \leq 0, \bar{u}_{i+1} > 0, \end{cases} \quad (29b)$$

где  $\theta(z)$  - функция Хевисайда:  $\theta(z) = 1, z \geq 0$  и  $\theta(z) = 0, z < 0$ ;  $\bar{u}_i = (u_{i+1/2} + u_{i-1/2})/2$ .

Выражения (29a) и (29b) являются операторами сноса по потоку и против потока соответственно.

Аппроксимируем конвективные члены в (1) и (2) следующим образом:

$$\left\langle \frac{\partial [\rho u]}{\partial x} \right\rangle_{i+1/2}^* = \frac{F_{i+1} [\rho u] - F_i [\rho u]}{h} \quad (30a)$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial [\rho u u]}{\partial x} \right\rangle_{i+1/2}^* + \frac{1}{2} u_{i+1/2} \left\langle \frac{\partial [\rho u]}{\partial x} \right\rangle_{i+1/2}^* + \frac{1}{2} \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2}^* \quad (30b)$$

$$\frac{1}{2} (F_{i+1} [\rho u u] - F_i [\rho u u]) + \frac{1}{2} u_{i+1/2} (F_{i+1} [\rho u] - F_i [\rho u]) + \frac{1}{2} \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \left[ \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{h} \right]_{i+1/2}^* h$$

Как следует из (28)-(29), эти выражения дивергентны. Домножив (30а) на  $-u_{i+1/2}/2$ , а (30б) - на  $u_{i+1/2}$  и сложив, получим дивергентную форму конвективных потоков кинетической энергии:

$$\frac{1}{2} u_{i+1/2} \left\langle \frac{\partial [\rho u u^*]}{\partial x} \right\rangle_{i+1/2} + \frac{1}{2} \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \left[ \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_i \right]_{i+1/2}^* . \quad (30в)$$

Основываясь на полученных соотношениях, построим двухэтапную ПКС (подробности приведения подобных членов в (30) и учета вариантов в (29) опускаем) первого порядка точности.

### Лагранжев этап

$$\rho_{i+1/2} \frac{\tilde{u}_{i+1/2} - u_{i+1/2}}{2\tau^j} = - \frac{\rho_{i+3/2} - \rho_{i-1/2}}{2h} + \frac{q_{i+1} - q_i}{h} , \quad (31)$$

$$\rho_{i+1/2} \frac{\tilde{\epsilon}_{i+1/2} - \epsilon_{i+1/2}}{\tau^j} = - \rho_{i+1/2} \frac{u_{i+3/2} - u_{i-1/2}}{2h} + \frac{1}{2} q_{i+1} \frac{u_{i+3/2} - u_{i+1/2}}{h} \quad (32)$$

$$+ q_i \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{h} ; \quad q_i = \alpha \cdot \theta (u_{i-1/2} - u_{i+1/2}) \bar{c}_i \bar{\rho}_i (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) .$$

### Этап переноса

$$\frac{\hat{\rho}_{i+1/2} - \rho_{i+1/2}}{\tau^j} + \frac{1}{h} [F_{i+1}(\rho \tilde{u}) - F_i(\rho \tilde{u})] = 0 , \quad (33)$$

$$\frac{\hat{\rho}_{i+1/2} (\hat{u}_{i+1/2} + u_{i+1/2}) - \rho_{i+1/2} (u_{i+1/2} + \tilde{u}_{i+1/2})}{2\tau^j} + \frac{1}{h} [F_{i+1}(\rho u \tilde{u}) - F_i(\rho u \tilde{u})] = 0 , \quad (34)$$

$$\frac{(\hat{\rho} \hat{\epsilon})_{i+1/2} - (\rho \tilde{\epsilon})_{i+1/2}}{\tau^j} + \frac{1}{h} [F_{i+1}(\rho \tilde{\epsilon} \tilde{u}) - F_i(\rho \tilde{\epsilon} \tilde{u})] = 0 . \quad (35)$$

где  $F_i(\varphi \tilde{u}) = [\varphi \tilde{u}]_i$ ,  $F_i(\rho \tilde{u}) = F_i(\rho \tilde{u}) \tilde{u}_i$ ,  $\varphi = \rho$  или  $\varphi = \rho \varepsilon$ , а в формулах (29) вместо  $\tilde{u}_i$  стоит  $\tilde{u}_i = 0.5(\tilde{u}_{i+1/2} + \tilde{u}_{i-1/2})$ . Таким образом, потоки массы и импульса связаны тем же условием согласования типа (9), причем  $F_i$  можно определять и иным образом, например:  $F_i(\varphi \tilde{u}) = [\varphi]_i \tilde{u}_i$  (либо по-разному для  $F_i(\rho \tilde{u})$  и  $F_i(\rho \varepsilon \tilde{u})$ ) и т.д. В частности, в качестве оператора 29а допустимо и соотношение (8) с параметрами  $\alpha_i \neq 0; 1$ , значения которых задаются отмеченными в § 3 способами.

Схема (31-35) по виду уравнений, дискретизации и алгоритмической простоте близка к методам FLIC [8], "крупных частиц" [10] и может рассматриваться как их полностью консервативный вариант.

## § 6. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Качество схем, полученных в настоящей работе, проверялось на ряде тестовых расчетов. Рассмотрим некоторые из них.

### п. I Постановка тестовых задач.

**Задача I.** Распад разрыва малой интенсивности. В момент  $t = 0$  в покоящейся среде с постоянной плотностью  $\rho = 1$  и показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$  в точке  $x_0$  задан разрыв поля давления  $p$ :  $p(x < x_0) = 2$ ,  $p(x \geq x_0) = 1$ . Состояние среды при  $t > 0$  описывается стационарными профилями всех газодинамических величин как функций автомодельной переменной  $\xi = (x - x_0)/t$ .

Автомодельные профили характеризуются несколькими основными параметрами: скоростью фронта ударной волны (у.в)  $\xi_{yB}$ , распространяющейся вправо от  $x_0$ , скоростью контактного разрыва (к.р.)  $\xi_{кр}$ , и скоростями левой  $\xi_\lambda$  и правой  $\xi_\pi$  границ веера волн разрежения (в.р.). В рассматриваемом случае  $\xi_{yB} = 1.41$ ,  $\xi_{кр} = 0.35$ ,  $\xi_\pi = -1.26$ ,  $\xi_\lambda = -1.67$ . Автомодельное поле плотности описывается величинами  $\rho_\pi$  ( $\xi > \xi_{yB}$ ),  $\rho_{yB}$  ( $\xi_{кр} < \xi \leq \xi_{yB}$ ),  $\rho_{\pi\tau}$  ( $\xi_\pi < \xi \leq \xi_{кр}$ ),  $\rho_\lambda$  ( $\xi \leq \xi_\lambda$ ),  $\rho_\pi = \rho_\lambda = 1$ . Величина давления за фронтом у.в.:  $P_{yB} = 1.49$ .

**Задача 2.** Распад разрыва большой интенсивности:  $P_\lambda = 480$ ,  $\rho_\lambda = 8$ ,  $\rho_\pi = 1$ ,  $\rho_{\pi\tau} = 1$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $u \equiv 0$ ,  $t = 0$ . Значения параметров автомодельного профиля:  $\xi_{yB} = 11.24$ ,  $\xi_{кр} = 8.32$ ,  $\xi_\pi = 1.1$ ,  $\xi_\lambda = -10$ ,  $\rho_{yB} = 3.85$ ,  $\rho_{\pi\tau} = 3.01$ .

**Задача 3.** Распространение ударной волны по холодному фону с экспоненциально нарастающей плотностью [13]. Начальные условия при  $t = t_0$ :

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0, & x \geq x_0 \\ \Delta(1-\xi)/t_0, & x < x_0 \end{cases}$$

$$\xi(x, t_0) = \begin{cases} 0, & x \geq x_0 \\ (\Delta/t_0)^2 (1+2\xi_0)/2, & x < x_0 \end{cases}$$

$$\rho(x, t_0) = \begin{cases} \rho_0 \exp[(x-x_0)/\Delta], & x \geq x_0, \\ 3\rho_0 (1+2\xi_0)^{-5/2}, & x < x_0, \end{cases}$$

где  $\xi_0 = (x_0 - x)/\Delta$ ,  $x_0$  - положение разрыва в момент  $t_0$ ;  $\rho_0$  - невозмущенная фоновая плотность при  $x = x_0$ ,  $\Delta$  - характерный масштаб.

