

Все те же самые закономерности существуют и при "обычных" полностью отражающих зеркалах конечного размера [2]; для их выявления в этом случае понадобились бы несопоставимо более трудоемкие аналитические изыскания и огромный объем численных расчетов.

Собственные колебания резонатора являются по существу результатом многократного прохождения по нему световых пучков. Возможность успешного выявления соответствующих закономерностей на базе аппарата комплексного эйконала свидетельствует о том, что для прогнозирования результатов однократного прохождения света через оптические системы указанный аппарат может использоваться и по-прежнему. В особенности это относится к системам со все более входящими в практику "аподицирующими апертурами".

Поступило
24 I 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев Ю.А. — Оптика и спектроскопия, 1983, т. 54, с. 765.
2. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. М.: Наука, 1979.
3. Коваленко Е.С. — Квантовая электроника, 1976, т. 3, с. 433.
4. Casperson L.W. — Appl. Optics, 1973, vol. 12, p. 2434.
5. Бекшаев А.Я., Гримблатов В.М. — Квантовая электроника, 1980, т. 7, с. 1168.

УДК 517.9 : 536.2 : 536.46

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Т.С. АХРОМЕЕВА, С.П. КУРДЮМОВ, Г.Г. МАЛИНЕЦКИЙ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

О ДИФфуЗИОННОМ ХАОСЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

1. В настоящее время интенсивно исследуются процессы усложнения пространственно-временной упорядоченности в гидродинамике, химии, биологии [1–3]. В результате таких процессов в системах различной природы может возникать сложное неупорядоченное поведение. В соответствующих математических моделях усложнение связано с последовательностью бифуркаций, переходов от простых решений к более сложным, при изменении параметров задачи.

Переход к хаосу обычно изучается на примере одномерных отображений [4, 5] или обыкновенных дифференциальных уравнений [6]. Однако вопрос о том, в какой мере применимы выработанные здесь представления к уравнениям в частных производных, которые дают более полное описание реальных систем, остается открытым. В настоящей работе этот вопрос изучается для уравнения, описывающего поведение широкого класса двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации [7, 8]:

$$(1) \quad \begin{aligned} W_t &= W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad x \in [0, l], \\ W(x, 0) &= W_0(x), \quad W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $W = u + iv$, u и v — действительные функции, c_1 и c_2 — действительные постоянные. Это уравнение используется также в теории волн, в физике плазмы, при моделировании морфогенеза [10]. Изучение задачи (1) основывается на вычислительном эксперименте в сочетании с анализом нескольких упрощенных моделей.

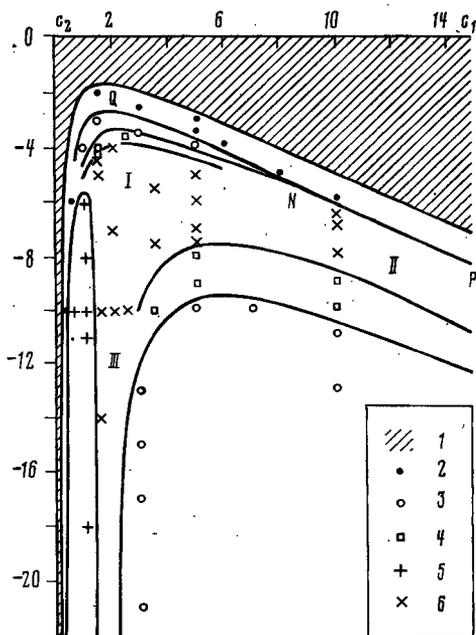
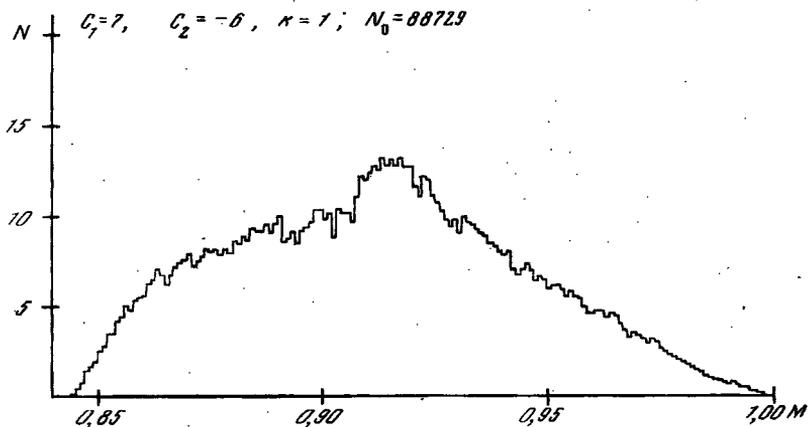


