

С.П. КУРДЮМОВ, Е.С. КУРКИНА, А.Б. ПОТАПОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

АРХИТЕКТУРА МНОГОМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ СТРУКТУР

Известно, что в среде с коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры, процессы горения могут идти в режиме с обострением [1-5]. При определенных условиях возникает явление локализации тепла, приводящее к появлению нестационарных диссипативных структур [2-12]. Исследования одномерной задачи Коши показали, что процессы горения могут развиваться в виде структур разной сложности, и собственные функции нелинейной автомодельной задачи описывают их типы [2-5]. Многомерные вычислительные эксперименты выявили особенности протекания процессов в двумерном и трехмерном пространствах и также обнаружили явление локализации и существование структур [4-13].

В настоящей работе рассматривается фундаментальная задача поиска всех типов многомерных структур, которые могут быть возбуждены в заданной нелинейной среде. С нашей точки зрения, она сводится к исследованию многомерных автомодельных решений, не однородных по углу. В работе аналитически построены хорошие приближения к автомодельным решениям, дающие возможность проанализировать архитектуру сложных собственных функций, оценить размеры и форму областей локализации и в некоторых случаях построить решения численно.

1. Для задачи Коши, описывающей процесс горения среды,

$$(1) \quad \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa_0 T^\sigma \text{grad } T) + q_0 \rho T^\beta, \quad t > 0;$$

$$\kappa_0, q_0 > 0; \quad \sigma > 0, \quad \beta > \sigma + 1; \quad \rho = Ar^{s-2}, \quad s > 0, \quad A > 0;$$

$$(2) \quad T|_{t=0} = T_0(r), \quad r^l T^\sigma \text{grad } T \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0$$

$$r \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty$$

исследуются автомодельные решения вида

$$(3) \quad T(r, t) = g(t)y^{1/(\sigma+1)}(\xi),$$

$$\xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad \xi = |\xi|,$$

$$(4) \quad g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-\mu}, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^\nu, \quad \mu = \frac{1}{\beta-1}, \quad \nu = \frac{\beta-\sigma-1}{s(\beta-1)},$$

где τ — момент обострения. Удобно провести преобразование координат: $\hat{t} = t_0 t$, $\hat{r} = r_0 r$, $t_0 = q_0 c_V^{-1}$, $r_0 = (A \kappa_0 q_0^{-1})^{1/s}$ и выбрать $\tau = t_0 \mu$. Тогда функция $y(\xi)$ удовлетворяет квазилинейному эллиптическому уравнению

$$(5) \quad \frac{1}{(\sigma+1)} \Delta y = \frac{\beta-\sigma-1}{s} \xi^{s-1} \frac{\partial}{\partial \xi} y^{1/(\sigma+1)} - \xi^{s-2} (y^{\beta/(\sigma+1)} - y^{1/(\sigma+1)})$$

и граничным условиям

$$(6) \quad y(0) < \infty, \quad \xi^l \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad y \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0;$$

$l+1$ – размерность пространства.

2. Рассмотрим двумерный случай. Анализируя автомодельное уравнение, получаем следующую асимптотику решений при $\xi \rightarrow \infty$:

$$(7) \quad y(\xi, \varphi) \rightarrow c(\varphi) \xi^{-p} + \dots, \quad p = \frac{(\sigma+1)\beta}{\beta-\sigma-1}, \quad c(\varphi) > 0.$$

Уравнение (5) имеет пространственно-однородное (гомотермическое) решение $y_0 = 1$. Около него аналогично [10, 4, 7] линеаризуем (5), положив $y = 1 + u$, $|u| \ll 1$. Тогда относительно функции $u(\xi, \varphi)$ получим линейное уравнение

$$(8) \quad \Delta u - \frac{\beta - \sigma - 1}{s} \xi^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (\beta - 1) \xi^{s-2} u = 0.$$

Решение уравнения (8) при условии ограниченности u при $\xi = 0$ имеет вид

$$(9) \quad u(\xi, \varphi) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m R_m(\xi) \cos(m\varphi + \varphi_{0m}),$$

$$R_m(\xi) = \xi^m M\left(-a_m, b, \frac{\beta - \sigma - 1}{s^2} \xi^s\right),$$

$$a_m = a - \frac{m}{s}, \quad a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \quad b = 1 + \frac{2m}{s},$$

$M(a, b, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, α_m – произвольные постоянные.

