тегральный функционал

$$F(S_n) = \int\limits_{\Pi^m} (S_n(t))^{2p}\,dt,$$

где $\Pi^m = [0,\ 1]^m$, $dt = dt_1 dt_2 \ldots dt_m$. В этой конкретной ситуации при всех $x > 0$ справедливо асимптотическое разложение с неравномерной оценкой остаточного члена вида

$$\left| P(F(S_n) < x) - P(F(\tau) < x) - \sum_{j=1}^{s-1} n^{-j} \Phi_j(x) \right| \leqslant C_{12} \exp(-C_{13} x^{1/p}) n^{-s},$$

где $s \geqslant 1$ – любое целое фиксированное число; $C_i > 0$ – постоянные, $\Phi_j(x)$ – определенные функции.

Случай $p = 1$ рассмотрен в [14, 15].

Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности

Поступило 25 X 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 416 с. 2. *Залесский Б.А.* – ДАН, 1982, т. 267, № 2, с. 276–279. 3. *Sazonov V.V., Zalesskii B.A.* On the central limit theorem in Hilbert space. Techn. rep. № 35. Center for stochastic processes, Univ. North Carolina, June, 1983. 32 p. 4. *Bergström Harald.* – Skand. Aktuarietidskr., 1951, p. 1–34. 5. *Залесский Б.А.* – Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, вып. 2, с. 279–285. 6. *Юринский В.В.* – ДАН, 1981, т. 258, № 3, с. 557–558. 7. *Юринский В.В.* – Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, вып. 2, с. 270–278. 8. *Боровских Ю.В.* Препринт Ин-та математики АН УССР 81.46. Киев, 1981. 52 с. 9. *Боровских Ю.В.* – ДАН, 1983, т. 269, № 2, с. 265–269. 10. *Gorze F.* – Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1979, Bd, 50, H. 3, S. 333–355. 11. *Sazonov V.V.* Normal approximation – some recent advances. Lecture notes in mathematics. B.: Springer-Verlag, 1981, vol. 879. 105 p. 12. *Боровских Ю.В.* Препринт Ин-та математики АН УССР 83.42. Киев, 1983. 56 с. 13. *Götze F.* Preprints in Statistics. Univ. Cologne № 76. December, 1982, p. 1–43. 14. *Боровских Ю.В.* – Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 1, с. 3–7. 15. *Боровских Ю.В.* – Там же, № 3, с. 3–7.

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

В.А. ГАЛАКТИОНОВ, С.П. КУРДЮМОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ

О МЕТОДЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В настоящей работе на нескольких примерах конкретных задач для квазилинейных уравнений и систем параболического типа излагается один достаточно общий подход – так называемый метод стационарных состояний исследования существенно нестационарных задач математической физики. Он основан на построении и анализе специального семейства стационарных решений, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению "почти всюду" (поэтому их удобно называть состояниями, подчеркивая, что они не являются стационарными решениями в обычном смысле). Фактически предложенный метод использует тот факт, что в семействе стационарных состояний содержатся в некоторой "параметризованной" форме многие важные эволюционные свойства решений нестационарной задачи. Подчеркнем, что метод применим к задачам с достаточно произвольными нелинейностями, когда никаких подходящих устойчивых автомодельных или в общем случае инвариантных решений задача не допускает. В тех же случаях, когда последние существуют и определяют асимптотическое поведение решений, метод стационарных состояний, как правило, дает те же результаты, которые, тем самым, близки к оптимальным.