Автомодельное решение при  $t > t_0$ :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq x_F(t) \\ \Delta(1-\xi)/t, & x < x_F(t) \end{cases}$$

$$\xi(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq x_F(t) \\ (\Delta/t)^2 (1+2\xi)/2, & x < x_F(t) \end{cases}$$

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0 \exp[(x-x_0)/\Delta], & x \geq x_F(t) \\ 3\rho(x_F) [(1+2\xi)]^{-5/2}, & x < x_F(t) \end{cases}$$

где  $x_F(t) = x_0 + 1.5 \ln(t/t_0)$ , - положение фронта у.в. на момент  $t$ ,  $\xi = (x_F(t) - x)/\Delta$ . Чис-



ловные значения констант:  $t_0 = 2$ ,  $X_0 = 6$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\Delta = 4$ ,  $\gamma = 2$ .

**Задача 4.** Сильный точечный взрыв (плоский, цилиндрический и сферический,  $X \geq 0$ ). В момент  $t = 0$  в холодном воздухе ( $\gamma = 1.4$ ) с постоянной плотностью  $\rho_0$  выделяется энергия  $E = E_0$  в области  $X \leq X_0$ . Числовые значения констант:  $\rho_0 = 1$ ,  $E_0 = 100$ ,  $X_0 = h_1 = 1$  - размер первой расчетной ячейки. Задача имеет автомодельное решение [14] в переменных:

$R(\lambda) = \rho/\rho_F$ ,  $U(\lambda) = u/u_F$ ,  $P(\lambda) = P/P_F$ ,  $\lambda = X/X_F$ ,  $t > 0$  где  $\rho_F$ ,  $u_F$ ,  $P_F$  - значения газодинамических функций на фронте у.в. с координатой  $X_F$ .

## п.2. Описание расчетов

**Задача I.** Графики разностью решения (плотности), полученного для задач I и 2 по схемам С.К.Годунова, Мак-Кормака, Бориоа-Бука (SHASTA) приведены в [15]. Наибольшие отклонения профилей разностного решения от точного, по этим графикам, находятся в областях в.р. и к.р.

На рис.1а - I в приведены расчетные профили плотности на момент  $t = 2.5$  соответственно по схемам: ПКС-I, КС-I, ПКС-III - кружками ( $d_i \equiv 1$ ); ПКС-I (с коррекцией потоков), КС-I (с коррекцией потоков), FLIC - крестиками, а на рис.1г - 1е - профили давления для этих схем. Сплошная линия - точное решение. Значения  $\rho_{i+1/2}$  и  $P_{i+1/2}$ , отличающиеся от точных не более, чем на 1%, в основном не нанесены.

Оси координат построены только для рис.1а,1г,2в,2е.

Общие расчетные параметры:  $h_i = h = 1$ ,  $N_{ячеек} = 100$ ,  $\tau = \tau^j = 0.1 \div 0.25$ ,  $X_0 = 50$ . Для схем без коррекции потоков  $\alpha = 0.25 \div 0.3$ . У.в. и к.р. передаются полностью консервативными схемами и КС-I практически одинаково, с размазыванием у.в. на 2-3 ячейки, к.р. - на 8 ячеек (считая точки с отклонениями более 5%). Преимуществом ПКС-I, как видно из рисунков, является практически точный расчет в.р.

Коэффициенты вязкости метода FLIC выбирались из условий наименьшего размазывания у.в. и одновременно отсутствия "всплесков" за фронтом у.в.. FLIC размазывает у.в. на 3-4 ячейки и уступает ЦКС на в.р. (рис.1в, 1е). К.р. передается методом FLIC одинаково схемами данной работы.

При расчетах с коррекцией потоков в окрестности к.р. на начальных временных шагах, по профилю  $\rho$  и  $E$  возникают

локальные участки немонотонности 3% типа энтропийного следа (вследствие уменьшения численной диффузии), которых удается избежать задержкой включения алгоритма коррекции потоков до некоторого момента  $t^* \approx 3 \div 5$ . К.Р. размазывается на 4 ячейки, у.в. — по-прежнему на 2–3 ячейки.

Расчетные профили по ПКС-II, не показанные на рисунках, отличаются от ПКС-I несколько более сильным размазыванием вблизи границ в.р.  $\xi_\lambda$  и  $\xi_\Pi$ , однако заметно меньшим, чем у КС-I и FLIC. То же имеет место и для двухэтапных ПКС.

Как было выяснено в расчетах с  $\tau = 0.1 \div 0.5$ , практическое ограничение на  $\tau$  для двухэтапных схем слабее, чем для одноэтапных, что согласуется с аналогичными выводами работы [16].

Задача 2. Здесь  $\tau = 0.02$ ;  $\alpha \approx 0.5$  для схем без коррекцией потоков, с последней —  $\alpha \approx 0.7 \div 0.9$ ; коэффициенты вязкости FLIC варьировались из ранее упомянутых соображений. Профили плотности и давления на  $t = 4$  для тех же схем, и в тех же обозначениях и порядке, что и в предыдущем тесте, изображены на рис.2а–2е. Кроме того, пунктирной линией в области к.р. на рис.2а показан расчет по ПКС-I с  $\alpha_i \equiv 0.5$ ,  $\alpha = 0.7$ , в остальных участках результат совпадает с расчетом при  $\alpha_i \equiv 1$ .

Все схемы ПКС и КС-I сильно размазывают к.р., почти одинаково с методом FLIC. Однако в областях в.р. и у.в. имеются заметные преимущества.

При расчетах с коррекцией потоков к.р. размазывается на 4–5 ячеек, перед к.р. наблюдается энтропийный след того же характера, что и в задаче I, немонотонности устраняются задержкой коррекции до  $t^* \approx 0.3$ .

Задача 3. На этом тесте в работах [17], [18] анализируются качества ряда разностных схем: Лакса-Вендроффа, FCT и т.д. Так, в [17] иллюстрируется влияние роста дисбалансных источников с увеличением пространственного шага  $h$  на отставание размытого максимума численного решения от фронта у.в. аналитического решения: при  $\Delta/h = 10$  полученные по тем же схемам результаты оказываются в этом смысле существенно хуже по сравнению со случаем  $\Delta/h = 40$ .

На рис.3а,3б приведены профили плотности и давления на  $t = 4$  и  $t = 8$ , рассчитанные по ПКС-I (число Куранта  $\nu \approx 0.7$ ,  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.1$ ,  $N_{\text{ячеек}} = 150$ ,  $\alpha = 0.3$ , результаты по остальным схемам пп. I–3 § 2 отличаются от этих не более, чем на I+I,5%). Кружками отмечен результат расчета без

коррекции потоков ( $\alpha_i \equiv 1$ ), расчет с коррекцией потоков отличается от него только в окрестности "пика" плотности (звездочки на рис.3а), уменьшая различие в максимуме между точным и разностным решением до 7%, что определяется, в основном, точностью проектирования аналитического решения на сетку. В остальной части графика расхождение составляет 1-2%. У.в. размазывается на 2 ячейки. Профиль давления передается с меньшей точностью.

*FLIC* размазывает у.в. на 3 ячейки, по остальному профилю точность 2-4%, в окрестности максимума -  $\approx 18\%$  (крестики на рис.3а,б).

На рис.3в,3г кружками приведены результаты расчета по ПКС-I на грубой сетке при  $h=0.4$ , ( $\Delta/h=10$ ,  $\tau=0.04$ ,  $N_{\text{яч}}=37$ ) крестиками - по *FLIC* при тех же параметрах сетки. Остальные схемы из § 3 дают для этой задачи практически ту же точность, что и ПКС-I.

Задача 4. Постановка задачи, методы исследования и таблицы автомодельного решения  $U(\lambda_i)$ ,  $R(\lambda_i)$ ,  $P(\lambda_i)$  содержатся, например, в [19].

При заданном числе Куранта  $\nu$  для нахождения  $\tau'$ , разностное решение  $\lambda_i, U_i, R_i, P_i$ , полученное на  $n$ -м временном шаге, не зависит ни от  $h$ , ни от величин  $\epsilon_0$  и  $\rho_0$  начальных условий.