Предположим, что многомерные собственные функции (СФ) связаны с решениями линеаризованного уравнения (8), как и частные цилиндрически-симметричные решения $y_i(\xi)$. А именно, в области немонотонности они совершают колебания около плоскости $y_0 = 1$ и аппроксимируются функциями $u(\xi, \varphi)$, а вне этой области при $\xi > \xi^*(\varphi)$ описываются асимптотикой (7). В одномерном случае удалось построить хорошие приближения к решениям $y_i(\xi)$ путем сшивания функции $1 + u(\xi)$ ($u = \alpha_0 R_0(\xi)$) с асимптотикой СФ (7) в некоторых точках ξ_i так, чтобы полученная функция $\tilde{y}_i(\xi)$ обладала необходимой гладкостью. Число таких приближений совпадает с числом СФ $y_i(\xi)$ [6].

Двумерные приближения удалось построить в случае, когда переменные ξ и φ в $u(\xi, \varphi)$ разделяются: $u = \alpha_m R_m(\xi) \cos m\varphi$. Это эквивалентно гипотезе о том, что в СФ доминирует m -я гармоника по φ , а влиянием остальных можно пренебречь. Численное решение нелинейной задачи во многих случаях подтвердило эту гипотезу.

Для сшивания в двумерном случае использовалась следующая методика. Строились две функции

$$(10) \quad f_j(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha_j R_m(\xi), & \xi < \xi_j, \\ C_j \xi^{-p}, & \xi > \xi_j, \end{cases} \quad f_{j+1}^*(\xi) = \begin{cases} 1 - \alpha_j R_m(\xi), & \xi < \xi_{j+1}^*, \\ C_{j+1}^* \xi^{-p}, & \xi > \xi_{j+1}^*. \end{cases}$$

Неизвестные параметры находились из условий $f_j, f_{j+1} > 0$, $f_j \in C^2$, $f_{j+1}^* \in C^1$; число экстремумов функции равно ее индексу. В качестве приближения выбиралась функция

$$(11) \quad \tilde{y}_{mj}(\xi, \varphi) = G(\xi) + R^*(\xi) \cos m\varphi,$$

Рис. 1. Расположение максимумов и минимумов и форма эффективной области локализации для линейных приближений к СФ $EjMm$, $\beta = 2,5$, $\delta = 1$; $s = 2$. Подчеркнутые СФ получены численно. При $m = 1$ (отмечено звездочкой) СФ, по-видимому, не существуют, так как центр, к которому должна сходиться несимметричная тепловая волна, физически не выделен: $s = 2$, плотность среды постоянна в пространстве. 1 - максимум, 2 - минимум, 3 - центр ($\xi = 0$)

где $G(\xi) = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}^*)$, $R^*(\xi) = \frac{1}{2}(f_j - f_{j+1}^*)$. При $\xi < \xi_j$ $G(\xi) = 1$, $R^*(\xi) = \alpha_j R_m(\xi)$, а при $\xi > \xi_{j+1}^*$ $G \rightarrow 0$ и $R^* \rightarrow 0$ как ξ^{-p} . СФ, приближения к которым строятся этим способом, будем обозначать $EjMm$. Число приближений для каждого m равно числу локальных экстремумов функции $R_m(\xi)$ при $\xi > 0$

$$(12) \quad N_m = [a_m + [[a_m] a_m^{-1}]] + 1.$$

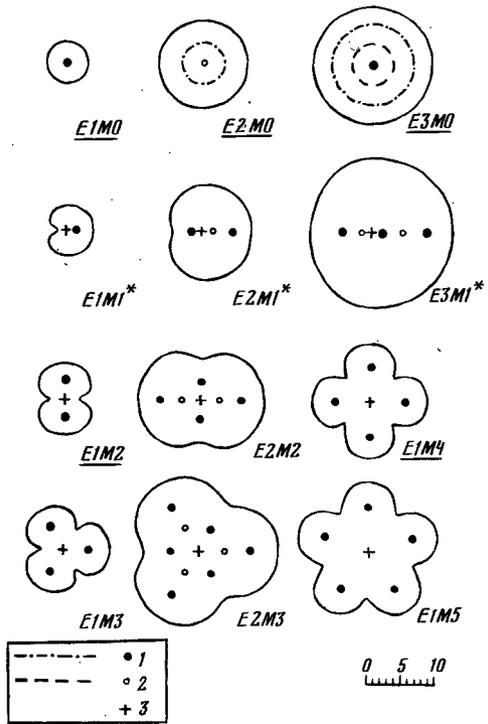
С ростом m a_m и N_m уменьшаются; при $m \geq as$ $a_m \leq 0$, $R_m(\xi)$ становится монотонной и приближений построить нельзя. Полное число приближений, которым оценивается количество СФ $EjMm$, составляет

