$N > \frac{\gamma(m+1+4p)}{\gamma(1-p)-1} - 2$, $\operatorname{Sp} D^{(N)}_{\Gamma_k}(m) \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть T — самосопряженный дискретный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H такой, что $N_+(\lambda) = O(\lambda^p)$ и $N_-(\lambda) = O(\lambda^p)$, $0 < p < 1$. Пусть γ — некоторое число, удовлетворяющее условию $\gamma > \frac{1}{1-p}$. Пусть P — ограниченный оператор в H. Тогда между собственными числами μ_k оператора $T + P$ и собственными числами λ_k оператора T можно установить взаимно однозначное соответствие так, что существует подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=n_{-k}}^{n_k} \Big\{\mu_i^m - \lambda_i^m + m \operatorname{Sp} \operatorname{Res}_{\lambda_i} [\lambda^{m-1}(R_\lambda(T)P)] + \ldots + \frac{m}{N} \operatorname{Sp}\operatorname{Res}_{\lambda_i} [\lambda^{m-1}(R_\lambda(T)P)^N]\Big\} = 0 \quad \text{при } N > \frac{\gamma(m+1+4p)}{\gamma(1-p)-1} - 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций.— Функцион. анализ и его применение, 1967, т. 1, № 2, с. 52—59.
2. *Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белаббаси Ю.* О регуляризованных суммах корней одного класса целых функций.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 6, с. 1346—1348.
3. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 4, с. 794—798.
4. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Регуляризованные следы дискретных операторов.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 290—293.
5. *Садовничий В. А., Дубровский В. В., Любишкин В. А.* Следы дискретных операторов.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 4, с. 830—832.

УДК 517.962

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ С ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

А. А. Самарский

1. Введение

С развитием вычислительной техники и ее широким применением при решении научно-технических задач значительное распространение получили дискретные методы решения задач математической физики — метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Хотя по принципам построения и исследования соответствующих дискретных схем эти методы отличаются, однако их идейная основа одинакова. Они являются основными методами численного решения задач математической физики. И это не случайно: 1) МКР и МКЭ обладают универсальностью, гибкостью и модульностью — качествами, которые требуются от методов, реализуемых при проведении вычислительного эксперимента; 2) они соответствуют структуре и возможностям современных вычислительных машин.

Исследование многих комплексных проблем естествознания и техники проводится методом вычислительного эксперимента, который предъявляет высокие требования точности, экономичности, простоты реализации, утойчивости и т. д.

Как правило, большинство реальных задач нелинейны, причем природа нелинейности разнообразна. При исследовании комплексных нелинейных проблем линейные задачи всегда используются в качестве моделей. Кроме того, линейные задачи являются основой при теоретическом исследовании дискретных методов. Теория разностных схем для линейных уравнений весьма развита [1], для нелинейных же уравнений формулируются некоторые требования общего характера, моделирующие в пространстве сеточных функций свойства исходного дифференциального уравнения (см. п. 2).

Вопрос о точности является основным как для теории, так и для практики приближенных методов вообще. Для случая, когда решение исходной задачи достаточно гладкое, в теории МКР имеются многочисленные и достаточно полные исследования сходимости и оценки точности. Однако реальные физические процессы, как правило, протекают в гетерогенных средах, когда разные области решения обладают разными физическими характеристиками, при наличии сосредоточенных внешних факторов (сил, источников). Кроме того, для реальных задач входные данные являются негладкими. Поэтому большое значение приобретает вопрос об исследовании точности дискретных схем в зависимости от гладкости решения.