1. Общая характеристика метода. Пусть $G \subseteq \mathbf{R}^N$ – произвольная неограниченная область в $\mathbf{R}^N$ с гладкой границей ∂G, $0 \in G$; $\mathbf{A}(u) = \Phi(x, u, \nabla u, \Delta u)$, $x \in G$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ – параболический оператор второго порядка, $\mathbf{B}(u) = \varphi(x, u, \partial u/\partial n)$, $x \in \partial G$ ($\partial/\partial n$ – обозначение производной по направлению внешней нормали к ∂G) – "граничный" оператор первого порядка. Функции Φ, φ считаются достаточно гладкими, $\mathbf{A}(0) = \mathbf{B}(0) = 0$. Рассмотрим эволюционную (параболическую) задачу

$$(1) \qquad u_t = \mathbf{A}(u), \quad t > 0, \quad x \in G; \quad \mathbf{B}(u)|_{\partial G} = 0, \quad t > 0;$$

$$(2) \qquad u(0, x) = u_0(x) = (u_{0_1}(x) \geqslant 0, \ldots, u_{0_k}(x) \geqslant 0), \quad x \in G.$$

Пусть существует единственное достаточно регулярное решение $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $u_i \geqslant 0$ задачи, определенное в G при всех $0 < t < T \leqslant +\infty$, причем оно является существенно нестационарным (неограниченным) в том смысле, что

$$(3) \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant k} u_i(t, 0) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to T^-.$$

В дальнейшем для удобства будем считать, что $x = 0$ при всех $0 < t < T$ является точкой абсолютного максимума по x функции $u(t, x)$.

Основная проблема, которая здесь возникает, состоит в конструктивном описании пространственно-временной структуры нестационарного решения на развитой стадии его эволюции (при временах t, "близких" к T^-). В дальнейшем основное внимание будет уделено проблеме локализации неограниченного решения. В соответствии с [1–3] решение задачи (1), (2) называется локализованым, если оно неограниченно возрастает при $t \to T^-$ в области локализации

$$\Omega_L = \bigcup_{i=1}^{k} \{x \in G \mid u_i(T^-, x) = +\infty\}$$

конечных размеров. Если же хотя бы одно $u_i(t, x) \to +\infty$, $t \to T^-$ всюду в G, то локализация отсутствует. Отметим, что локализация является фундаментальным свойством эволюционных уравнений, существование (или отсутствие) которого никак не связано с видом начального возмущения $u_0(x)$.

Хорошо известно, что наличие у (1) подходящего стационарного решения $u_s(x)$ часто выделяет в пространстве начальных функций множество притяжения $\mathcal{M}$ такое, что включение $u_0 \in \mathcal{M}$ гарантирует стабилизацию $u(t, x) \to u_s(x)$ при $t \to +\infty$. Это в конечном счете обеспечивает близость нестационарного решения к стационарному при всех достаточно больших t. В данном случае в силу предположения (3) указанная ситуация невозможна, тем не менее определенная "близость" $u(t, x)$ теперь уже к семейству стационарных состояний все же имеет место.

Основное предположение, необходимое для строгого обоснования метода, представляет собой принцип максимума в следующей форме: *если $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ – достаточно регулярные неотрицательные функции, удовлетворяющие* (1), *то из условия $u^{(2)}(0, x) \geqslant u^{(1)}(0, x)$ в G следует неравенство $u^{(2)}(t, x) \geqslant u^{(1)}(t, x)$ в G для всех допустимых $t > 0$.* Отметим, что принципу максимума удовлетворяют практически все корректно сформулированные задачи для нелинейных параболических уравнений, а также для широкого класса параболических систем квазилинейных уравнений.

Сформулируем основное утверждение. Пусть существует $\{U_\lambda(x)\}$, $U_\lambda = \{U_\lambda^1, U_\lambda^2, \ldots, U_\lambda^k\}$, $U_\lambda^i \geqslant 0$, – некоторое семейство непрерывных стационарных решений (состояний), удовлетворяющих при каждом значении параметра $\lambda > 0$ ($\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}_+^k$) задаче*

(4) $\quad \mathbf{A}(U_\lambda) = 0$ п.в. в G; $\mathbf{B}(U_\lambda)|_{\partial G} = 0$; $\quad U_\lambda(0) = \lambda$,

причем $\sup\limits_x U_\lambda(x) = U_\lambda(0)$. Все последующие результаты получены на основе следующей общей леммы, доказательство которой целиком основано на принципе максимума.

