

Член-корреспондент АН СССР Ф.В. БУНКИН, В.А. ГАЛАКТИОНОВ,
Н.А. КИРИЧЕНКО, С.П. КУРДЮМОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАЗЕРНОЙ ТЕРМОХИМИИ

Как известно [1], специфика теплового действия лазерного излучения на химически активные среды обусловлена изменением характера обратных связей между "тепловой" и "химическими" степенями свободы системы (эти связи возникают из-за сильной температурной зависимости скорости реакций). На динамику термохимических процессов большое влияние оказывают эффекты теплопроводности [1-3], приводя, например, к появлению нескольких стационарных состояний, эффектов локализации и сложных автоволновых изменений температурного поля. Решение большинства соответствующих задач наталкивается на значительные трудности. В связи с этим представляется необходимым исследовать типичные свойства решений тех уравнений, которые описывают подобные процессы, и на этой основе выработать эффективные приближенные методы нахождения самих решений.

В настоящей работе рассмотрена задача поверхностного нагрева металлического образца, занимающего полупространство $z \geq 0$, пучком лазерного излучения с интенсивностью $I(r) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2)$, $I_0 = \text{const} > 0$, $r_0 = \text{const} > 0$ [1, 2]:

$$(1) \quad T_t = \Delta T \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad r \geq 0, \quad z > 0,$$

$$(2) \quad -T_z|_{z=0} = I(r) + \exp(-1/T)|_{z=0}, \quad t > 0, \quad r \geq 0,$$

$$(3) \quad T(0, r, z) = T_0(r, z) \geq 0, \quad r \geq 0, \quad z > 0; \quad T_0 \in C(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3).$$

Первое слагаемое в граничном условии (2) описывает поглощение излучения, а второе — тепловыделение в ходе реакции (окисление).

1. Стационарные состояния. Для исследования краевой задачи (1)–(3) прежде всего необходимо установить наличие (и число) стационарных решений, т.е. решений краевой задачи

$$(4) \quad \Delta u = 0, \quad x \in \Omega = \{r \geq 0, z > 0\},$$

$$(5) \quad -u_z|_{z=0} = I(r) + \exp(-1/u)|_{z=0}, \quad r \geq 0;$$

$$u(r, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +\infty.$$

Задача (4), (5) эквивалентна интегральному уравнению

$$(6) \quad u = P(u) \equiv SI + S \exp(-1/u(r, 0)),$$

где S обозначен интегральный оператор

$$(Su(r))(r, z) = \int_0^{+\infty} v(\xi) \xi d\xi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \theta}}.$$

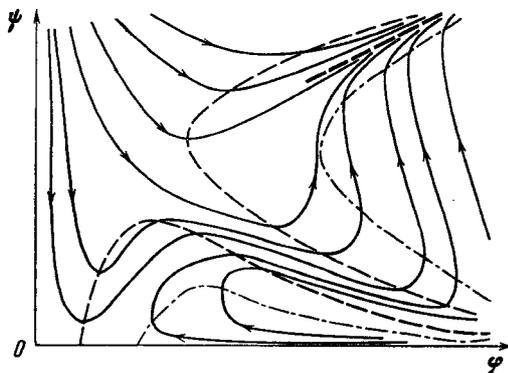
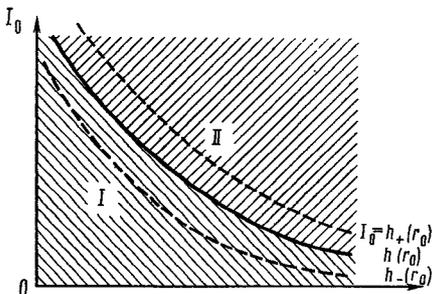


Рис. 1. Схематическое разделение плоскости параметров (I_0, r_0) на области существования (I) и несуществования стационарного решения (II)

Рис. 2. Фазовая плоскость в отсутствие стационарных состояний

На основании этого определения можно получить следующие важные для дальнейшего оценки:

для любых $\delta > 0$

$$(7) \quad \frac{a\delta^2}{\delta + \|x\|} < S \exp\left(-\frac{r^2}{\delta^2}\right) < \frac{A\delta^2}{\delta + \|x\|},$$

$$(8) \quad \frac{b\delta^2}{\delta + \|x\|} < S \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right) < \frac{B\delta^2}{\delta + \|x\|},$$

где A, a, B, b — положительные, не зависящие от δ постоянные.