Важность этого вопроса была отмечена еще в начале развития теории разностных схем. В 50—60-х годах была разработана теория однородных разностных схем, которые сохраняют сходимость и на разрывных решениях в случае краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами [2, 3]. Отметим, что классическое понятие погрешности аппроксимации в точке здесь дает неправильное представление о точности метода. При помощи специальных априорных оценок и представления погрешности аппроксимации в подходящей дивергентной форме для одномерных задач было получено необходимое и достаточное условие сходимости в классе разрывных коэффициентов — консервативность схем (самосопряженность разностного оператора). Этот принципиальный результат используется в качестве исходного требования при построении разностных схем для многомерных и нелинейных уравнений математической физики. Пересмотр понятия аппроксимации и развитие аппарата априорных оценок для погрешности разностного решения в сеточных нормах $W_2^s(\omega)$, $C(\omega)$ (где ω — сетка) через погрешность аппроксимации в негативной норме позволило получить новые априорные оценки и расширить представление об области применимости однородных разностных схем для уравнений с частными производными.

Можно сказать, что для одномерных стационарных задач в настоящее время имеются фактически исчерпывающие результаты, включая построение однородных разностных схем любого порядка точности для уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями произвольного вида, имеющих обобщенные решения из W_2^1 [4—7]. Перенесение этих методов на многомерный случай, однако, оказалось недостаточно эффективным и позволяло получить лишь заниженные оценки точности (например, $O(\sqrt{h})$ вместо $O(h)$ в одномерном случае).

2. Сходимость к обобщенным решениям

При изучении многомерных задач математической физики с негладкими данными мы естественно приходим к понятию обобщенного решения. Здесь особое значение уже приобретает конструкция разностной схемы и изучение ее сходимости для задач с обобщенными решениями из некоторого класса. Самыми естественными являются соболевские классы W_p^k.

Обобщенное решение дифференциального уравнения определяется как функция, удовлетворяющая некоторому интегральному тождеству. Таким образом, классическая трактовка погрешности аппроксимации как невязки при подстановке точного решения в разностную схему и ее оценка при помощи формулы Тейлора не является естественной. В свое время, как было уже отмечено выше, отказ от такой трактовки понятия аппроксимации оказался полезным при исследовании сходимости разностных схем для одномерных задач с разрывными коэффициентами. Там приходилось бороться с отсутствием аппроксимации при нарушении гладкости в отдельных заданных узлах сетки. Однако может оказаться, что в случае обобщенных решений аппроксимация отсутствует во всех узлах сетки. Таким образом, необходимо отказаться от классического определения погрешности аппроксимации и использовать подходящие его обобщения.

Первые результаты по исследованию сходимости дискретных методов для задач с обобщенными решениями из W_2^k были получены в теории МКЭ. Так как погрешность метода Ритца минимальна в смысле энергетического скалярного произведения, то оценку сходимости МКЭ удалось свести к проблемам интерполяции и аппроксимации, которые хорошо изучены в конструктивной теории функций. Для эллиптических задач $2m$-го порядка в МКЭ получены следующие типичные оценки сходимости [8]:

$$\| y_h - u \|_{W_2^s(\Omega)} \leqslant M \, |h|^{k-s} \, \| u \|_{W_2^k(\Omega)}, \qquad k > s, \tag{1}$$

где $|h|$ — характерный размер шага; Ω — область определения точного решения $u(x)$; $W_2^k(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — пространство Соболева; $y_h(x)$ — приближенное решение, рассматриваемое как элемент $w_2^s(\Omega)$; $(k-1)$ — степень полиномиального продолжения, $s \leqslant m$; M — постоянная, не зависящая от h, $u(x)$, $y_h(x)$. Типичным для МКЭ является случай $s = m$. Для сеточного уравнения Пуассона, полученного с помощью треугольных элементов, оценка (1) верна при $s = 0, 1$, $k = 2$ [8, 9].