Лемма. *В сделанных предположениях для любого* $\lambda > u_0(0)$ *найдется такое* $0 < t_\lambda < T$ *и такая непрерывная кривая* $l_\lambda \subset \bar{G}$, *соединяющая точку* $x = 0$ *с некоторой точкой границы* ∂G, *что*

(5) $\quad u(t_\lambda, 0) \doteq \lambda$; $\quad u(t_\lambda, x) \geqslant U_\lambda(x)$, $\quad x \in l_\lambda$.

Знак равенства $\doteq$ означает, что $u_i(t_\lambda, 0) = \lambda_i$ хотя бы при одном $1 \leqslant i \leqslant k$, а неравенство $\geqslant$ в (5) следует понимать в том смысле, что для любого $x \in l_\lambda$ найдется такое $1 \leqslant j \leqslant k$, что $u_j(t_\lambda, x) \geqslant U_\lambda^j(x)$ (для различных $x \in l_\lambda$ значения j также могут быть различными).

Неравенство (5) позволяет оценить снизу пространственный профиль нестационарного решения, при этом вид оценки будет зависеть от параметра $\lambda > 0$, в определенном смысле "равного" амплитуде решения $u(t, 0)$. Более того, как показывают многочисленные оценки, полученные, в частности, с помощью построения приближенных автомодельных решений [2, 4], часто при некоторых ограничениях справедливо более сильное утверждение, а именно: при каждом достаточно большом $\lambda = u(t, 0)$ решение $u(t, x)$ "структурно близко" к $U_\lambda(x)$ в области интенсивного роста решения. Это, например, справедливо для широкого класса квазилинейных уравнений вида $u_t = \nabla(k(u)\nabla u) + Q(u)$, $\nabla(\cdot) = \mathrm{grad}_x(\cdot)$ (см. [5, 6]). Следует отметить, что (4) представляют собой эллиптические задачи, которые подробно изучены. Кроме того, в ряде случаев для применения метода достаточно вывести из (4) лишь более или менее точную оценку стационарного решения. Рассмотрим теперь некоторые примеры использования данного метода.

2. Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения. Пусть (1), (2) – это задача Коши ($G = \mathbf{R}^N$)

(6) $\quad u_t = \nabla[\Psi(|\nabla u|)\nabla u] + Q(u), t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0,$

где $\Psi(s)$, $Q(s)$ – достаточно гладкие функции $\Psi(s) > 0$, $\Psi'(s) > 0$, $Q(s) > 0$ при $s > 0$. Задачу (6) можно рассматривать как одну из простых моделей возникновения в нелинейной среде нестационарных диссипативных структур. Покажем, что в этом случае дает применение метода. Напомним, что по предположению $u(t, x) \leqslant u(t, 0)$ в $\mathbf{R}^N$ при всех $0 \leqslant t < T$. Пусть для простоты $u_0(x)$ радиально-симметрична (тогда этим же свойством обладает решение $u(t, x)$).

Построим семейство радиально-симметричных стационарных решений $\{U_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbf{R}_+^1$, удовлетворяющих всюду, где они положительны, уравнению (в остальных точках полагаем $U_\lambda = 0$)

(7) $$\frac{1}{r^{N-1}}[r^{N-1}\Psi(|U_\lambda'|)U_\lambda']' + Q(U_\lambda) = 0, \quad r = \|x\| > 0; \quad U_\lambda(0) = \lambda.$$

---

* Способы построения семейства $\{U_\lambda(x)\}$ с нужными свойствами указаны в приводимых ниже примерах.