На рис.4 пунктиром проведены расчетные автомодельные профили газодинамических функций цилиндрического взрыва, полученные на 800-м шаге по ПКС-I ( $l=2$ ,  $h_i=1$ ,  $\nu=0.5$ ,  $\alpha=0.5$ ), когда у.в. прошла 90 ячеек. При  $n \geq 2000$  (у.в. проходит более 150 ячеек) разностное решение полностью выходит на автомодельность и отличается от табличного менее, чем на 0,5% (сплошная линия на рис.4).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разностные схемы газовой динамики, существенно различающиеся в многомерном случае, могут совпадать в одномерном приближении, поэтому начальную стадию отбора наиболее конкурентноспособной методики естественно проводить среди одномерных схем. При последующем переходе к многомерным алгоритмам обычно возникают проблемы, связанные с ограниченностью оперативной памяти ЭВМ. По этой причине при оценке методики необходимо учитывать требующиеся вычислительные ресурсы.

В настоящей работе рассмотрены трехслойные (ПКС-II), частично трехслойные (ПКС-I) и двухслойные (КС) разностные схемы, использующие различное количество массивов. При этом по качеству расчетов первые две из этих схем практически эквивалентны, поэтому частично-трехслойная схема может быть признана более эффективной. Схеме ПКС-I соответствует одномерный вариант методики [20].

Практическим условием устойчивости для схем ПКС-Б, ПКС-II, КС и построенных на их основе алгоритмов коррекции потоков является условие Куранта. Двухэтапные методы допускают использование несколько большего временного шага. Кроме того, к преимуществам двухэтапных методов следует отнести и то, что они алгоритмически проще обобщаются на случай подвижных расчетных сеток [6].

Все рассмотренные в работе одномерные консервативные и полностью консервативные схемы газовой динамики в эйлеровых переменных:

- при расчете газодинамических течений не приводят к возникновению заметных нефизических осцилляций вычисляемых величин;

- в окрестности ударных волн и контактных разрывов не уступают по качеству известным схемам с коррекцией потоков [7], [15] и с большой точностью передают веер волн разрежения;

- существенно лучше других схем (см. например, [17], [18]) воспроизводят решение автомодельной задачи о распространении ударной волны по холодному фону с экспоненциально нарастающей плотностью [13], что говорит о важности овладения сбалансированности конвективных потоков для аккуратного решения задач с подобными особенностями;

- являются одними из наиболее экономичных по затратам машинного времени на один временной шаг и не требуют предварительной процедуры "настройки параметров", характерной для ряда других схем.

Авторы благодарят Б.П.Герасимова, С.А.Семущина и А.Б.Карагичева за полезные обсуждения, а также ряд ценных советов и замечаний при проведении расчетов:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Попов Ю.П., Самарский А.А. ЖВМ и МФ, 1970, т.10, № 3, с.773-779
2. Кузьмин А.В., Макаров В.Л., Меладзе Г.В. ЖВМ и МФ, 1980, т.20, № 1, с.171-181.
3. Самарский А.А. и др. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 63, 1981.
4. Кузьмин А.В., Макаров В.Л. ЖВМ и МФ, 1982, т.22, № 1, с.123-133.
5. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 19, 1982.
6. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Препринт ИАЭ им.И.В.Курчатова, ИАЭ-3747/16, 1983.
7. Boris J.P., Book D.L. - *J. of Comput. Phys.*, 1975, v.11, p.38-69. 1973?
8. Gentry R.A., Martin R.E., Daly B.J. - *J. of Comput. Phys.*, 1966, v.1, p.87-118.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М., Мир. 1980.
10. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. ЖВМ и МФ, т.11, 1971, № 1, с.182-207.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.-Наука, 1977, 656 с.
12. Zalesak S.T. - *J. of Comput. Phys.*, 1979, v.31, p.335-362.
13. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.Наука, 1966.
14. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1977, 438 с.
15. Жмакин А.И., Фурсенко А.А. - ЖВМ и МФ, т.20, № 4, 1980, с.1021-1031.
16. Герасимов Б.П., Семушин С.А., - Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1983, № 38, 26 с.
17. Colomant D.G., Gardner J.H., - *J. of Comput. Phys.*, 1976, v.22, p.389-395.
18. Craxton R.S., McStour R.L. - *J. of Comput. Phys.*, 1979, v.33, p.432-440.
19. Чудов Л.А., Росляков Г.С., Кестенбойм Х.С. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. М. Наука, 1974.
20. Головизнин В.М., Крашккин И.Е., Рязанов М.А., Самарский А.А. М., препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 105, 1983, 33 с.

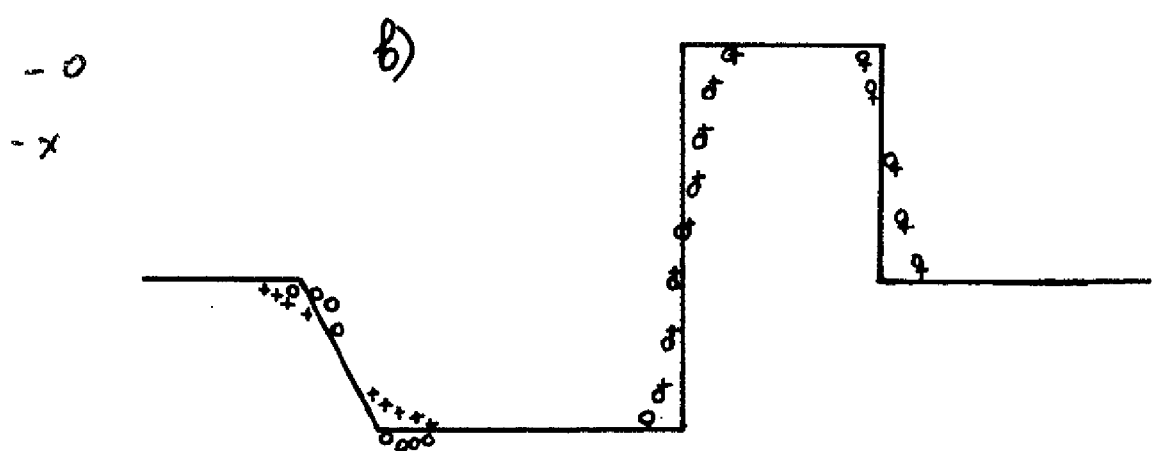
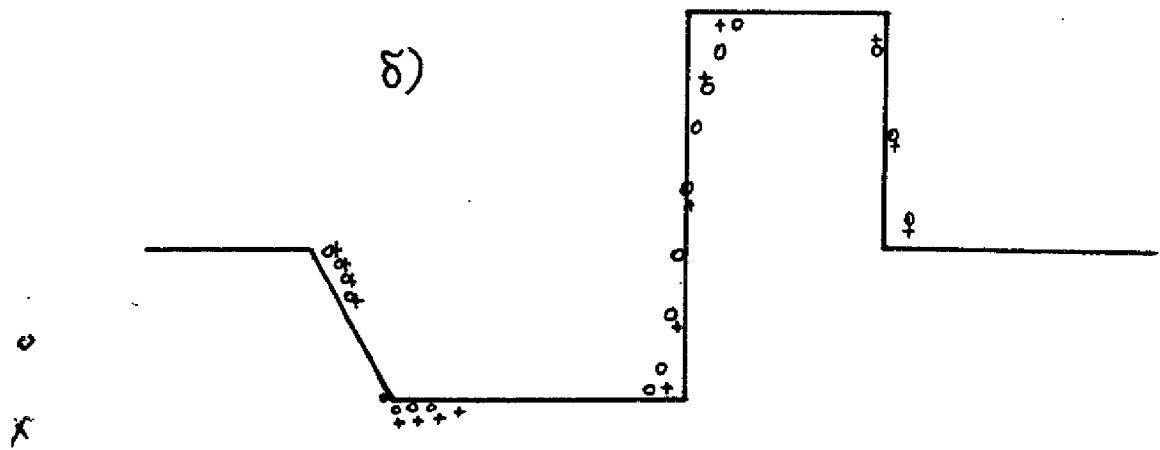
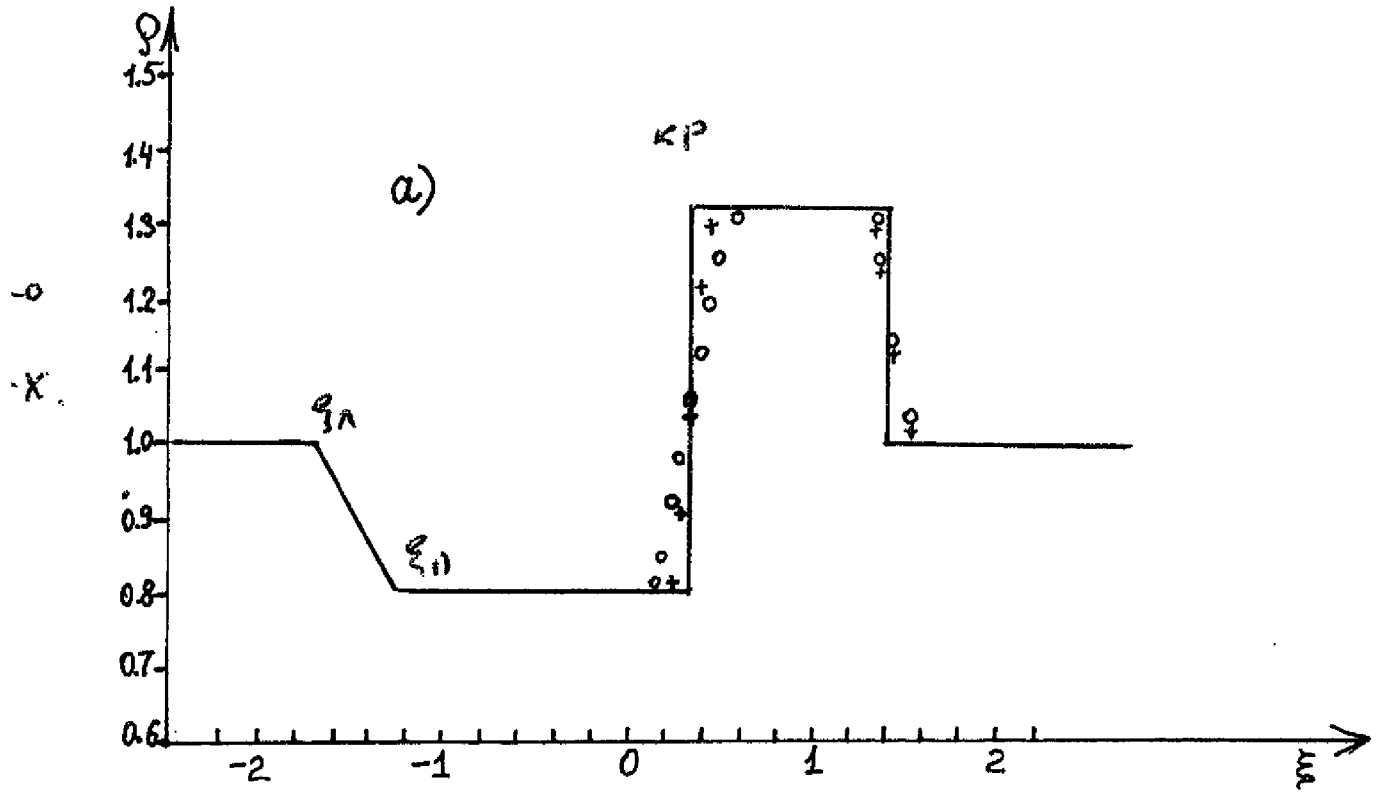