Для МКР до сих пор типичными были оценки ($m = 1$)

$$\| y - u \|_{W_2^1(\omega)} \leqslant M \, |h|^2 \, \| u \|_{C^4(\Omega)}, \tag{2}$$

где ω — сетка в Ω, $W_2^1(\omega)$ — дискретный аналог пространства $W_2^1(\Omega)$. Если даже Ω — прямоугольник, то условие $u \in C^4(\Omega)$ должно быть дополнено требованием выполнения условий согласования решения дифференциального уравнения в угловых точках области [10, 11]. Сравнение (1) для МКЭ при $k = 2$, $s = 1$ и (2) для МКР приводит к задачам: 1) получить нужную скорость сходимости МКЭ в случае гладких решений без повышения степени полиномиального продолжения (в сеточном аналоге нормы $W_2^1(\Omega)$), 2) получить для разностных схем оценки с сохранением порядка сходимости при понижении гладкости решения. Решение 1-й задачи для МКЭ получено различными авторами.

Для эллиптических задач 2-го порядка верна оценка [8, 9]

$$\| y_h - u \|_{W_2^1(\widetilde{\omega})} \leqslant M \, | h |^k \, \| u \|_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \qquad k \geqslant 2, \tag{3}$$

где $\widetilde{\omega}$ — дискретное множество точек области. Для линейных треугольных элементов оценка (3) при $k = 2$ получена в [9], где $\widetilde{\omega}$ — множество вершин треугольных элементов. Другие оценки получены в [12, 13]. В литературе по МКЭ оценки (3) называются сверхсходимостью в узлах $\widetilde{\omega}$ [8].

3. Согласованные априорные оценки

В последние два года для эллиптических задач удалось получить оценки сходимости ряда разностных схем, близкие к оптимальным [15—23]. Основной интерес представляют такие априорные оценки, в которых порядок скорости сходимости разностной схемы согласован с гладкостью решения исходного дифференциального уравнения. По определению априорную оценку для погрешности разностной схемы назовем согласованной с гладкостью решения, если она имеет вид

$$\| y - u \|_{W_2^s(\omega)} \leqslant M \, | h |^{k-s} \, \| u \|_{W_2^k(\Omega)}, \qquad k > s, \quad s \geqslant 0, \tag{4}$$

где k, s — целые числа; $\| \cdot \|_{W_2^s(\omega)}$ и $\| \cdot \|_{W_2^k(\Omega)}$ — соболевские нормы на множестве функций дискретного и непрерывного аргументов соответственно.

Хотя оценку (4) можно трактовать как дискретный аналог оценки (1) для МКЭ, метод получения (4) существенно отличается от теории МКЭ. Он опирается на специальное представление погрешности аппроксимации. Представление погрешности аппроксимации ψ разностной схемы должно быть согласовано через оператор разностной схемы с нормой, в которой получается оценка сходимости. Например, если разностный оператор A представляется в виде суммы $A_1 + A_2 = A$ и ищется оценка в норме L_2, то погрешность аппроксимации необходимо представить в виде $A_1\eta_1 + A_2\eta_2 = \psi$, где η_1, η_2 имеют порядок $O\left(| h |^k\right)$ на обобщенных решениях из W_2^k, $k = 1, 2$. Для сравнения укажем, что применявшееся ранее представление погрешности аппроксимации в так называемой дивергентной форме можно условно трактовать как представление в виде суммы $\psi = A_1^{1/2}\eta_1 + A_2^{1/2}\eta_2$; оно затем использовалось для получения априорных оценок погрешности $z = y - u$ в энергетической норме $\| z \|_A = (Az, z)^{1/2}$ через $\| \eta_1 \| + \| \eta_2 \|$. При этом η_1 и η_2 имеют тот же порядок $O\left(| h |^k\right)$, но на решениях из C^{k+1}, $k = 1,2$. Таким образом, указанное выше обобщение понятия аппроксимации позволяет существенно ослабить требования, предъявляемые к решению (W_2^k вместо C^{k+1}), и обеспечивающие сходимость со скоростью $O\left(| h |^k\right)$ в $L_2(\omega)$.