Решение задачи (7) существует, причем

$$(8)\qquad U_\lambda(x) \geqslant \left\{ \lambda - \int_0^r \tilde{\Psi}^{-1}\left[\frac{1}{N}Q(\lambda)\eta\right]d\eta \right\}^+ = U_\lambda^-(x), \quad r \geqslant 0,$$

где $\tilde{\Psi}^{-1}(\xi)$ – функция, обратная $\Psi(\xi)\xi$. Отсюда в силу леммы (см. неравенство (5)) при выполнении легко проверяемого условия $U_\lambda^-(x) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$ всюду в $\mathbf{R}^1_+$ решение (6) не локализовано и $u(t, x) \to +\infty$ при $t \to T^-$ всюду в $\mathbf{R}^N$ (поскольку здесь кривая l_λ произвольна). Это так называемый HS-режим эволюции тепловой структуры. Если же $U_\lambda(x) \to +\infty$, $\lambda \to +\infty$ в ограниченной области из $\mathbf{R}^N$ (S-режим) или даже в одной точке $x = 0$ (LS-режим), то следует ожидать появление локализованных решений. В случае уравнения со степенными нелинейностями $\Psi(|\nabla u|) = |\nabla u|^\sigma$, $Q(u) = u^\beta$ $(\sigma > 0, \beta > 1)$, когда (6) допускает автомодельные решения (см. [7]), приведенный анализ дает верные результаты: $\beta < \sigma + 1$ – HS-режим без локализации, $\beta = \sigma + 1$ (S) и $\beta > \sigma + 1$ (LS) – решение локализовано. Для случая $\beta = \sigma + 1$ из (8) получаем, что диаметр области локализации должен быть не меньше $D = 2[(\sigma+2)N^{1/(\sigma+1)}/(\sigma+1)]^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}$.

3. П а р а б о л и ч е с к о е у р а в н е н и е с н е л и н е й н ы м и к р а е в ы м и у с л о в и я м и в т о р о г о р о д а. Рассмотрим в качестве (1) еще одну скалярную задачу

$$(9)\qquad u_t = [\Psi(u)]_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad -[\Psi(u)]_x|_{x=0} = g(u), \quad t > 0,$$

где $\Psi > 0$, $\Psi' \geqslant 0$, $g > 0$ – заданные функции. Семейство стационарных состояний здесь строится особенно просто

$$U_\lambda(x) = \Psi^{-1}\left\{\Psi(\lambda)\left[1 - \frac{g(\lambda)}{\Psi(\lambda)}x\right]^+\right\}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0.$$

Отсюда, если $\Psi(\lambda)/g(\lambda) \to \mu$, $\lambda \to +\infty$ и $\mu = +\infty$, то $U_\lambda(x) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$ всюду в $\mathbf{R}^1_+$, и решение не локализовано. Напротив, если $\mu \in \mathbf{R}^1_+$, то может быть локализация (S-режим) в области Ω_L с мерой $\operatorname{mes}\Omega_L \geqslant \mu$. В случае $\mu = 0$ решение может обращаться в бесконечность в одной точке $x = 0$, так как это справедливо для $U_\infty(x)$. Для частного случая задачи (9) со степенными нелинейностями $\Psi(u) = u^{\sigma+1}$, $g(u) = u^\beta$ $(\sigma \geqslant 0, \beta > 1)$ сформулированные выводы подтверждаются на основе построения точных автомодельных решений. Для задачи (9) неравенство (5) принимает вид

$$u(t, x) \geqslant \Psi^{-1}\left\{\Psi(u(t,0))\left[1 - \frac{g(u(t,0))}{\Psi(u(t,0))}x\right]^+\right\}, \quad t \to T^-, \quad x \in \mathbf{R}^1_+,$$

и довольно наглядно иллюстрирует возможность описания структуры нестационарного решения в "параметризированном" виде.