Рис. 1

$$P(x < x_0) = 2$$

$$P(x \geq x_0) = 1$$

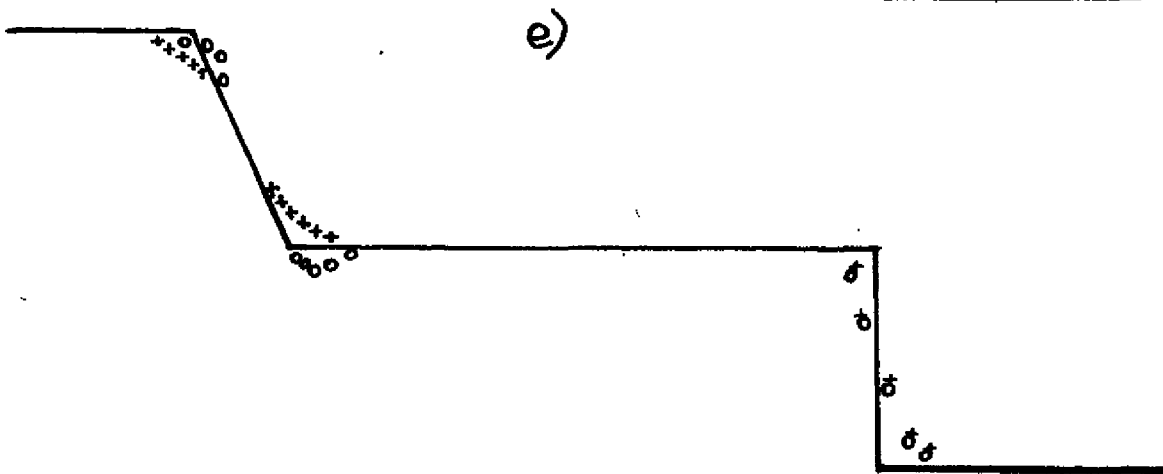
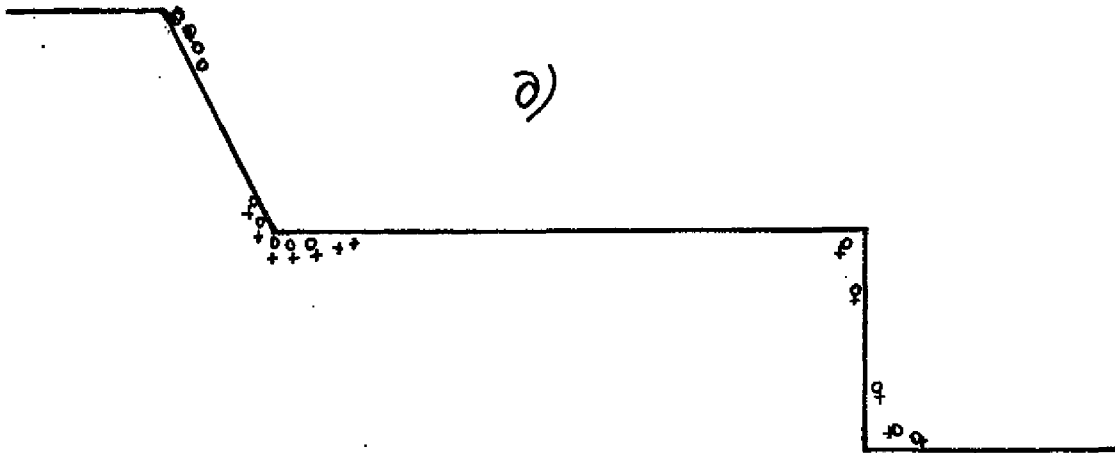
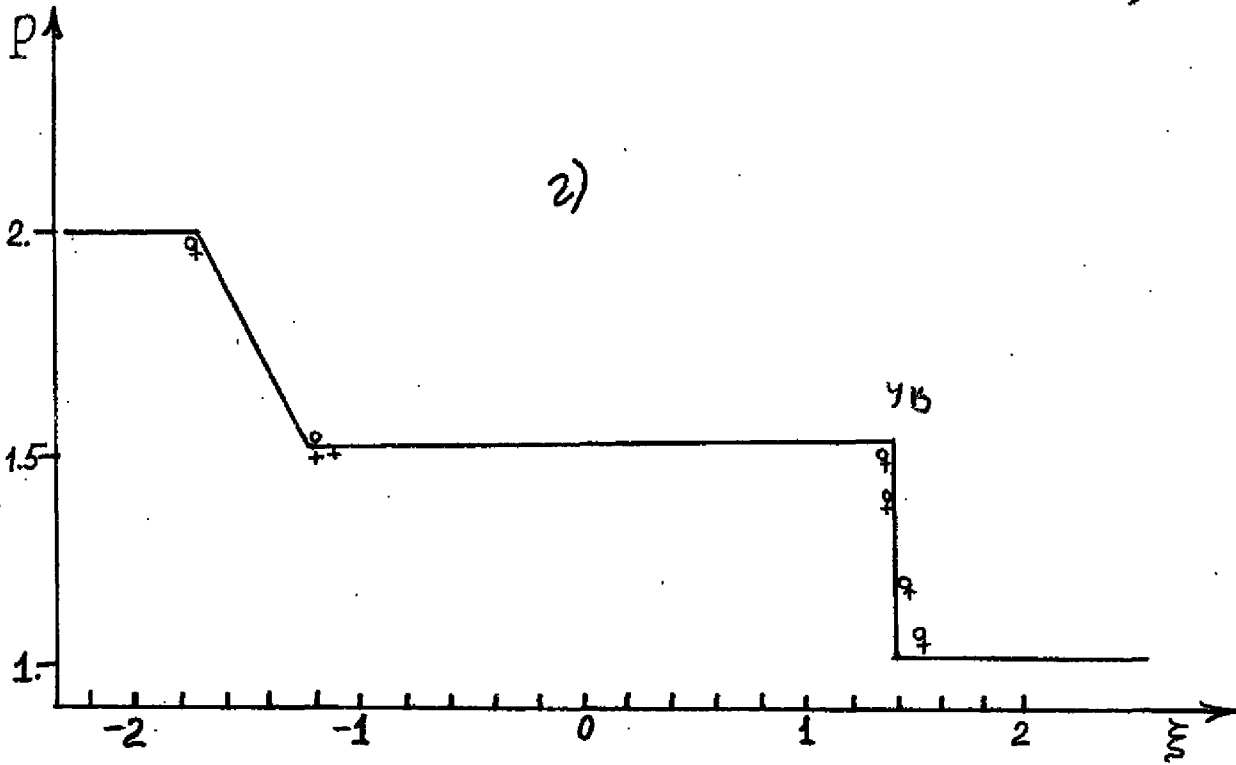