Ниже излагаются результаты, полученные в работах [14—22] на основе нового аппарата исследования и построения разностных схем на минимальных шаблонах, а именно — получены согласованные априорные оценки вида (4) и исследована скорость сходимости к обобщенным решениям линейных и квазилинейных эллиптических и параболических уравнений.

Развитый метод сводится к следующим этапам: 1) построение разностных схем с помощью осредняющих операторов точных схем для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, 2) представление погрешности аппроксимации в соответствующем виде (например, в виде $\psi = A_1\eta_1 + A_2\eta_2$) и получение априорной оценки для погрешности разностной схемы, 3) оценка составляющих (например, η_1 и η_2) погрешности аппроксимации на обобщенных решениях и оценка скорости сходимости разностной схемы.

Этот общий подход и концепция согласованных оценок сходимости последовательно применяются к эллиптическим уравнениям второго и четвертого порядков, к параболическим задачам и осесимметричным уравнениям Пуассона и уравнениям Лямэ теории упругости [14—22]. Для фиксированных эллиптических схем по существу получен спектр оценок, среди которых а) имеются принципиально новые оценки вообще для теории дискретных методов, например, оценки в L_p и оценки сходимости для решений из W_2^1, б) как частные случаи, содержатся известные в литературе оценки; эти оценки улучшают ряд оценок в МКР, например, оценок скорости сходимости в C и W_2^2.

Мы остановимся здесь на некоторых применениях метода согласованных оценок.

4. Сходимость разностной схемы к решению из W_2^1 (Ω)

Пусть $\Omega = \{0 < x_\alpha < l_\alpha, l_\alpha > 0, \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник с границей Γ, $\omega = \{x_{(i)} = (i_1h_1, i_2, h_2) \in \Omega\}$ — сетка в Ω с границей $\gamma \subset \Gamma$. Рассмотрим первую краевую задачу

$$Lu = L_1u + L_2u = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega; \qquad u(x) = 0, \ x \in \Gamma,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x_\alpha)\,u, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{5}$$

Задача допускает разделение переменных, функции $k_\alpha(x)$, $q_\alpha(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$0 < c_1 \leqslant k_\alpha(x_\alpha) \leqslant c_2,\ k_\alpha(x_\alpha) \in L_1(\Omega),\ q_\alpha(x_\alpha) \geqslant 0,\ q_\alpha(x_\alpha) \in L_p(\Omega),\ p > 1,\ 2,$$

$$f = f(x) = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\alpha}(x) + f_0(x),\ f_\alpha(x) \in L_2(\Omega),\ \alpha = 1, 2,$$

$$f_0(x) \in L_{2+\varepsilon}(\Omega), \qquad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

которые обеспечивают принадлежность решения $u = u(x) = u(x_1, x_2)$ задачи (5) к $W_2^1(\Omega)$ [24]. Нам понадобятся некоторые результаты теории разностных схем для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [1]:

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)\,u = -f(x), \qquad 0 < x < l, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{7}$$

Для этой задачи на произвольной неравномерной сетке $\omega = \{x_i, i = 0, 1, 2, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ в [25] построена точная разностная схема

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy = -\varphi(x), \qquad 0 < x = ih < l, \qquad y(0) = 0, \qquad y(l) = 0. \tag{8}$$

Здесь приняты обозначения

$$y = y(x_i) = y_i, \qquad y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \qquad y_{\hat{x}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\hbar_i}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1},$$

$$\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}).$$

Коэффициенты $a = a_i$, $d = d_i$, $\varphi = \varphi_i$ выражаются через значения коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ в окрестности $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ узла x_i (формулы для них не выписываем, отсылая к [25]). В частности, $\varphi = \bar{T}f$, где оператор $\bar{T}$ (который мы называем оператором точной схемы или осредняющим оператором точной схемы) обладает следующим свойством: $\tilde{T}(Lu) = \Lambda u$ в каждом узле сетки. Формулы для $\tilde{T}$ в общем случае уравнения (7) мы не приводим, отсылая к [25, 15]. В частном случае $k(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, т. е. при $Lu = u''$ оператор точной схемы $\tilde{T}$ имеет вид

$$\tilde{T} = T^2, \; Tu = \frac{1}{\hbar} \int\limits_{x-0,5h}^{x+0,5h^+} f(\xi)\, d\xi, \qquad h = h_i, \quad h^+ = h_{i+1}, \tag{9}$$

где T — оператор осреднения по Стеклову.

