

Т.С. АХРОМЕЕВА, С.Л. КУРДЮМОВ, Г.Г. МАЛИНЕЦКИЙ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

О КЛАССИФИКАЦИИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

1. В последнее десятилетие для описания многих процессов в физике, химии, биологии успешно используются математические модели следующего вида [1, 2]:

$$(1) \quad \begin{aligned} X_t &= D_1 X_{xx} + Q_1(X, Y, \lambda), \quad D_1 = \text{const} > 0, \quad D_2 = \text{const} > 0, \\ Y_t &= D_2 Y_{xx} + Q_2(X, Y, \lambda), \quad a \leq x \leq b, \\ X(x, 0) &= X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x), \quad X_x(a, t) = X_x(b, t) = Y_x(a, t) = \\ &= Y_x(b, t) = 0, \end{aligned}$$

в которых правые части зависят от параметра λ . Разнообразие таких систем уравнений, широкая область их приложений приводят к постановке двух вопросов. Первый — какими общими свойствами обладают модели вида (1)? Второй — можно ли провести их классификацию? Классификация и выделение характерных черт позволили бы перейти от изучения конкретных систем к построению общей теории. Теория, в свою очередь, могла бы упростить исследование каждой конкретной модели.

Важный шаг в этом направлении был сделан в 1975 г. [6]. В большинстве моделей синергетики изучаемые уравнения всюду имеют однородное по пространству стационарное решение (X_0, Y_0) , устойчивое при $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 — точка бифуркации. Когда λ становится больше λ_0 , это решение теряет устойчивость, в системе возникают стационарные структуры или начинаются колебания [1, 2]. Уравнение, предложенное Курамото и Пузуки [6], описывает поведение систем (1) в окрестности точки λ_0 в обоих случаях. Оно имеет вид

$$(2) \quad \begin{aligned} W_t &= W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad 0 \leq x \leq l, \\ W(x, 0) &= W_0(x), \quad W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $W(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$; u и v — действительные функции, c_1 и c_2 — действительные постоянные, выражающиеся через D_1, D_2 и производные функций $Q_1(X, Y, \lambda), Q_2(X, Y, \lambda)$ в точке (X_0, Y_0, λ_0) . Уравнение (2) выведено с помощью разложения функций $X(x, t), Y(x, t)$ и дифференциальных операторов в уравнении (1) по степеням малого параметра $\epsilon \sim (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$. В нем учтены члены до третьего порядка. Зная решение задачи (2), можно определить, как меняются функции X и Y в окрестности точки бифуркации.

Изучение уравнения (2) оказывается тесно связанным с задачей классификации двухкомпонентных систем. Пусть у нас есть информация о поведении его решений во всей области параметров c_1, c_2, l (наибольший интерес представляет асимптотика при $t \rightarrow \infty$). Тогда можно объединить в один класс все системы (1), для которых решения уравнения (2) ведут себя сходным образом. Это и будет означать их классификацию.

Путь к получению такой информации — построение и исследование упрощенных моделей для уравнения (2). В данной работе изучена одна из таких моде-

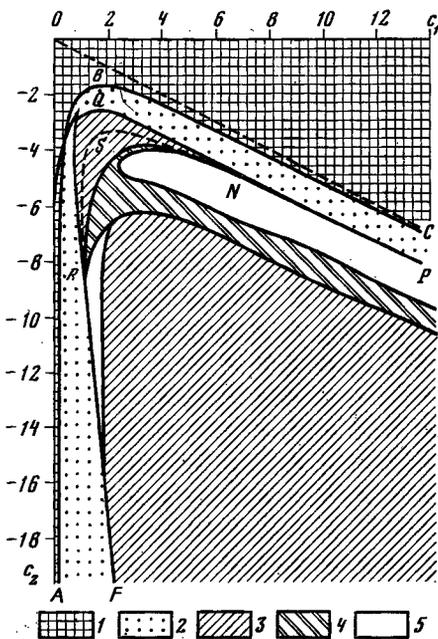


Рис. 1. Типы аттракторов для системы уравнений (3) при $k = 1$. 1 – точка $\xi = 1, \eta = 0$; 2 – особая точка с $\xi \neq 1, \eta \neq 0$; 3 – простой цикл; 4 – цикл S_m^2 ; 5 – более сложные решения. На штриховой линии происходит переход $S_0^1 \rightarrow S_1^1$, QNP – линия бифуркации Хопфа. Картина получена в результате численного решения уравнений (3). Шаг по параметру c_1 $h_1 = 1,0$, по параметру c_2 $h_2 = 0,5$. В окрестности граници между областями шаг уменьшался до 0,1. Ниже линии ABC начальными данными для задачи с параметрами $\{c_1, c_2 - h_2\}$ служила точка, принадлежащая аттрактору системы (3) для значений $\{c_1, c_2\}$. Расчеты начинались при $c_2 = 0$