Рис. 1

--- ПКС-1  $d_i = 0,5 \text{ мм}$

ПКС-1-0  
x-кор.

КС-1-0  
x-кор.

a)

б)

в)

ПКС-П1-0  
FLIC-X

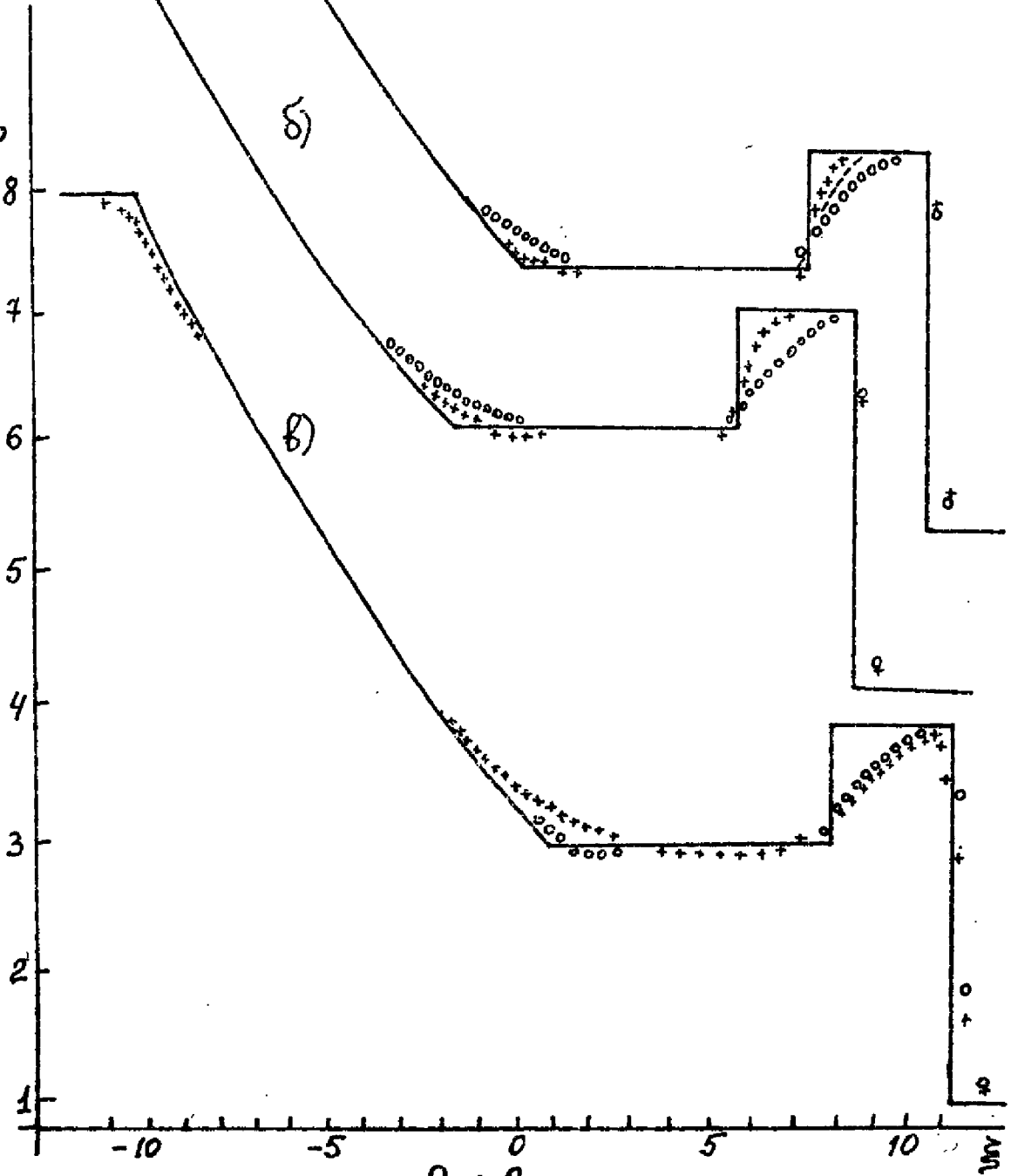


Рис. 2



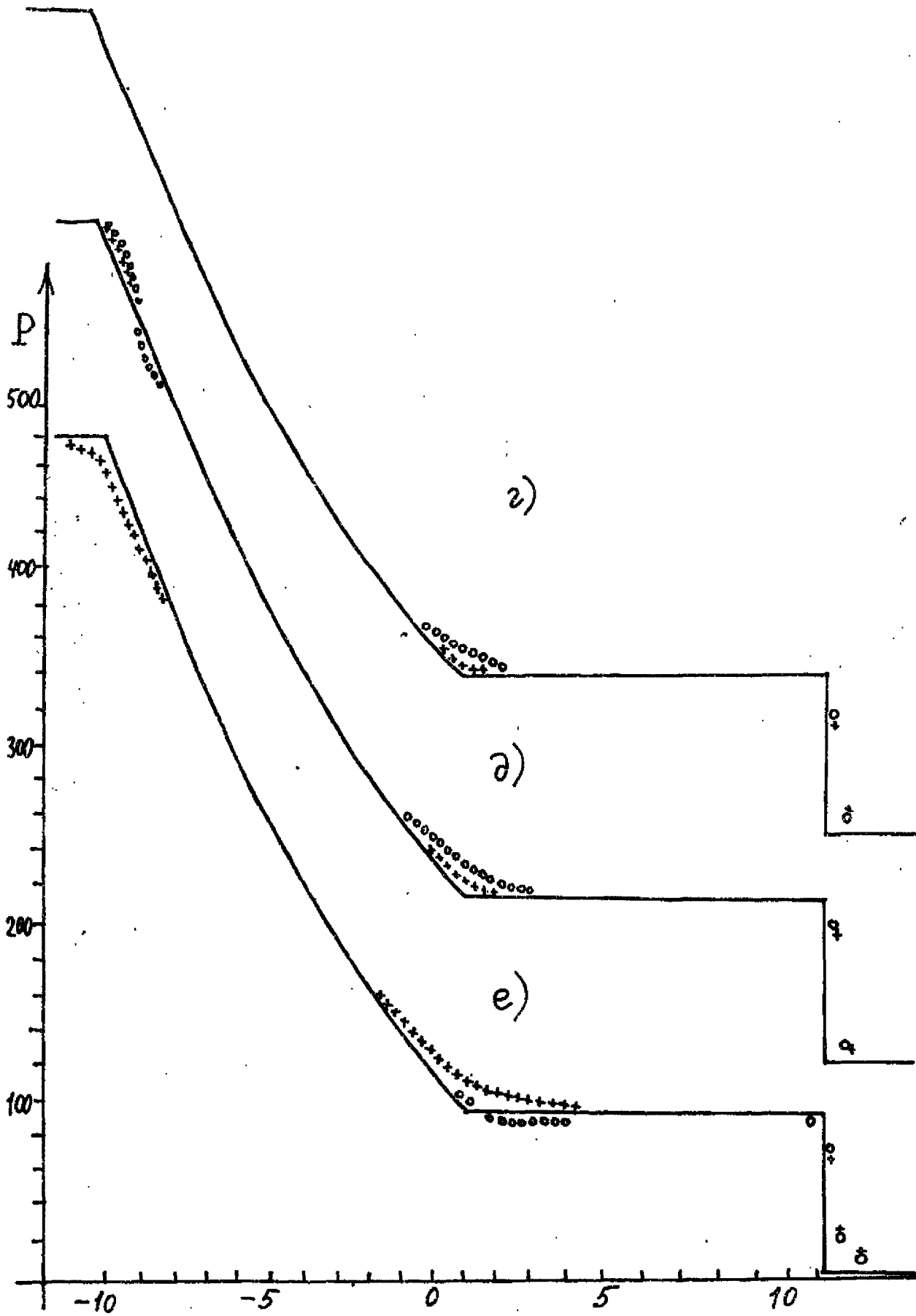


Рис. 2

ПКС-1 - 0  
\* - error.