Для двумерной задачи (5) имеем $L = L_1 + L_2$, $T^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ — оператор точной схемы, соответствующий L_α:

$$T^{(\alpha)}(L_\alpha u) = \Lambda_\alpha u = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - d_\alpha u, \tag{10}$$

где a_α, d_α — коэффициенты точной схемы для уравнения $L_\alpha u = -F(x)$ при фиксированном $x_\beta = x_{3-\alpha}$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Операторы $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ для задачи (2) перестановочны, $T^{(1)}T^{(2)} = T^{(2)}T^{(1)}$. Поэтому действуя оператором $T^{(1)}T^{(2)}$ на уравнение (5), получим разностную схему:

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \quad y = 0, \quad x \in \gamma, \tag{11}$$

$$\Lambda = b_2\Lambda_1 + b_1\Lambda_2, \quad \varphi = T^{(1)}T^{(2)}f, \; b_\alpha = T^{(\alpha)}(1), \quad \alpha = 1, 2.$$

Решение $u = u(x)$ задачи (5) как функция из $W_2^1(\Omega)$ может быть не определено в узлах сетки. Поэтому мы будем сравнивать сеточное решение $y(x)$ задачи (11) с некоторым средним значением (проекцией) $\bar{u}(x)$ решения $u = u(x)$ задачи (5) в окрестности узла $x \in \omega$. Определить $\bar{u}(x)$ можно по-разному. Положим, например,

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} T_1T_2u, & x \in \omega, \\ 0, & x \in \gamma, \end{cases}$$

где T_α, $\alpha = 1, 2$ — оператор осреднения по Стеклову (9) по переменной x_α

$$T_\alpha u(\cdot, x_2) = \frac{1}{\hbar_\alpha} \int\limits_{x_1-h_1/2}^{x_1+h_1^+/2} u(\xi, x_2)\, d\xi, \qquad h_1 = (h_1)_{i_1}, \qquad h_1^+ = (h_1)_{i_1+1}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1 ([20]). *Если выполнены условия* (6), *то разностная схема* (11) *имеет первый порядок точности в* $L_2(\omega)$, *и верна оценка*

$$\| y - \bar{u} \|_{L_2(\omega)} \leqslant M \, |h| \, \| u \|_{W_2^1(\Omega)},$$

где $M = \mathrm{const} > 0$ *не зависит ни от* h, *ни от решения* u.

При доказательстве теоремы используется представление погрешности аппроксимации в виде

$$\psi = \Lambda u + \varphi = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha \eta_\alpha,$$

и применяется лемма Брамбла — Гильберта [20].

Замечание 1. Аналоги теоремы 1 имеют место для краевых задач 2-го и 3-го рода, для квазилинейного уравнения (5) с правой частью $f = f(x, u)$, для задачи в цилиндрических координатах (r, z), а также для случая

$$Lu = (\overset{0}{L}_1 + \overset{0}{L}_2) u - q(x) u = -f(x), \qquad \overset{0}{L}_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad \alpha = 1, 2, \quad (12)$$

когда $q(x) \in L_\infty(\Omega)$.

Замечание 2. В случае задачи Дирихле в прямоугольнике

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x \in \Omega; \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma$$

для пятиточечной разностной схемы

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -T_1^2 T_2^2 f(x), \; x \in \omega; \; y(x) = 0, \; x \in \gamma,$$

где ω — равномерная сетка с шагами h_1 и h_2, справедлива априорная оценка (4), в которой $p = 2$; $k = 2, 3, 4$ и $k - 2 \leqslant s \leqslant 2$.