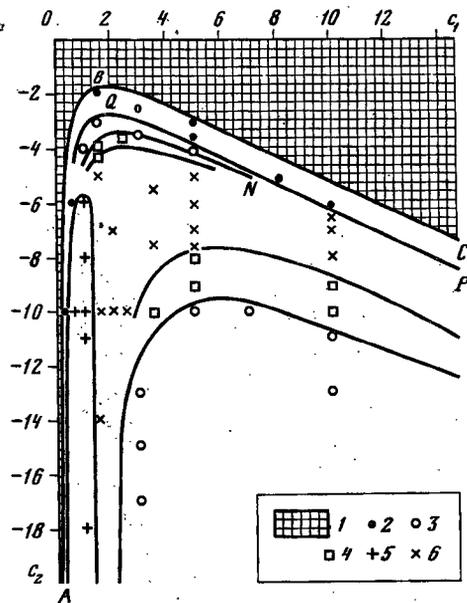


Рис. 2. Типы предельных решений (при $t \rightarrow \infty$) уравнения (2) в области $l = \pi$. 1 – устойчиво пространственно-однородное решение; 2 – решение, у которого величины ρ_k не зависят от времени; 3 – периодическое решение, у которого $\rho_0^2(t)$ и $\rho_1^2(t)$ определяют простой цикл; 4 – $\rho_0^2(t)$ и $\rho_1^2(t)$ определяют двойной цикл; 5 – четное решение; 6 – более сложные режимы. Сплошные линии приблизительно указывают положение граници, на которых решение меняют свой тип. Тип решения не меняется при одновременном изменении знаков параметров c_1 и c_2

лей и проведено сравнение ее решений с решениями задачи (2). Это позволило провести классификацию двухкомпонентных систем при произвольных значениях c_1 и c_2 при $l = \pi$.

2. Для построения упрощенной модели предположим, что решения задачи (2) содержат только две гармоники, т.е. имеют вид $u = a_0 + a_1 \cos kx, v = b_0 + b_1 \cos kx, k = \pi/l$. С помощью метода Галеркина можно получить уравнения, связывающие квадраты амплитуд нулевой и первой гармоник $\xi(t), \eta(t)$ и сдвиг фаз между ними $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= 2\xi(1 - \xi - \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2 \sin\theta), \\
 \dot{\eta} &= 2\eta(1 - k^2 - 2\xi - 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta), \\
 \dot{\theta} &= c_2(2\xi - \eta/2) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Переход от переменных a_0, b_0, a_1, b_1 к переменным ξ, η, θ определяется формулами

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \sqrt{\xi} \cos \varphi_0, & b_0 &= \sqrt{\xi} \sin \varphi_0, & a_1 &= \sqrt{\eta} \cos \varphi_1, & b_1 &= \sqrt{\eta} \sin \varphi_1, \\
 \varphi_0 - \varphi_1 &= \theta/2, & \varphi_0 &= -c_2(\xi + \eta) + 0,5\eta(\sin\theta - c_2 \cos\theta).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Идея использования нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений для анализа распределенных систем появилась одновременно с созданием основ теории колебаний [4]. Однако ее реализация потребовала широкого использования вычислительного эксперимента [12].

Модель (3) применима в случае небольших областей, когда наибольшую амплитуду имеют нулевая и первая гармоники [8]. Основные особенности решений системы (3) рассмотрим для конкретного значения параметра $l = \pi$ ($k = 1$).

Проведенный анализ позволил получить разбиение плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ на области, в которых аттракторы имеют один и тот же тип. Рис. 1 дает классификацию решений для $k = 1$ по их поведению при $t \rightarrow \infty$. Прокомментируем его.