+ - FLJC

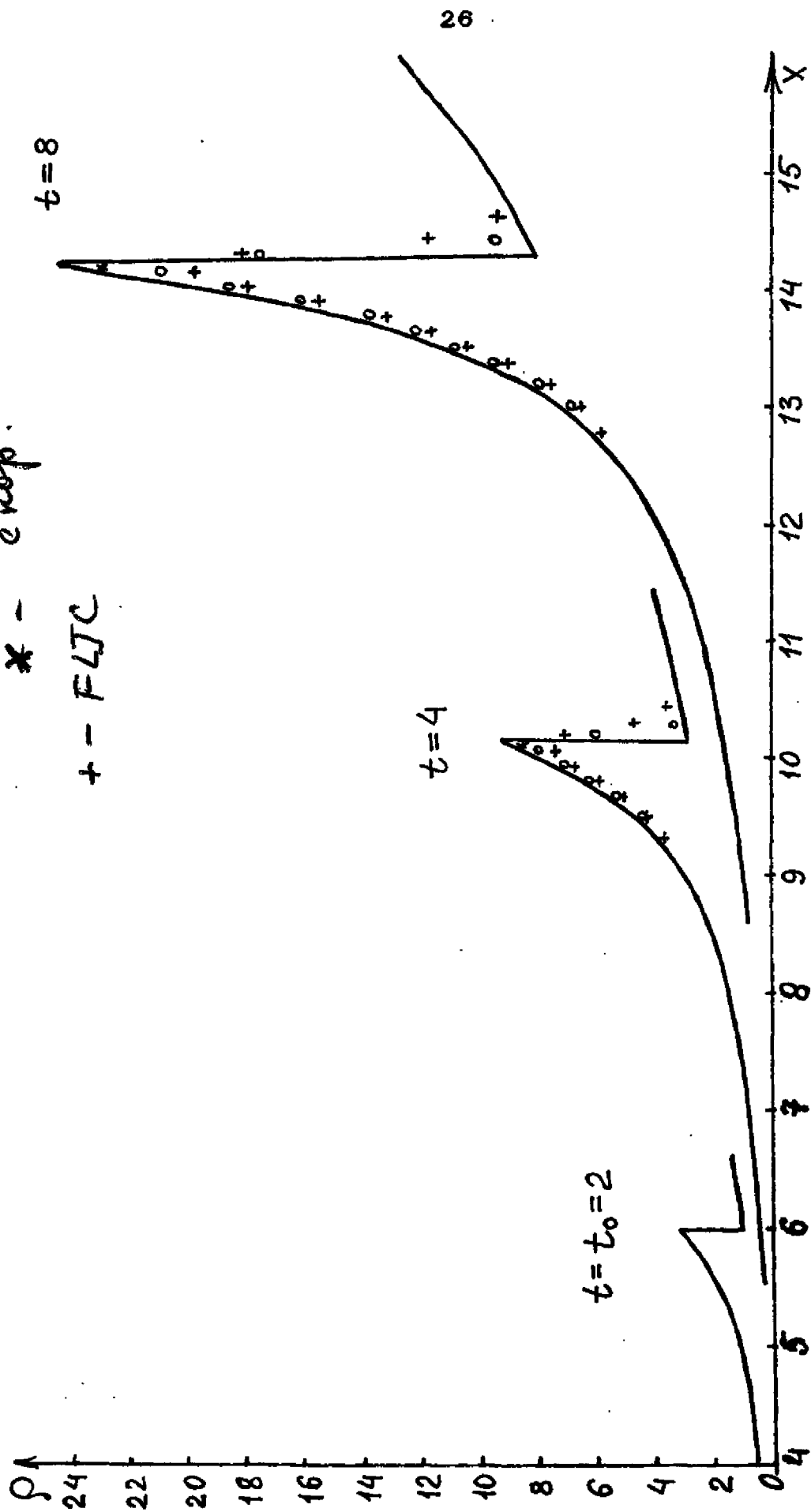


Рис. 3а

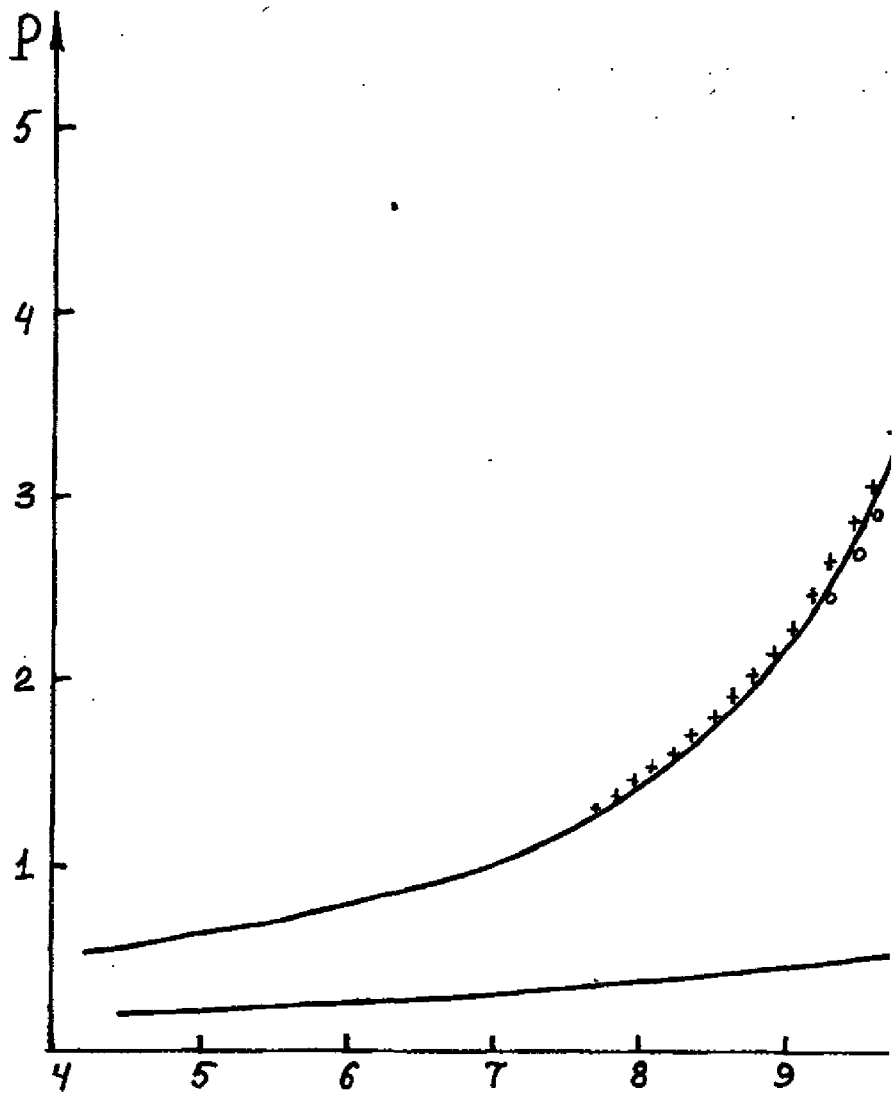
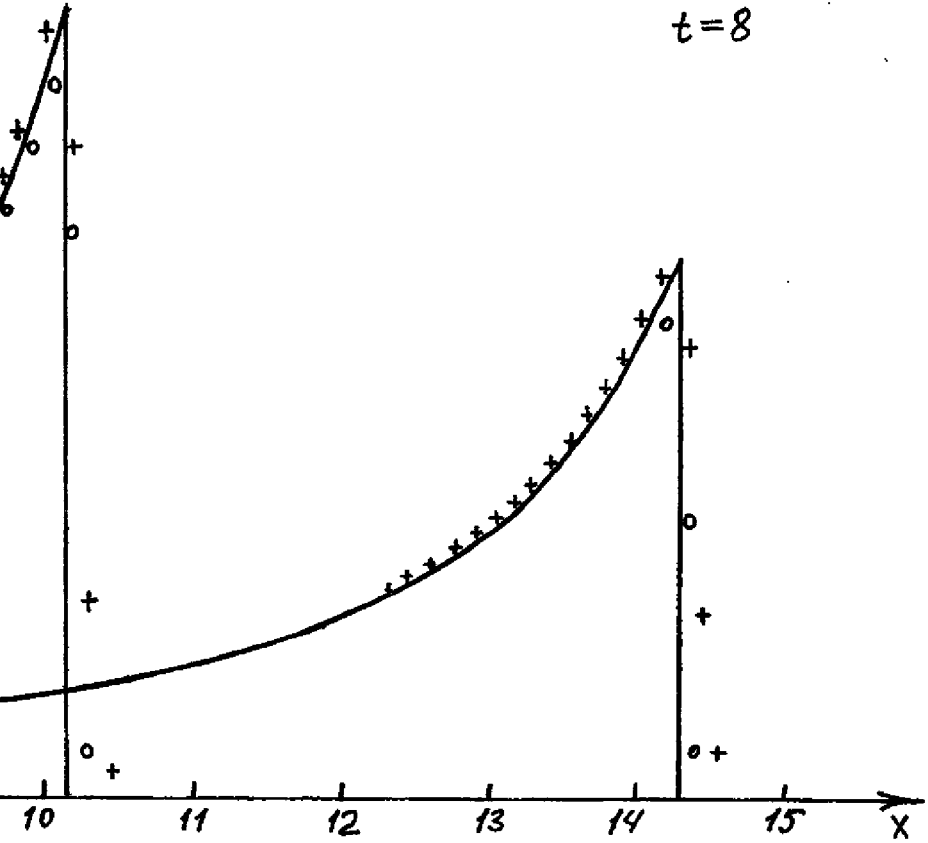