$$(13) \quad N = \sum_{0 \leq m < as} \{ [[a_m - [[a_m] a_m^{-1}]] + 1 \}.$$

3. Таким образом, линейный анализ предсказывает конечное число собственных функций $EjMm$, которое определяется лишь параметрами самой среды. Все они имеют вид системы максимумов ("холмов"), расположенных вблизи точки $\xi = 0$. Удобно классифицировать их по количеству и расположению максимумов согласно значениям m и j . При $j = 1$ СФ имеет m максимумов, находящихся на окружности в углах правильного m -угольника. В случае $j = 2$ максимумы расположены в два слоя на двух concentрических окружностях по m штук на каждой, в углах правильных m -угольников, причем m -угольники повернуты на угол π/m друг относительно друга. Аналогично организованы и другие приближения $EjMm$: они имеют jm максимумов, находящихся на concentрических окружностях по m штук на каждой в вершинах правильных m -угольников. Таким образом, усложнение организации идет по двум направлениям: увеличение числа максимумов в слое и увеличение числа слоев. Это схематически иллюстрирует рис. 1. Там же показаны формы эффективных областей локализации соответствующих приближений (линии уровня $y = 0, 1$).

4. Используя развитую методику, можно построить еще один класс линейных приближений $-Eijj$, проводя разделение переменных в декартовой системе координат (при целых s) и сшивая с асимптотикой отдельно по каждой переменной. Принцип расположения максимумов и минимумов в них иной, чем в $EjMm$, но имеются и сходные приближения из разных классов.

Наличие линейных приближений позволило построить некоторые СФ численно и тем самым подтвердить их существование. При этом функции \tilde{u} служили в качестве нулевого приближения, обеспечивая сходимость итераций к соответ-



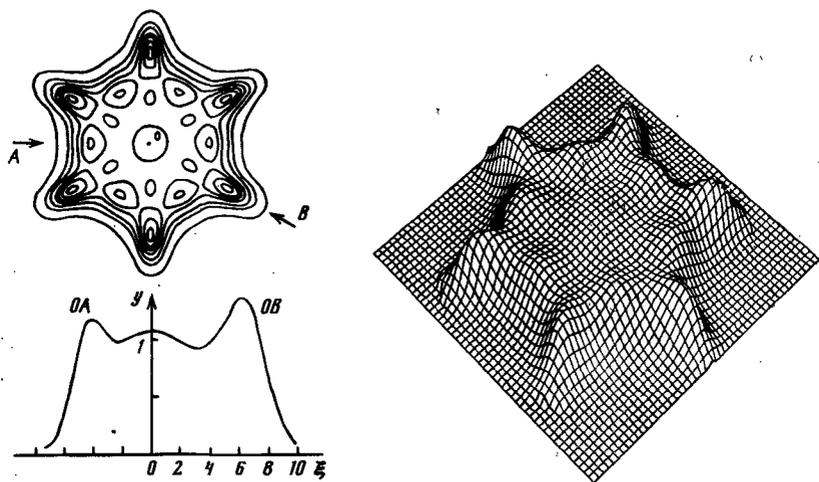


Рис. 2. Собственная функция $E2M6$; $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 2,5$. Приведены линии уровня, сечения OA и OB (показаны стрелками) и перспективная проекция поверхности $y(\xi, \varphi)$