Выше линии ABC расположена область, в которой особая точка $\xi = 1, \eta = 0$ устойчива, она и определяет асимптотику решений. Уравнение для кривой ABC следует из линейного анализа устойчивости этой точки [8]:

$$(5) \quad (c_1^2 + 1)k^4 + 2k^2(1 + c_1c_2) = 0.$$

Ниже линии ABC асимптотику решений определяет устойчивая особая точка $c\xi \neq 1, \eta \neq 0$. Параметры всех особых точек определяются некоторым алгебраическим уравнением четвертой степени. Для границы области, где они существуют, можно получить аналитические соотношения [9]. Важно отметить, что на участке RF этой границы особые точки появляются не в результате ветвления от имевшихся ранее решений. Это необычно для задач синергетики [1, 2].

На линии QNP происходит бифуркация рождения предельного цикла или бифуркация Хопфа. При этом на участке QN появляется устойчивый предельный цикл. Циклы в системе (3) удобно различать по числу оборотов n , которые делает проекция точки $\{\xi, \eta, \theta\}$ на плоскость $\{\xi, \eta\}$, и по числу m , которое характеризует изменение фазы за один период:

$$(6) \quad \theta(t + T) - \theta(t) = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Циклы, которые характеризуются числами n и m , будем обозначать S_m^n . Циклы S_m^1 будем называть простыми.

Проследим, как меняются решения при уменьшении параметра c_2 , например, вдоль прямой $c_1 = 5$. В результате бифуркации Хопфа рождается цикл S_0^1 . На линии RSN происходит переход $S_0^1 \rightarrow S_1^1$, причем при приближении к этой кривой период цикла неограниченно возрастает. Важно подчеркнуть, что даже простому решению системы (3) соответствует сложный колебательный режим в исходной задаче, при котором коэффициенты Фурье, а значит, и сами решения могут не являться периодическими функциями времени (это следует из формул (4)).

Далее в проведенных расчетах наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода [11] $S_m^n \rightarrow S_{2m}^{2n}$ и переход к непериодическим режимам. Пример одного из них подробно рассмотрен в работе [9]. При дальнейшем уменьшении c_2 происходит упрощение решений в результате бифуркаций $S_{2m}^{2n} \rightarrow S_m^n$ и возникает цикл S_1^1 . При $c_2 \rightarrow -\infty$ асимптотику вновь определяет устойчивая особая точка.

Отметим, что в плоскости $\{c_1, c_2\}$ существуют области, где одновременно есть аттракторы нескольких типов. Это не отражено на рис. 1. Анализ такой ситуации требует отдельного исследования. Тем не менее, полученная картина является достаточно простой. В большей части плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ асимптотика определяется особыми точками и простыми предельными циклами, границы этих областей задаются сравнительно простыми соотношениями. Встает вопрос, есть ли аналогичные закономерности в исходной задаче.

3. Посмотрим вначале, какие решения задачи (2) соответствуют различным аттракторам системы (3). Особой точке $\xi = 1, \eta = 0$ можно сопоставить простран-

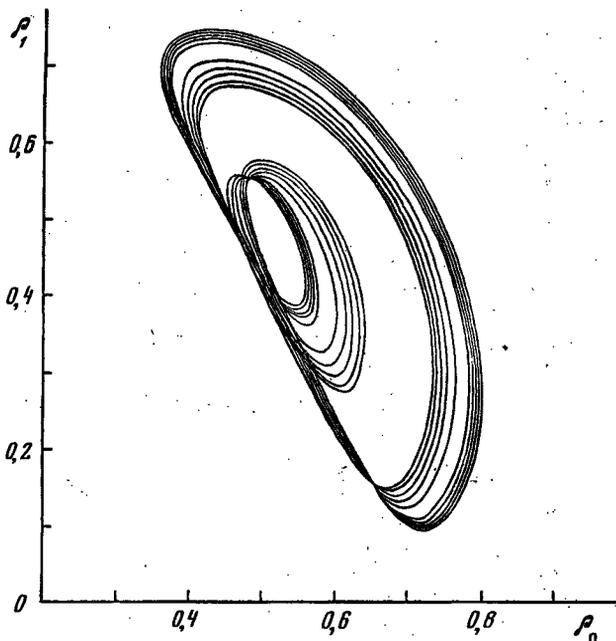


Рис. 3. Сложный цикл типа S^{20} , определяющий асимптотику решений задачи (2) при $c_1 = 5,0$, $c_2 = -7,3$, $l = \pi$. Период цикла $T = 24,1$. Шаг по времени $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$, по пространству $h = \pi/30$

венно-однородное решение $W = e^{-ic_2 t}$ (это решение также теряет устойчивость на линии ABC). Другим особым точкам $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ соответствуют решения, у которых $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2 = \text{const}$, где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ по системе $\{\cos(\pi k x/l)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Можно показать, что автомодельные решения задачи (2) вида

$$(7) \quad W(x, t) = R(x) \exp[i\omega t + i a(x)]$$

обладают этим свойством. С другой стороны, из постоянства амплитуд гармоник и сдвига фаз между ними следует, что решение будет автомодельным. Предельным циклам S_m^n естественно сопоставить решения, у которых функции $\rho_0^2(t)$ и $\rho_1^2(t)$ при $t \rightarrow \infty$ также определяют цикл S_m^n .