Рис.

$t=4$

$t=8$



o - ПКС-1  
+ - FLIC

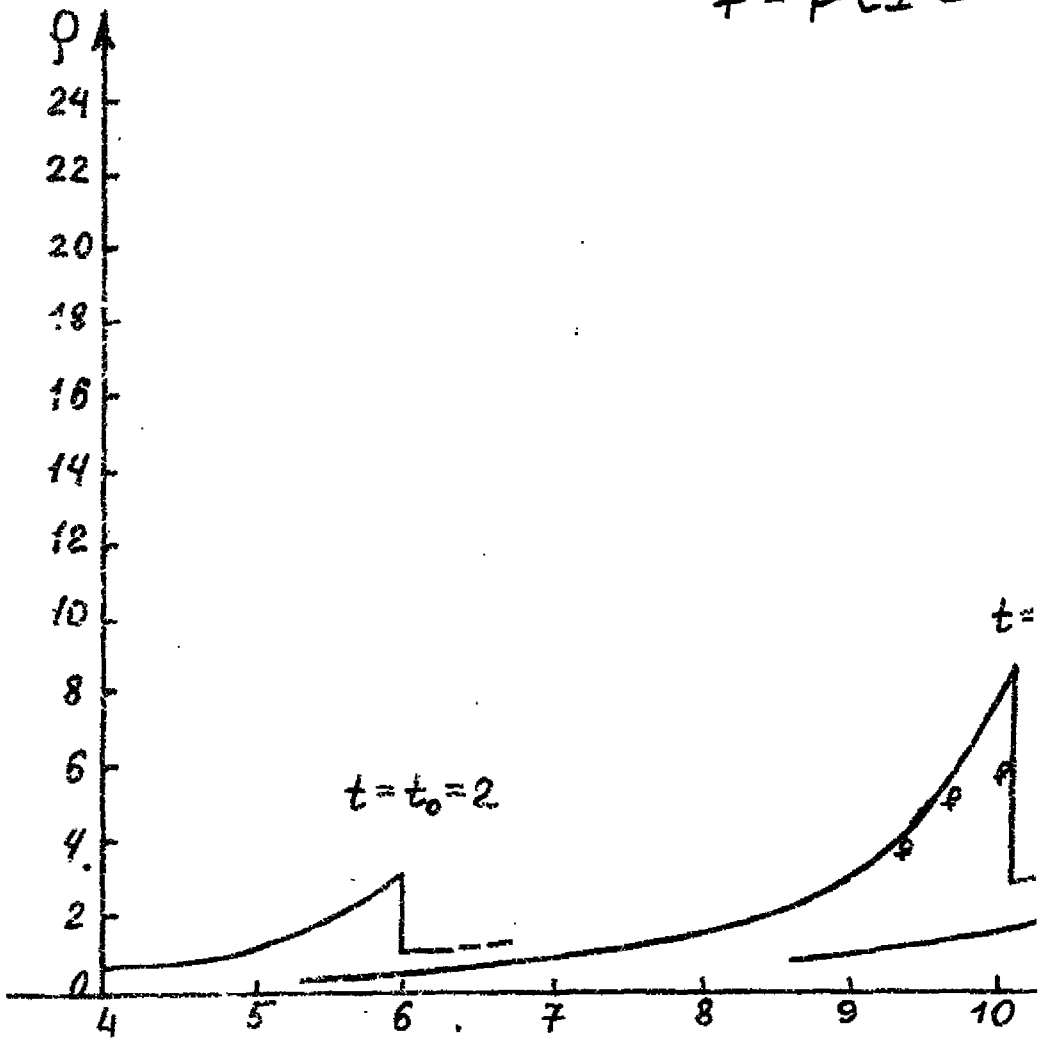
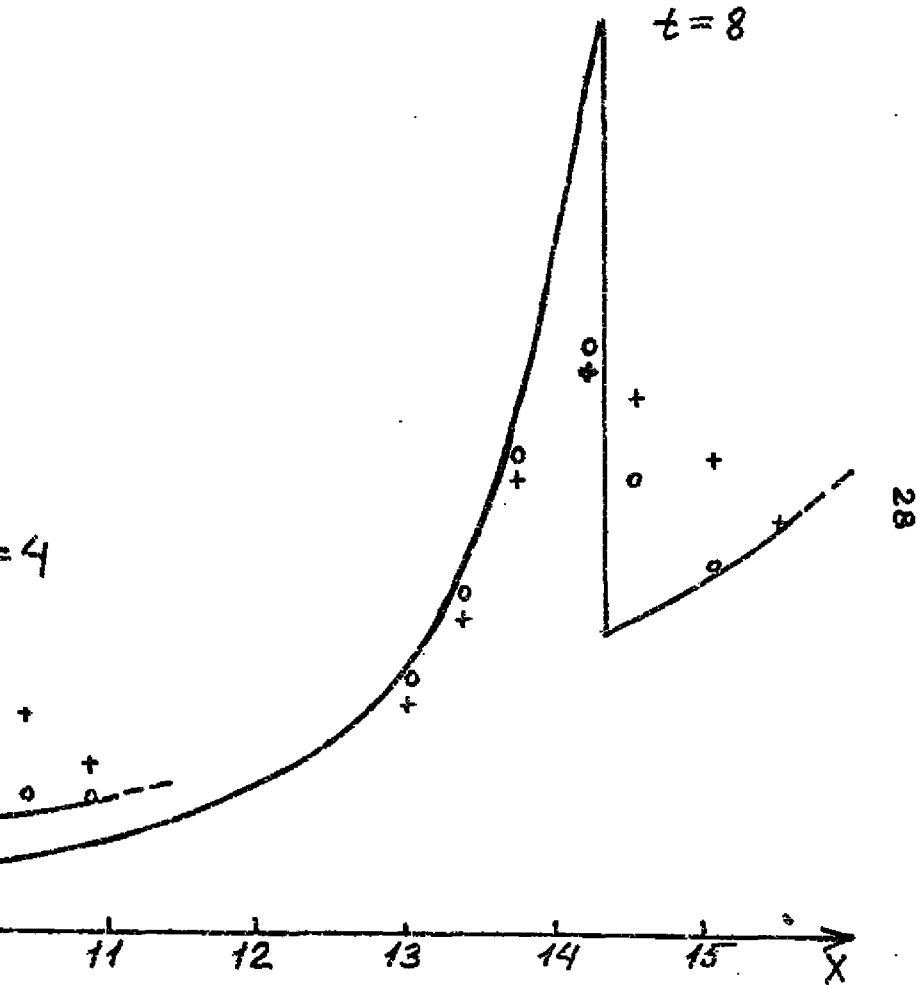