Введем банахово пространство X непрерывных функций φ , определенных в $\bar{\Omega}$, с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{(r,z) \in \Omega} \{|\varphi(r,z)| (r_0 + \sqrt{r^2 + z^2})\}.$$

Всякое множество $Y_\delta \subset X$ вида

$$Y_\delta = \{\varphi \in X \mid \varphi \geq 0, \|\varphi\| \leq \delta\}, \quad \delta = \text{const} > 0,$$

является замкнутым и выпуклым.

С помощью оценок (7), (8) сверху на основе теоремы Шаудера о неподвижной точке [4] доказывается следующая

Т е о р е м а 1 (существования). Пусть существует такая постоянная $\delta > 0$, что

$$(9) \quad AI_0 r_0^2 + B\delta^2 \exp(-r_0/\delta) \max\{1, r_0/\delta\} \leq \delta.$$

Тогда стационарная задача (4), (5) имеет в Y_δ по крайней мере одно решение.

Отсюда вытекает, что существует функция $h_-(s) > 0, s > 0$, такая, что при любых $I_0 < h_-(s)$ задача (4), (5) имеет по крайней мере одно решение.

Для определения условий неразрешимости стационарной задачи составляется рекуррентная последовательность (см. (6)):

$$(10) \quad v_{k+1}(r) = P(v_k(r))(r, 0), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad v_0(r) = (SI)(r).$$

В силу монотонности функции $\exp(-1/u)$ всякое решение задачи (4), (5) удовлетворяет неравенству

$$(11) \quad u(r, 0) > v_k(r), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad r \geq 0.$$

Тогда, если последовательность $v_k(0) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, то задача (4), (5) будет неразрешимой. Условия этого могут быть получены с помощью оценок (7), (8) снизу:

Теорема 2 (несуществования). Пусть

$$q = baI_0 r_0^2 \exp(-1/aI_0 r_0) > 1,$$

$$baI_0 r_0^2 \exp(-1/q) \geq 1.$$

Тогда задача (4), (5) неразрешима.

С л е д с т в и е. Существует такая функция $h_+(s) > 0$, что при любых $I_0 > h_+(r_0)$ задача (4), (5) не имеет решений.

Можно показать, что для (4), (5) (в неограниченной области) справедлив принцип верхних и нижних решений эллиптических задач (см. [5, 6]). Это позволяет с помощью предыдущих теорем доказать основное утверждение данного раздела.

Теорема 3. Существует (однозначная) невозрастающая функция $h(s)$, $h_-(s) \leq h(s) \leq h_+(s)$, такая, что при всех $I_0 < h(r_0)$ задача (4), (5) имеет по крайней мере одно решение, а при любых $I_0 > h(r_0)$ она неразрешима (при этом $h(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$ и $h(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow 0$).

Таким образом, вся область значений параметров (I_0, r_0) разбивается кривой $I_0 = h(r_0)$ на две части — существования и несуществования стационарного решения (см. рис. 1). Оценки функций $h_{\pm}(s)$ позволяют найти асимптотики $h(s)$:

$$(12) \quad \text{при } r_0 \rightarrow +\infty \quad h(r_0) \sim (r_0 \ln r_0)^{-1},$$

$$\text{при } r_0 \rightarrow 0 \quad h(r_0) \sim r_0^{-(1+\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha(r_0) \leq 1.$$

2. Нестационарные состояния. Вернемся теперь к исследованию исходной краевой задачи (1)–(3). Будем сначала считать, что $T_0(r, z) \equiv 0$. Сформулируем вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1. Решение краевой задачи (1)–(3) является критическим (в смысле [7, 8]), т.е.