4. С и с т е м а к в а з и л и н е й н ы х у р а в н е н и й. Рассмотрим теперь задачу Коши ($G = \mathbf{R}^N$) для следующей параболической системы двух уравнений с "перепутанными" нелинейностями в диффузионных членах:

$$(10)\qquad u_t = \nabla(v^\mu \nabla u) + u^p, \quad v_t = \nabla(u^\nu \nabla v) + v^q, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

где $\mu > 0$, $\nu > 0$, $p > 1$, $q > 1$ – постоянные. Нелинейности в уравнениях степенные, однако, как нетрудно убедиться, задача не допускает автомодельных решений при произвольных значениях параметров. Применим лемму. Пусть для простоты начальные функции $\{u_0, v_0\}$ зависят только от $r = \|x\|$. Пусть U^*, V^* – радиально-симметричное стационарное состояние, $U^*(0) = V^*(0) = 1$, удовлетворяющее уравнениям

$$(11)\qquad \nabla(V^\mu \nabla U) + U^p = 0, \quad \nabla(U^\nu \nabla V) + V^q = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

и строго положительное в некотором шаре $\omega_1 \subset \mathbf{R}^N$ (в существовании U^*, V^* нетрудно убедиться после сведения (11) к эквивалентным интегральным уравнениям). Тогда система (11) допускает целое семейство стационарных решений, которое в данном случае удобно записать в виде

$$(12)\qquad U_a = a^{2(q+\mu-1)/m}\, U^*(ax), \quad V_a = a^{2(p+\nu-1)/m}\, V^*(ax), \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

где $m = (q-1)(p-1) - \mu\nu \neq 0$ и $a > 0$ – параметр. При всех a функции U_a, V_a положительны в областях $\omega_a = \{x | \; ax \in \omega_1\}$. Это семейство эквивалентно $\{U_\lambda\}$ при специальном выборе $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (a^{2(q+\mu-1)/m}, a^{2(p+\nu-1)/m})$. Из (12) в силу леммы получаем, что основные свойства неограниченных решений задачи зависят от знака m. Если $m < 0$, то при $a \to 0$ получаем: $(U_a, V_a) \to +\infty$ всюду в $\mathbf{R}^N$ и $\omega_a \to \mathbf{R}^N$, поэтому в силу неравенства (5) локализация отсутствует. Если же $m > 0$, то $(U_a, V_a) \to +\infty$, $a \to +\infty$ только в точке $x = 0$ (так как $\omega_\infty = \{0\}$), поэтому решение может быть локализовано в области с нулевой мерой. Осталось рассмотреть случай $m = 0$, когда (11) имеет такое семейство решений:

$$U_\lambda = \lambda U^*(x), \quad V_\lambda = \lambda^{(p-1)/\mu} V^*(x), \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad \lambda > 0.$$

Отсюда $(U_\lambda, V_\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$ всюду в ω_1, поэтому решение не может быть локализовано в шаре меньших, чем ω_1, размеров.

Необходимо подчеркнуть, что в случае систем уравнений данный метод выделяет лишь те основные свойства неограниченных решений, которые не зависят от специфики начальной функции. Более детальное исследование возможно на основе других, в частности численных, методов (см. [8, 9], где получены интересные результаты для систем типа (10)).

В заключение отметим, что метод стационарных состояний дает верные результаты для значительно более сложных задач, в том числе для задач без принципа максимума.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
9 II 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Змитренко Н.В. и др.* – ДАН, 1976, т. 227, № 2, с. 321. 2. *Самарский А.А.* Тр. МИАН, 1981, т. 158, с. 153. 3. *Курдюмов С.П.* В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217. 4. *Галактионов В.А., Самарский А.А.* – Матем. сб., 1982, т. 118, с. 291, 435; 1983, т. 120, с. 3; т. 121, с. 131. 5. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др.* – ДАН, 1980, т. 252, № 6, с. 1362. 6. *Галактионов В.А.* – ДАН, 1982, т. 264, № 5, с. 1035. 7. *Галактионов В.А.* – ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 6, с. 1341. 8. *Галактионов В.А., Еленин Г.Г. и др.* – Препринт № 27, ИПМ АН СССР, 1979. 9. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С. и др.* – ДАН, 1981, т. 258, № 5, с. 1084.