Рис. 3-в

$h = 0,4$        $\Delta/h = 20 \tau = 0,04$        $N_{24} = 287$



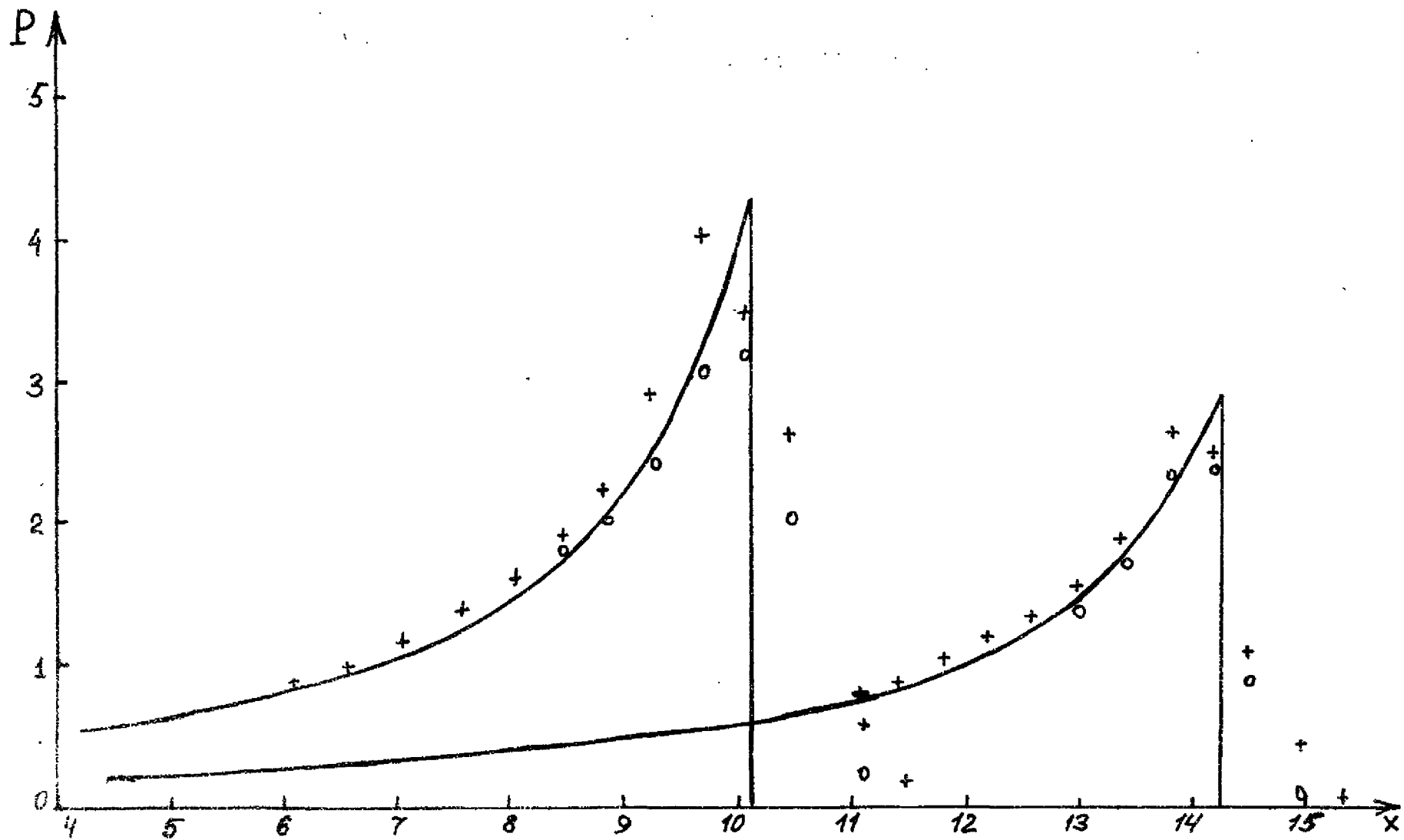


Рис. 32

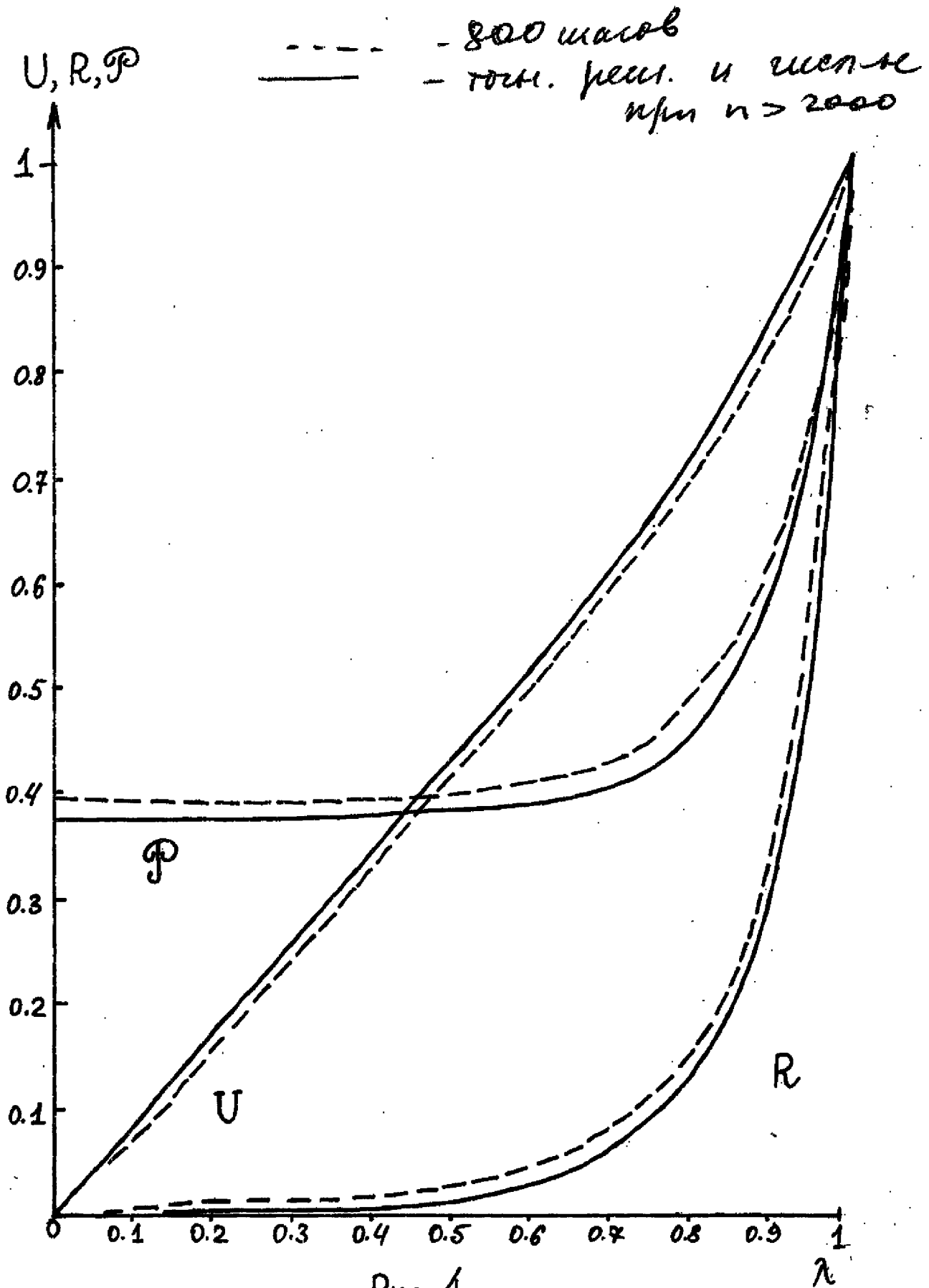


Рис. 4