Запись k-кратного дерева в списочном виде с учетом разделителей между вершинами и строками занимает $2\dfrac{k+1}{k-1}(k^{m-1}-1)-1$ байт, а в виде несвернутого произведения сумм вершин $\dfrac{2k+1}{k-1}(k^{m-1}-1)+1$ байт, что на $\dfrac{k^{m-1}}{k-1}-2$ байт меньше записи в списочном виде.

Наличие в графе нескольких деревьев, дублирований или совокупностей циклов, имеющих несколько общих вершин, приводит к усложнению и неоднозначности вида алгебраической формы записи графа. Тем не менее всегда можно выделить в нем такие части, которые представляют отдельное дерево, часть дублирования или часть бикомпоненты с заранее выбранным числом общих вершин. Поэтому запись графа можно представить в виде совокупностей записей выделенных в нем частей.

Таким образом, алгебраическая форма записи позволяет представлять ориентированный граф или его часть в виде достаточно компактной формулы, которая допускает над ней преобразования, аналогичные общепринятым алгебраическим преобразованиям.

При такой форме записи производится упорядочение вершин ориентированного графа, что делает его представление более наглядным при умозрительном анализе и позволяет увеличивать быстродействие алгоритмов машинного анализа этого графа.

Поступило
7 IV 1983

УДК 517.9 : 533.7 МАТЕМАТИКА

В.М. ГОЛОВИЗНИН, М.А. РЯЗАНОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ, О.С. СОРОКОВИКОВА

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ КОРРЕКЦИЯ ПОТОКОВ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

1. При численном решении задач газовой динамики (ГД) в переменных, отличных от лагранжевых, необходимо каким-либо образом аппроксимировать выражения, описывающие процессы конвективного переноса массы, импульса и полной энергии. Если в основу аппроксимации уравнений ГД кладется система законов сохранения [1], то дискретные аналоги соответствующих конвективных членов оказываются дивергентными и однозначно определяют конвективный перенос тепла. Анализ широко используемых в практике разностных схем таких, как схема Лакса–Вендроффа [1], Мак-Кормака [2], Годунова [3], Белоцерковского–Давыдова [4], Жмакина–Фурсенко [5] и других, показывает, что следующие из них дискретные аналоги конвективных производных, описывающие перенос внутренней энергии, не являются консервативными. Это значит, что в указанных методах присутствуют дополнительные источники или стоки энтропии, обусловленные несогласованностью аппроксимаций основных конвективных потоков.

Нарушение энтропийного баланса может оказывать существенное влияние на получаемые результаты [6].

В работах [7–11] предложены общие подходы к построению разностных схем ГД в эйлеровых и смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных с консервативной аппроксимацией конвективного переноса полной, внутренней и кинетической энергии, массы и импульса. Такие схемы названы полностью консервативными [7], или схемами со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков [10, 11].

Класс схем с указанными свойствами достаточно широк и включает в себя как схемы с произвольным наперед заданным порядком аппроксимации на достаточно гладких решениях [10], так и схемы с аппроксимацией конвективных производных "вверх по потоку" [11].

2. Практика расчета задач ГД в эйлеровых переменных показывает, что схемы с аппроксимацией конвективных членов направленными против потока разностями оказываются монотонными и хорошо отражают физическую картину течения. Основным недостатком указанных схем является нелинейная аппроксимационная диффузия [12], величина которой возрастает с увеличением скорости переноса вещества из одной ячейки в другую. Схемы с симметричной аппроксимацией конвективных членов практически лишены этого недостатка, однако приводят к образованию нефизических осцилляций в окрестностях разрывов. Объединение достоинств схем этих двух типов осуществляется в различных модификациях метода коррекции потоков [5, 13, 14]. Так, в [14] идея коррекции потоков реализована на основе сравнения схем первого и более высокого порядка аппроксимации.

Подход, аналогичный развитому в [14], позволяет построить полностью консервативный алгоритм коррекции потоков для задач ГД в СЭЛ переменных.

3. Рассмотрим для простоты одномерную систему уравнений ГД в СЭЛ переменных, соответствующую случаю плоской симметрии [11]:

$$
\begin{gathered}
\frac{D\rho J}{Dt} + \frac{\partial \rho w}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{D\rho u J}{Dt} + \frac{\partial \rho u w}{\partial \xi} = -\frac{\partial P}{\partial \xi}, \\
\frac{D\rho \epsilon J}{Dt} + \frac{\partial \rho \epsilon w}{\partial \xi} = -\frac{P \partial u}{\partial \xi}, \qquad P = (\gamma - 1)\rho\epsilon, \qquad (1) \\
w = u - \dot{x}, \qquad \dot{x} = \frac{Dx(\xi, t)}{Dt} = \varphi(\xi, t).
\end{gathered}
$$

Здесь ρ – плотность, ϵ – удельная внутренняя энергия, P – давление, γ – показатель политропы, u – скорость, ξ – "опорная переменная" [11], $x = x(\xi, t)$ – декартовы координаты точек опорной переменной, $J = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}$, $\dfrac{D}{Dt}$ – оператор дифференцирования по времени при фиксированной переменной ξ; $\varphi(\xi, t)$ – заданная функция, определяющая закон перемещения "опорной" координатной системы относительно неподвижного наблюдателя. Случай $\varphi(\xi, t) \equiv 0$ соответствует эйлеровым переменным, $\varphi(\xi, t) = u(\xi, t)$ – лагранжевым.