Рис. 1. Типы предельных решений (при $t \rightarrow \infty$) задачи (1) в области $l = \pi$: 1 — устойчиво пространственно-однородное решение; 2 — решение, у которого величины ρ_m не зависят от времени; 3 — периодическое решение, у которого $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют цикл S^1 ; 4 — $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют цикл S^2 ; 5 — решение, четное относительно середины отрезка; 6 — более сложные режимы. Сплошные линии приближенно указывают положение границ, на которых решение меняет свой тип. Начальные данные $W(x, 0)$ имеют следующий вид: $W(x, 0) = (\sum_{m=0}^3 \cos(2\pi mx/l)) + i(\sum_{m=0}^3 \cos((2m+1)\pi x/l))$

Рис. 2. Функция распределения максимумов $\xi^{1/2}(t)$ для решения системы (2), N_0 — общее число максимумов



2. Прежде всего необходимо выяснить, имеет ли задача (1) непериодические решения при каких-либо значениях параметров c_1 , c_2 и l . В работах [8, 9] приведены результаты расчетов, позволяющие предположить, что такие решения существуют (недостатки методики расчетов не позволяют утверждать это определенно). Такое поведение существенно связано с пространственной неоднородностью решений, с диффузией. Поэтому в работе [8] оно было названо диффузионным хаосом. Если хаотические решения существуют, то важно выяснить, как они возникают и каковы их свойства.

В работе [8] профессор Курамото сформулировал также следующий вопрос: можно ли связать диффузионный хаос с наличием странного аттрактора в некоторой упрощенной конечномерной модели. В качестве такой модели мы рассмотрим двухмодовую систему, предложенную для анализа решений задачи (1) в малых областях [11]. Ее можно получить из системы (1), пользуясь методом Га-

леркина:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2\sin\theta), \\ (2) \quad \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} &= c_2(2\xi - \eta/2) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2\cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1k^2; \end{aligned}$$

$k = \pi/l$, ξ и η характеризуют квадраты амплитуд нулевой и первой фурье-гармоники решения, θ — сдвиг фаз между ними. Далее будем считать, что $k = 1$.

3. Обратимся к системе уравнений (2). Простейшие решения, которые определяют ее асимптотику при $t \rightarrow \infty$, — устойчивые особые точки ($\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$) и устойчивые предельные циклы ($\xi(t + T) = \xi(t)$, $\eta(t + T) = \eta(t)$). Циклы удобно различать по числу оборотов n , которые проекция фазовой траектории делает на плоскости $\{\xi, \eta\}$ за один период. Обычно n совпадает с числом локальных максимумов функций ξ и η за период. Для таких циклов будем пользоваться обозначением S^n .

Расчеты показывают, что переход к сложным решениям происходит по-разному в трех областях параметров [11–13]. Их положение на плоскости $\{c_1, c_2\}$ приблизительно соответствует рис. 1. (На этом рисунке представлены результаты расчетов для задачи в частных производных, однако расположение областей I, II, III в обеих задачах оказалось примерно одинаковым.)

В области I при уменьшении параметра c_2 особая точка теряет устойчивость, появляется устойчивый цикл S^1 . Далее происходит усложнение решений в результате последовательности бифуркаций удвоения периода $S^n \rightarrow S^{2n}$ [11]. Затем в пределах точности расчетов решение становится непериодическим. Используемая методика позволяет проследить первые пять удвоений. Если уменьшать c_2 дальше, происходит обратная последовательность бифуркаций $S^{2^n} \rightarrow S^1$ и возникают непериодические решения S^1 .