В частном случае $p = 2$, $s = 1$, $k = 2, 3$ она получена В. Вайнельтом [14]; при $p = 2$, $s = 0$, $k = 2{,}3$ — Р. Д. Лазаровым и В. Л. Макаровым [19], при $p = 2$, $s = 1$, $k = 3$ ее можно рассматривать как аналог результатов по «сверхсходимости градиента» МКЭ [8, 9]. При $p = 2$, $s = 2$, $k = 4$ оценка содержит результаты [26, 27], где предполагалось, что $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Здесь аналогов с МКЭ нет.

5. Схема второго порядка точности на решениях из $W_2^2(\Omega)$

Рассмотрим задачу с разделяющимися переменными

$$Lu = (L_1 + L_2) u = -f(x), \; x = (x_1, x_2) \in \Omega; \; u(x) = 0, \; x \in \Gamma,$$

$$L_1 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), \qquad L_2 u = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right), \qquad (13)$$

$$0 < c_1 \leqslant k_\alpha(x_{3-\alpha}) \leqslant c_2, \qquad k_\alpha \in L_1(\Omega), \qquad \alpha = 1, 2; \qquad f(x) \in L_2(\Omega). \qquad (14)$$

Условия (14) обеспечивают принадлежность решения этой задачи к $W_2^2(\Omega)$. Путем замены переменных уравнение (14) сводится к (5) или к (12) при $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 0$.

Для задачи (13), (14) построена, по аналогии с предыдущим пунктом, пятиточечная разностная схема и доказано, что существует такая неравномерная сетка, на которой схема имеет второй порядок точности в $L_2(\omega)$; если же коэффициенты k_α более гладкие и, помимо (13), выполнено условие $k_1(x_2), k_2(x_1) \in W_\infty^1(\Omega)$, то эта разностная схема имеет второй порядок точности в $L_2(\omega)$ на произвольной равномерной сетке, при этом верна оценка

$$\| y - u \|_{L_2(\omega)} \leqslant M |h|^2 \| f \|_{L_2(\Omega)}.$$

6. Схемы для уравнения четвертого порядка

Рассмотрим краевую задачу в прямоугольнике Ω

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right) = f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(x) = 0, \qquad x \in \Gamma, \qquad (15)$$

где n — внешняя нормаль к границе Γ,

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha^2\xi_\beta^2 \geqslant c_1(\xi_1^2+\xi_2^2)^2, \qquad c_1=\mathrm{const}>0,$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольные вещественные числа. На равномерной сетке $\omega = \{x=(i_1h_1, i_2h_2),\ i_\alpha=1, 2, \ldots, N_\alpha-1,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=1, 2\}$, $\overline{\omega}=\{x=(i_1h_1, i_2h_2),\ i_\alpha=0, 1, \ldots, N_\alpha,\ \alpha=1, 2\}$,

$$\gamma=\overline{\omega}\setminus\omega, \quad \gamma_{\pm\alpha}=\{x\in\gamma;\ \cos(x_\alpha, n)=\pm 1\}, \quad \alpha=1,\ 2$$

задачу (15) аппроксимируем разностной схемой

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(b_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta, x_\beta})_{\bar{x}_\alpha, x_\alpha}=\varphi(x), \qquad x\in\omega,$$

$$y(x)=0, \qquad x\in\gamma; \qquad y_{\bar{x}_\alpha, x_\alpha}(x)=0, \qquad x\in\gamma_{\pm\alpha}, \qquad \alpha=1, 2, \tag{16}$$

где $b_{\alpha\beta}=T_1^2T_2^2k_{\alpha\beta}(x)$, $\varphi=T_1^2T_2^2f$, T_α — оператор осреднения по Стеклову по переменной x_α, α, $\beta=1, 2$.