$$T_t(t, r, z) > 0 \quad \text{при } t > 0, \quad (r, z) \in \Omega.$$

При доказательстве леммы используется подход, предложенный в [6]. Из принципа максимума вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 2. Пусть $I_0 < h(r_0)$ и $u(r, z)$ — стационарное решение задачи (4), (5). Тогда всюду в Ω

$$T(t, r, z) \leq u(r, z), \quad t > 0.$$

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 4 (о стабилизации). Пусть $I_0 < h(r_0)$. Тогда в множестве стационарных решений задачи (4), (5) существует минимальное (всюду в Ω) решение $u_{\min}(r, z)$ такое, что стабилизация $T(t, r, z) \rightarrow u_{\min}(r, z)$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерна на каждом компакте из Ω .

Сформулированная теорема доказывается путем поэтапного перехода к пределу в интегральном уравнении, эквивалентном задаче (1)–(3). Таким образом, при $I_0 < h(r_0)$ всегда существует (минимальное) стационарное решение, устойчивое снизу. При этом с помощью построения подходящего верхнего решения можно показать, что скорость стабилизации $T \rightarrow u_{\min}$ (при $t \rightarrow +\infty$) не превосходит $O(t^{-3/2})$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что при $I_0 > h(r_0)$, когда задача (4), (5) неразрешима, $T(t, r, z) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ всюду в Ω со скоростью, не превосходящей $O(t^{1/2})$. Ширина образующейся при этом тепловой структуры не меньше, чем $O(t^{1/2})$.

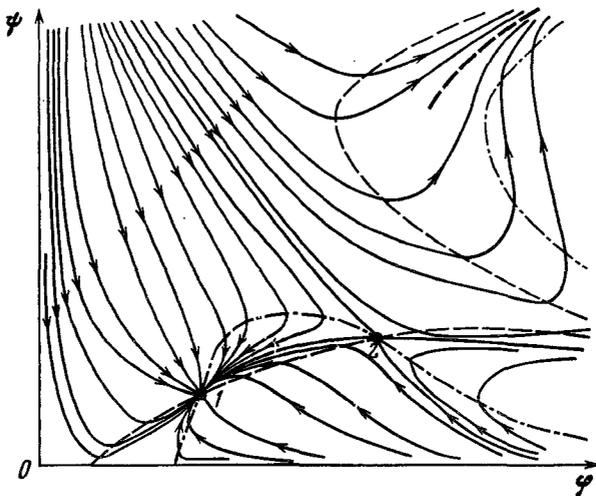


Рис. 3. Фазовая плоскость в случае двух стационарных состояний: 1 – устойчивое, 2 – неустойчивое

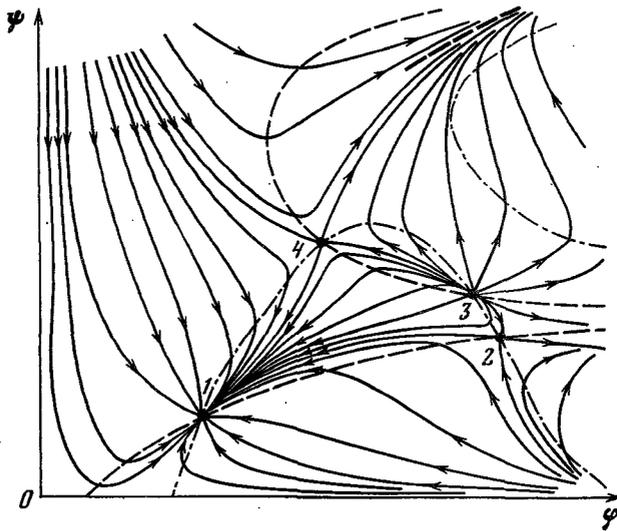


Рис. 4. Фазовая плоскость в случае четырех стационарных состояний: 1 – устойчивое, 2, 3, 4 – неустойчивые

3. Устойчивость стационарных состояний. В этом разделе приведены результаты применения теории нестационарного осреднения (предложенной в [9, 10]) к краевой задаче (1)–(3). Следуя [9, 10], выберем два интегральных "закона сохранения", которым удовлетворяет решение задачи (1)–(3):

$$(13) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T \right) dx = 0, \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T \right) r dx = 0, \quad t > 0,$$