Область параметров II отличается от области I тем, как ведут себя решения системы уравнений (2) в окрестности кривой QNP. Если зафиксировать начальные данные с $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ и уменьшать c_2 , то в этой области параметров на линии QNP скачком происходит переход к непериодическим режимам. Здесь наблюдается явление гистерезиса.

В области III переход к хаосу также связан с бифуркациями удвоения. Однако здесь появляются более сложные циклы, у которых число максимумов ξ и η не совпадает с числом оборотов цикла n . В некоторых случаях в системе (2) одновременно существуют несколько аттракторов.

Для анализа сложных решений воспользуемся приемом, предложенным Э. Лоренцем [6]. Пусть последовательные локальные максимумы функции $\xi^{1/2}$ равны $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. Построим график $M_{n+1} = f(M_n)$. Расчеты показывают, что в изучаемой задаче точки с координатами $\{M_n, M_{n+1}\}$, $n \geq 10$, лежат вблизи некоторой кривой, которая во многих случаях является непрерывной и однозначной. Функция f позволяет предсказывать количественные характеристики решений (период и т.д.), но дает качественную информацию об их типе и о бифуркациях, происходящих при изменении параметров [5]. Циклом S^m соответствует m различных точек на плоскости $\{M_n, M_{n+1}\}$, непериодическим решениям — бесконечная последовательность точек на этой плоскости.

Считая функцию f непрерывной и однозначной, можно использовать для анализа непериодических решений целый ряд результатов теории одномерных отображений [5]. В частности, теорему Ли-Йорке, которая утверждает следующее. Если F — непрерывное отображение отрезка в себя и существуют точки a, b, c, d такие, что $b = F(a)$, $c = F(b)$, $d = F(c)$ и $d \leq a < b < c$, то у F одновременно су-

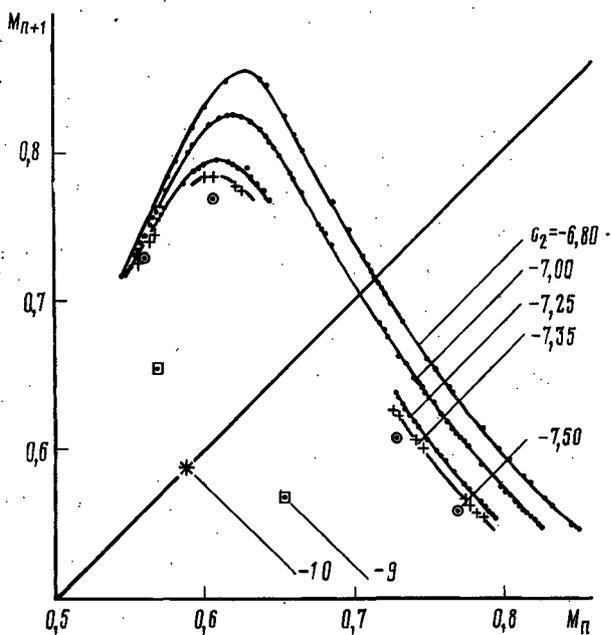
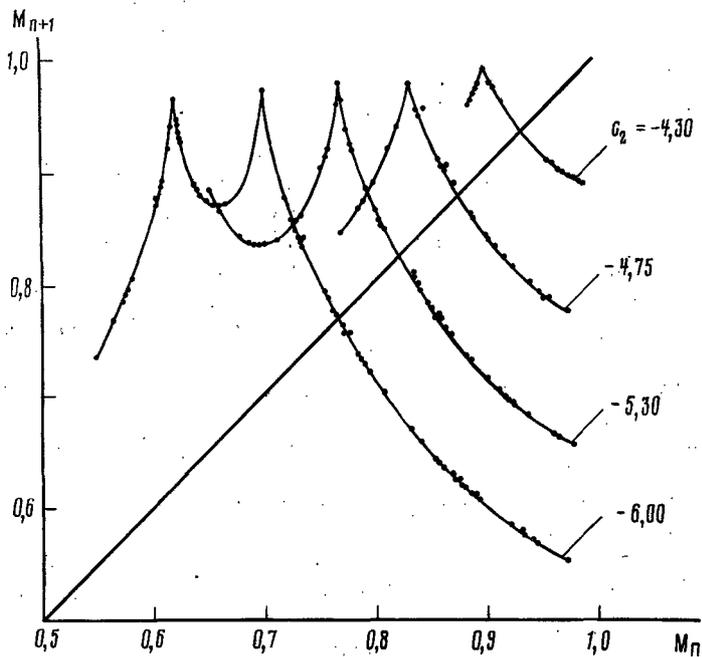