Если $f(x)\in W_2^{l-1}(\Omega)$, $k_{\alpha\beta}(x)\in W_\infty^{l}(\Omega)\cap W_2^{1+l}(\Omega)$, $l=0,\ 1$, то для разностной схемы (16) будет справедлива оценка (4) с $s=2$ и $k=3+l$, $l=0{,}1$.

Аналогичные результаты имеют место и для квазилинейного уравнения четвертого порядка с правой частью $f=f(x, u)$.

7. Схемы для параболических уравнений

Разработанный математический аппарат применяется в [18, 20] для построения и исследования разностных схем для параболического уравнения в области $\overline{Q}_T=\overline{\Omega}\times[0, T]$

$$\partial u/\partial t=Lu+f(x, t), \qquad (x, t)\in Q_T, \qquad Q_T=\Omega\times(0, T], \tag{17}$$

$$u(x, 0)=u_0(x), \quad x\in\Omega; \qquad u(x, t)=0, \quad x\in\Gamma, \quad 0<t<T,$$

где оператор L определяется по формуле (5). Для этой задачи строим чисто неявную схему

$$b_1b_2\frac{y(x, t)-y(x, t-\tau)}{\tau}=\Lambda y(x, t)+\varphi(x, t), \qquad x\in\omega, \quad t\in\omega_\tau,$$

$$y(x, 0)=T^{(1)}T^{(2)}(u_0(x)), \qquad x\in\omega, \quad y(x, t)=0, \quad x\in\gamma, \quad t\in\omega_\tau, \tag{18}$$

где $\varphi=T^{(1)}T^{(2)}(f(x, t))$; ω — сетка в прямоугольнике Ω; γ — ее граница; $\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0, 1, \ldots,\}$, а оператор Λ определяется формулой (11).

Предположим, что решение $u=u(x, t)$ задачи (17) принадлежит $W_2^{1,1}(Q_T)$. Обозначим $\bar{\bar{u}}(x, t)$ — осреднение $\bar{u}(x, t)$ по Стеклову по переменной t:

$$\bar{\bar{u}}(x, t)=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\bar{u}(x, \theta)\,d\theta,$$

где $\bar{u}(x, t)$ определяется по формуле (9).

Теорема 2. *Если решение задачи* (17) $u(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T)$, *то справедлива оценка*

$$\| y - \bar{\bar{u}} \|_{L_2(\omega \times \omega_\tau)} \leqslant M \left(\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + |h| \, \| u \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \right), \tag{19}$$

где y — *решение разностной задачи* (18), $M = \text{const} > 0$ *не зависит от* τ, h, u.

Замечание 1. Аналогичный результат справедлив и для схем с весами, в том числе для явной и симметричной схем.

Замечание 2. Переходя в (19) к пределу при $\tau \to 0$, получаем оценку $O(|h|)$ для метода прямых в случае $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Замечание 3. Все изложенные выше результаты сохраняют силу для трехмерного случая и для квазилинейного уравнения (17) с правой частью $f = f(x, t, u)$, удовлетворяющей условию Липшица по u.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах.— Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 4, с. 562—565.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах.— Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1961, т. 1, № 1, с. 5—63.
4. *Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма—Лиувилля.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1969, т. 9, № 2, с. 315—336.
5. *Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для систем дифференциального уравнения второго порядка.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 4, с. 302—305.
6. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* К вопросу о скорости сходимости усеченных схем m-го ранга для обобщенного решения.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1276—1282.
7. *Бурханов Ш. А., Гуминская Н. А., Макаров В. Л., Приказчиков В. Г.* О точных разностных схемах для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.— Докл. АН УССР, Сер. А, 1978, № 9, с. 778—781.
8. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
9. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979. 331 с.
10. *Волков Е. А.* О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике.— Труды МИАН СССР, 1965, т. 77, с. 89—112.
11. *Марчук Г. И., Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 319 с.
12. *Zlamal M.* Superconvergence and reduced integration in the finite element method.— Math. Comput., 1978, vol. 32, N 143, p. 663—685.
13. *Даутов Р. З., Лапин А. В.* Сеточные схемы произвольного порядка точности для квазилинейных эллиптических уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1979, № 10, с. 24—37.
14. *Weinelt W.* Untersuchungen zur Konvergenzgesch-windegkeit bei Differenzenverfahren.— Wiss. Techn. Hochsck. Karl-Marx-Stadt, 1978, Bd. 20, N 6, S. 763—769.
15. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 2, с. 371—387.
16. *Лазаров Р. Д.* К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1285—1294.
17. *Лазаров Р. Д.* О сходимости разностных решений к обобщенным решениям уравнений четвертого порядка.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1295—1303.
18. *Лазаров Р. Д.* Оценки сходимости разностных схем для параболических уравнений на обобщенных решениях.— Докл. Болг. Акад. наук, 1982, т. 35, № 1, с. 7—10.
19. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 2, с. 282—286.

20. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А.* О построении и исследовании однородных разностных схем.— Мат. сб., 1982, т. 117 (159), № 4, с. 469—480.
21. *Лазаров Р. Д., Мокин Ю. И.* О сходимости разностных схем для уравнения Пуассона в метриках L_p.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 4, с. 796—802.
22. *Гаврилюк И. П., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Пирназаров С. П.* Согласованные оценки скорости сходимости разностных схем для уравнений эллиптического типа четвертого порядка с решениями из классов W_2^3 и W_2^4.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 2, с. 532—544.
23. *Самарский А. А., Фрязинов И. В.* О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1971, т. 11, № 2, с. 383—410.
24. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
25. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, т. 1, № 3, с. 425—440.
26. *Андреев В. Б.* О равномерной сходимости некоторых разностных схем.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, т. 6, № 2, с. 238—250.
27. *Дрыя М.* Априорные оценки в W_2^2 в выпуклой области для системы разностных эллиптических уравнений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1972, т. 12, № 6, с. 1595—1601.

УДК 517.96:[533.95+537.2]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМООПТИЧЕСКИХ (магнитоэлектрических) СИСТЕМ

А. Г. Свешников, С. А. Якунин

1. В настоящей работе будут рассмотрены некоторые вопросы построения и исследования математических моделей определенного класса задач плазмооптики, раздела плазмодинамики, связанного с получением и управлением интенсивными потоками заряженных частиц. Для рассматриваемого класса задач характерно выполнение следующих физических условий:

$$(\lambda_{ii}, \lambda_{in}, \lambda_{нн}) \gg L, \qquad R_{iл} > L \gg R_{eл}. \tag{1}$$

Здесь λ_{ii} λ_{in} $\lambda_{нн}$ — длины свободных пробегов ионов и нейтральных атомов по отношению к столкновениям друг с другом; L — характерный масштаб системы; $R_{iл}$, $R_{eл}$ — характерные значения ларморовских радиусов ионов и электронов. К плазмооптическим системам относятся различные устройства, находящие многочисленные применения в научных исследованиях и технике [1—3]. Это в первую очередь плазменные ускорители, служащие для создания мощных компенсированных ионных потоков, устройства плазменной корпускулярной оптики — плазменные линзы, плазменные энерго- и масс-сепараторы, плазменные элементы ионных инжекторов, магнитоэлектрические ловушки и т. д. Все эти системы получили в настоящее время широкое применение. Так плазменные ускорители работают в космосе как электрореактивные двигатели [4], широко применяются в научных экспериментах, начиная от активных воздействий на ионосферу [5] и кончая инжекцией в термоядерные установки; наконец, на их основе создана вакуумная ионно-плазменная технология, совершившая настоящую революцию в технике. Плазменные линзы, энергоанализаторы и масс-сепараторы