и потребуем, чтобы "приближенное" решение вида

$$(14) \quad T_m(t, r, z) = \psi(t) \sigma(\xi, \eta), \quad \xi = \frac{r}{\varphi(t)}, \quad \eta = \frac{z}{\varphi(t)}$$

удовлетворяло этим же условиям. Функции $\psi(t)$, $\varphi(t) > 0$ в (14) описывают эволюцию со временем амплитуды и полуширины формирующейся тепловой структуры, а $\sigma(\xi, \eta) \geq 0$ — специальным образом подобранная функция. Подстановка (14) в (13) (с учетом краевых условий) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $\psi(t)$ и $\varphi(t)$:

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\psi\varphi^3) &= M_1 + \mu_1\varphi^2 \exp(-1/\psi) - \delta\psi\varphi, \\ \frac{d}{dt} (\psi\varphi^4) &= M_2 + \mu_2\varphi^3 \exp(-1/\psi) - \kappa\psi\varphi^2. \end{aligned}$$

Здесь $M_1 \sim I_0 r_0^2$, $M_2 \sim I_0 r_0^3$, а положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \delta, \kappa$ зависят только от нескольких интегральных характеристик функции σ . От системы (15) перейдем к одному уравнению

$$(16) \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\psi}{\varphi} \frac{4M_1\varphi - 3M_2 + \gamma_1\varphi^3 \exp(-1/\psi) - \alpha_1\psi\varphi^2}{M_2 - M_1\varphi - \gamma_2\varphi^3 \exp(-1/\psi) + \alpha_2\psi\varphi^2}$$

($\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ — положительные постоянные). Исследуем фазовый портрет этого уравнения. Анализ (16) показывает, что в зависимости от значений I_0, r_0 существуют либо два, либо четыре стационарных состояния, либо — в закритической области $I_0 > h(r_0)$ — ни одного (ср. [2]). Поведение траекторий вблизи особых точек позволяет судить об их устойчивости.

На рис. 2, 3, 4 приведен качественный вид фазового портрета уравнения (16) для трех случаев: нет ни одного стационарного состояния и существуют два и четыре стационара соответственно. Штриховыми линиями обозначены изоклины нуля, штрих-пунктирными — изоклины бесконечности, жирной штриховой линией — сепаратриса, к которой сходятся все траектории при $\psi, \varphi \rightarrow +\infty$ (режим неограниченного распространения тепловой волны, когда $\psi, \varphi \sim t^{1/2}$ при $t \rightarrow +\infty$).

Из рис. 3, 4 видно, что в обоих случаях устойчивым является одно и то же "минимальное" стационарное состояние (напомним, что в п. 2 доказана его устойчивость снизу).

В заключение отметим, что в данной работе исследование проведено для гауссовского распределения интенсивности $I(r)$ излучения по поверхности вещества. Однако ряд важных результатов (существование "границы устойчивости", устойчивость "минимального" стационарного состояния) можно получить и для произвольного распределения $I(r)$, удовлетворяющего довольно слабым условиям интегрируемости.

Институт общей физики
Академии наук СССР, Москва
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
5 XII 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. — УФН, 1982, т. 138, с. 45.
2. Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. — Кван, электр., 1982, т. 9, с. 1959.
3. Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Курдюмов С.П. и др. Препринт № 81, ИПМ АН СССР, 1983.
4. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968.
5. Sattinger D.H. — Indiana Univ. Math. J., 1972, vol. 21, p.979.
6. Sattinger D.H. Topics in stability and bifurcation theory. Lecture Notes in Math. V.: Springer, 1970, vol. 309.
7. Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. — ДАН, 1979, т. 248, с. 586.
8. Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. — ЖВМиМФ, 1979, т. 19, с. 1451.
9. Еленин Г.Г., Плохотников К.Э. Препринт № 91 ИПМ АН СССР, 1977.
10. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — ЖВМиМФ, 1983, т. 23, с. 380.