Рис. 3. Изменение одномерных отображений $M_{n+1} = f(M_n)$ в зависимости от параметра c_2 . Задача в частных производных решалась при $c_1 = 5$, $l = \pi$

ществуют циклы любого периода и несчетное множество непериодических траекторий.

Отметим, что особенности решений в области параметров III приводят к тому, что $f(M)$ становится неоднозначной и может иметь разрывы. Поэтому она существенно отличается от отображений, детально изученных ранее [4, 5]. В областях I и II функция f качественно одинакова при разных значениях параметров c_1, c_2 . Она имеет один острый максимум и аналогична той, которая получена в системе Лоренца.

З а м е ч а н и е. В этой работе мы называем решение непериодическим, если в соответствующей ему последовательности $\{M_n\}$ не наблюдается периодичности до $n \approx 300-400$. Две последовательности максимумов $\{M'_n\}$ и $\{M''_n\}$ считаются совпадающими, если $\max_n |M'_n - M''_n| < \epsilon = 10^{-3}$. Расчеты позволяют выяснить, насколько часто максимумы функции $\xi^{1/2}(t)$ принимают различные значения, и построить аналог функций распределения $N(M)$. При достаточно большом количестве максимумов эта функция устанавливается и оказывается одной и той же для различных начальных данных. Соответствующий пример показан на рис. 2.

4. Решения задачи в частных производных удобно характеризовать их коэффициентами Фурье

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) + ib_n(t)) \cos(\pi n x / l)$$

и величинами $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$. Задача (1) решалась для случая $l = \pi$, что соответствует $k = 1$ в упрощенной модели. Обычно при этом $\rho_n(t)$, $n \geq 2$, гораздо меньше, чем $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$. Эти функции нужно сравнивать с решениями $\xi^{1/2}(t)$ и $\eta^{1/2}(t)$ системы (2). Особым точкам системы уравнений (2) естественно сопоставить такие решения задачи (1), у которых $\rho_m = \text{const}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, циклам S^n — решения, у которых $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ периодичны и определяют цикл S^n .

Расчеты показали, что свойства упрощенной модели (2) тесно связаны с поведением решений задачи в частных производных [12]. В случае наиболее простых решений при $l = \pi$ имеет место не только качественное, но и хорошее количественное их соответствие.

Результаты численного решения задачи (1) представлены на рис. 1. Здесь также происходит переход к хаосу, хотя границы соответствующих областей несколько смещены по сравнению с теми, которые были в упрощенной модели (2). В области параметров II переход к непериодическим режимам также происходит скачком. В области I и III он связан с последовательностью бифуркаций удвоения периода. Например, на линии $c_1 = 5$ наблюдаются следующие решения: при $c_2 = -10$ цикл S^1 , при $c_2 = -9$ цикл S^2 , при $c_2 = -7,6$ цикл S^4 , при $c_2 = -7,4$ цикл S^8 , при $c_2 = -7,35$ цикл S^{16} .