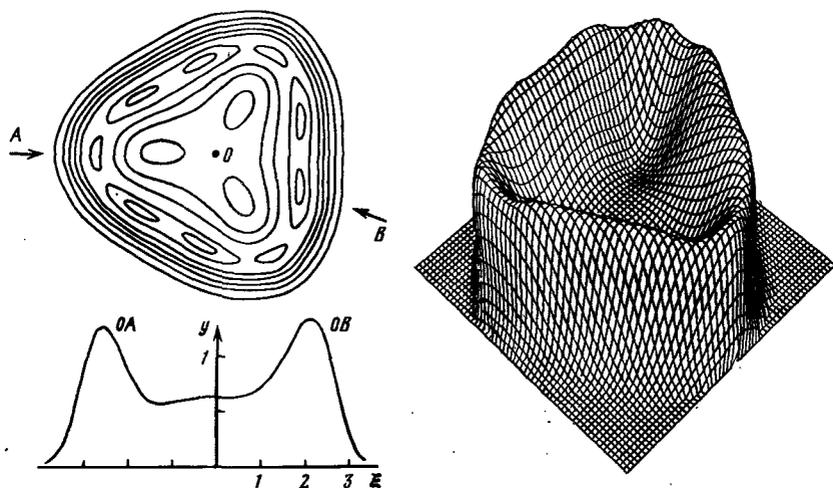


Рис. 3. Собственная функция, $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 4$. Приведены линии уровня, два сечения и перспективная проекция поверхности. Вид СФ лучше всего описывается линейным приближением $E2M3$, однако полностью не совпадает с предсказанием: раздвоение максимумов внутреннего слоя; максимумы внутреннего слоя выше, чем внешнего; в центре y значительно меньше 1. Предположение о доминировании 3-й гармоники нарушается, велико также влияние 0-й и 6-й гармоник

ствующей СФ. Всего было построено свыше 20 СФ при различных значениях β , σ , s . Наибольшее количество структур из числа предсказанных удалось построить в классе Ei/j при $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 2$ (11 из 15). В большинстве случаев форма решений (количество и расположение максимумов и минимумов и соотношение их высот, форма эффективной области локализации) хорошо передавались линейными приближениями (см., например, рис. 2). Отклонения от предсказаний наблюдались лишь для одной полученной СФ (рис. 3).

В связи с этим возникают вопросы: существуют ли другие классы двумерных собственных функций и каково число СФ в каждом классе? В настоящее время оба вопроса остаются открытыми.

В трехмерной задаче также можно построить систему линейных приближений, разделяя переменные ξ , θ , φ , выделяя отдельные гармоники по переменным θ и φ ($P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi$) и проводя сшивание с асимптотикой по ξ . Таких приближений получается конечное число $N(\beta, \sigma, s)$. При $s = 2$ можно построить класс приближений (аналог Ei/j), проводя разделение переменных и сшивание в декартовых координатах.

5. Исследуемые СФ являются нестационарными диссипативными структурами. Из (3) и (4) следует, что они существуют конечное время τ и развиваются в режиме с обострением. Так как $\beta > \sigma + 1$, то максимумы распределения температуры движутся к центру и при $t = \tau$ падают на него. Таким образом, автомодельные решения описывают процессы горения в виде сходящихся к центру тепловых волн различной формы (LS -режим [1-5]).

Собственные функции $y \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, но в нуль нигде не обращаются. Однако, исходя из анализа одномерного случая [1-4, 7, 8, 10], многомерных расчетов [13] и анализа асимптотики (7), можно утверждать, что приравнивание нулю СФ вне линии уровня $y = 0,01$ не влияет на процесс горения, т.е. структуры фактически локализованы. Примеры различных форм областей локализации приведены на рис. 1.

Итак, задание свойств нелинейной среды определяет типы диссипативных структур, их многомерную архитектуру и эволюцию во времени. Развитие такого подхода может иметь применения в задачах единой теории поля, физики плазмы и задачах синергетики.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
27 VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Змитренко Н.В. и др. — ДАН, 1976, т. 227, № 2, с. 321.
2. Самарский А.А., Еленин Г.Г. и др. — ДАН, 1977, т. 237, № 6, с. 1330.
3. Курдюмов С.П., Куркина Е.С. и др. — ДАН, 1980, т. 251, № 3, с. 587.
4. Курдюмов С.П. В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217.
5. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 29.
6. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б. Препринт ИПМ АН СССР, 1982, № 75.
7. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — ЖВМ и МФ. 1983, т. 23, № 2, с. 380.
8. Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826.
9. Адъюттов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Препринт ИПМ АН СССР, 1982, № 108.
10. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 106.
11. Змитренко Н.В., Михайлов А.П. сер. Математика, кибернетика, М.: Знание, 1982, № 12.
12. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Там же, 1983, № 2.
13. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. и др. — ДАН, 1980, № 4, с. 836.