На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (2) для начальных данных вида

$$W_0(x) = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + i(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x).$$

В той области, где аттрактор системы (3) — особая точка, в задаче (2) реализуется автомодельное решение (7), параметры которого с точностью в несколько процентов могут быть предсказаны на основе упрощенной модели (3). В той области параметров, где аттрактор приближенной системы (3) является простым предельным циклом, эта система позволяет предсказывать период решений задачи в частных производных. Это дает возможность найти аналоги ряда эффектов, исследованных вначале для упрощенной системы. [10].

Расчеты показывают, что решение уравнения (2) может быть сложным предельным циклом или иметь неперIODический характер. Пример цикла типа S^{20} , который определяет асимптотику задачи (2), приведен на рис. 3. Без анализа модели (3) и выбора переменных $\rho_n(t)$ поиск решений, определяющих сложную про-

странственно-временную упорядоченность, был бы очень трудной задачей. Изучение неперiodических решений уравнения (2) представляет особый интерес и требует отдельного исследования.

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что разбиение плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ качественно одинаково для обеих систем (некоторые линии бифуркаций смещены). Исключением является область четных автомодельных решений $c_1 \lesssim 1$ и асимптотическая область $c_2 \rightarrow -\infty$. В первой области выход на четные автомодельные решения происходит с начальных данных общего вида. Физически это означает распад нелинейной системы на две одинаковые невзаимодействующие подсистемы. Параметры четных решений также могут быть предсказаны с помощью уравнений (3), если положить в них $k = 2\pi/l$. Граница области, где они устойчивы, может быть определена из упрощенной системы, в которой учтены три гармоники. При $c_2 \rightarrow -\infty$ ни двухмодовая модель, предложенная в работе [14], ни более полная модель (3) не передают поведения решений задачи (2). Проведенные расчеты показали, что здесь существенны по крайней мере четыре моды.

4. Следует отметить, что сопоставление системы (3) и задачи (2) требует анализа ряда методических вопросов. Это особенно важно, поскольку в настоящее время вычислительный эксперимент является практически единственным источником информации о сложных и неперiodических режимах. Другая причина состоит в том, что вблизи линий бифуркаций недостатки алгоритма могут качественно изменить картину процесса. Необходимость методических исследований можно проиллюстрировать следующим примером. В изучаемом уравнении очень существенным оказался порядок аппроксимации краевых условий [10, 13], поскольку характеристики решений во многих случаях сильно зависят от длины области l . Так, период простого цикла, который определяет асимптотику при значениях параметров $l = 7,8$, $c_1 = -8$, $c_2 = 1$ ($\tau = 5 \cdot 10^{-3}$, $h = 0,1$), возрастает более чем в два раза при увеличении l всего на 1,3%.

Сформулируем основной результат проведенного исследования. При небольших значениях l есть очень хорошее (во многих случаях количественное) соответствие между решениями уравнения (2), позволяющего провести классификацию двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации, и его двухмодовой моделью.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Академии наук СССР,
Москва

Поступило
9 I 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах М.: Мир, 1979. 512 с.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
3. Курдюмов С.П. В сб.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217-243.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
5. Странные аттракторы. Сборник. М.: Мир, 1981. 256 с.
6. Kuramoto Y., Tsuzuki T. - Progr. Theor. Phys., 1975, vol. 54, № 3, p. 687-699.
7. Kuramoto Y. - Progr. Theor. Phys., Suppl., 1978, № 64, p. 346-367.
8. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Препринт ИПМ, 1982, № 53. 30 с.
9. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Там же, 1983, № 29. 28 с.
10. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Там же, 1983, № 118. 28 с.
11. Feigenbaum M. Universal behaviour in nonlinear systems. Los Alamos Sci., 1980, vol. 1, № 1, p. 4-27.
12. Самарский А.А. - Вестн. АН СССР, 1979, № 5, с. 38-49.
13. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
14. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. - ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 2 (8), с. 617-629.