Непериодическим решениям задачи в частных производных, как правило, можно сопоставить одномерные отображения $M_{n+1} = f(M_n)$, где M_n — n -й локальный максимум функции $\rho_0(t)$. Оказалось, что во многих случаях для их анализа можно использовать теорему Ли-Йорке: точки a, b, c, d , удовлетворяющие ее условиям, можно найти для отображения $f^2(M) = f(f(M))$. Этот факт, так же как непосредственные численные расчеты, говорит о том, что в системе наблюдается диффузионный хаос. В работе использовалась чисто неявная разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий [14], шаг по пространству $h = \pi/30$, по времени $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$. Методические вопросы, связанные с применением такого алгоритма, подробно рассмотрены в работе [12].

Расчеты показывают, что непериодические решения в системе (2) и в задаче (1) наблюдаются при близких значениях параметров, возникают в результате

одних и тех же бифуркаций. В некоторых случаях они порождают качественно одинаковые одномерные отображения (при $c_2 = -4,3$, $c_2 = -4,75$, см. рис. 3). Все это позволяет ответить на вопрос, сформулированный в начале работы: диффузионный хаос, наблюдаемый в уравнении (1) при $l = \pi$, обусловлен существованием странного аттрактора в системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений (2).

5. Остановимся на качественных отличиях сложных решений задачи (1) и системы (2). Зафиксируем значение $c_1 = 5$ и будем уменьшать c_2 . Рис. 3 показывает, что, начиная с некоторого значения c_2 , функция $f(M)$, соответствующая задаче в частных производных, качественно перестраивается. У нее появляется минимум ($c_2 = -5,3$), затем второй максимум ($c_2 = -6,0$), после чего она теряет однозначность. Ее дальнейшая эволюция также представлена на рис. 3 (нижняя часть). Начиная с $c_2 = -6,8$ кривая $f(M)$ непрерывна, однозначна и имеет один гладкий максимум. При уменьшении параметра c_2 эта кривая меняется простым и регулярным образом. Ее можно приблизить с высокой точностью несложным полиномом и получить для этого диапазона параметров зависимость $f(M, c_2)$. Анализ такой зависимости помог бы выяснить поведение системы после перехода к хаосу при изменении параметра c_2 . Численный анализ отображения $M_{n+1} = f(M_n, c_2)$ также гораздо проще, чем проведение расчетов для задачи в частных производных.

Непериодические решения в области параметров III обычно сложнее, чем в областях I и II. Соответствующее им одномерное отображение существенно отличается от функции $f(M)$ в упрощенной модели, которая имеет длинный плоский участок, где f' близка к нулю [13]. При уменьшении параметра c_2 в задаче (1) $f(M)$ теряет однозначность. При некоторых значениях параметров точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ заполняют целые области на плоскости. Исследование таких решений требует анализа отображений более высокой размерности.

В последние годы широко исследуются странные аттракторы в системах нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений. Настоящая работа показывает, что непериодические режимы во многих случаях могут определять асимптотику задачи в частных производных. По-видимому, такое поведение является достаточно распространенным, поскольку уравнение (1) описывает многие диссипативные системы в окрестности точки бифуркации. Большой интерес представляет дальнейшее теоретическое и в особенности экспериментальное изучение диффузионного хаоса в открытых нелинейных системах различной природы.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
27 IV 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
3. Курдюмов С.П. В сб.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217–243.
4. Feigenbaum M. — Los Alamos Sci., 1980, vol. 1, p. 4–27.
5. Collet P., Eckman J.P. Iterated maps on the interval as dynamical systems. Boston; Basel; Stuttgart; Birkhauser, 1980. 248 p.
6. Странные аттракторы. Сборник. М.: Мир, 1981. 256 с.
7. Kuramoto Y., Tsuzuki T. — Progr. Theor. Phys., 1975, vol. 54, № 3, p. 687–699.
8. Kuramoto Y. — Suppl. Progr. Theor. Phys., 1978, № 64, p. 346–366.
9. Kuramoto Y., Yamada T. — Progr. Theor. Phys., 1976, vol. 56, № 2, p. 679–681.
10. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. В сб.: Нелинейные волны. Горький, 1979, с. 68–104.
11. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Препринт ИПМ, 1983, № 29. 28 с.
12. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Там же, 1983, № 118. 28 с.
13. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Там же, 1983, № 140. 28 с.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.