4. В области $\xi \in (-\infty, +\infty)$ введем равномерную разностную сетку с шагом h_ξ. Пусть $\bar{\omega}$: $\{ih_\xi,\ i = 0, \pm 1, \ldots, \pm\infty\}$ – множество узлов сетки, ω: $\{(i + 0{,}5)h_\xi,\ i = 0, \pm 1, \ldots, \pm\infty\}$ – множество центров ее ячеек. Обозначим через $\mathcal{H}_{\bar{\omega}}$ и $\mathcal{H}_\omega$ множества сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}$ и ω соответственно. Пусть ρ, ϵ, P, $\mathrm{flux}(\rho u w)$, $\mathrm{flux}(\rho u^2 w/2) \in \mathcal{H}_\omega$; x, u, φ, w, $\mathrm{flux}(\rho w)$, $\mathrm{flux}(\rho\epsilon w) \in \mathcal{H}_{\bar{\omega}}$, где $\mathrm{flux}(\rho u w)$, $\mathrm{flux}(\rho u^2 w/2)$, $\mathrm{flux}(\rho w)$, $\mathrm{flux}(\rho\epsilon w)$ – конвективные потоки импульса, кинетической энергии, массы и внутренней энергии соответственно. Аппроксимируем систему

(1) разностными уравнениями, записанными в потоковой форме:

(2) $(\hat{m}_{i+½} - m_{i+½})/\tau_n + [\mathrm{flux}(\rho w)]_{i+1} - [\mathrm{flux}(\rho w)]_i = 0;$

(3) $(\hat{\mathscr{P}}_i - \mathscr{P}_i)/\tau_n + [\mathrm{flux}(\rho u w)]_{i+½} - [\mathrm{flux}(\rho u w)]_{i-½} = -(P^*_{i+½} - P^*_{i-½});$

(4) $[(\hat{m}\hat{\epsilon})_{i+½} - (m\epsilon)_{i+½}]/\tau_n + [\mathrm{flux}(\rho\epsilon w)]_{i+1} - [\mathrm{flux}(\rho\epsilon w)]_i = -P^*_{i+½}(u_{i+1} - u_i);$

(5) $P^*_{i+½} = (\gamma - 1)(\rho\epsilon)_{i+½} + q_{i+½}, \qquad \hat{w}_i = \hat{u}_i - \varphi_i(t_{n+1}), \qquad (\hat{x}_i - x_i)/\tau_n = \varphi_i(t_{n+1});$

(6) $q_{i+½} = -0{,}5\kappa c_{i+½}\rho_{i+½}[(\check{u}_{i+1} - \check{u}_i) - |(\check{u}_{i+1} - \check{u}_i)|].$

Здесь $m_{i+½} = \rho_{i+½}(x_{i+1} - x_i)$ — масса, заключенная в ячейку с номером $(i + ½)$, $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, $\hat{\mathscr{P}}_i = (\hat{m}_{i+½} + m_{i-½})(\hat{u}_i + u_i)/4$ — импульс i-го узла сетки, $c_{i+½} = [\gamma(\gamma - 1)\epsilon_{i+½}]^{(½)}$ — адиабатическая скорость звука, $\hat{f} = f(t_{n+1})$, $f = f(t_n)$, $\check{f} = f(t_{n-1})$.

Система разностных уравнений (2)–(6) будет обладать свойством полной консервативности при условии:

(7) $[\mathrm{flux}(\rho u w)]_{i+½} = \{[\mathrm{flux}(\rho w)]_{i+1} + [\mathrm{flux}(\rho w)]_i\}(u_{i+1} + u_i)/4.$

В этом случае из (2), (3) следует уравнение баланса кинетической энергии в виде

(8)
$$\begin{aligned}
&(\hat{E}^{(k)}_i - E^{(k)}_i)/\tau_n + [\mathrm{flux}(\rho u^2 w/2)]_{i+½} - [\mathrm{flux}(\rho u^2 w/2)]_{i-½} = \\
&= -u_i(P^*_{i+½} - P^*_{i-½}),\\
&\hat{E}^{(k)}_i = (\hat{m}_{i+½} + \hat{m}_{i-½})\hat{u}_i u_i/4, \qquad [\mathrm{flux}(\rho u^2 w/2)]_{i+½} = \{[\mathrm{flux}(\rho w)]_{i+1} - \\
&- [\mathrm{flux}(\rho w)]_i\}u_{i+1}u_i/4,
\end{aligned}$$

а (8) и (4) приводят к потоковой форме уравнения баланса полной энергии:

$$\begin{aligned}
&(\hat{E}^{(\text{п})}_i - E^{(\text{п})}_i)/\tau_n + [\mathrm{flux}(E^{(\text{п})} w + Pu)]_{i+½} - [\mathrm{flux}(E^{(\text{п})} w + Pu)]_{i-½} = 0,\\
&\hat{E}^{(\text{п})}_i = [(\hat{m}\hat{\epsilon})_{i+½} + (m\epsilon)_{i-½}]/2 + \hat{E}^{(k)}_i,\\
&[\mathrm{flux}(E^{(\text{п})} w + Pu)]_{i+½} = \{[\mathrm{flux}(\rho\epsilon w)]_{i+1} + [\mathrm{flux}(\rho\epsilon w)]_i\}/2 + \\
&+ [\mathrm{flux}(\rho u^2 w/2)]_{i+½} + P^*_{i+½}(u_{i+1} + u_i)/2.
\end{aligned}$$

Таким образом, при условии (7) система уравнений (2)–(6) будет полностью консервативной независимо от способа аппроксимации конвективных потоков массы и внутренней энергии.

5. Имеющийся произвол в выборе разностных схем со сбалансированными аппроксимациями конвективных производных можно использовать для построения полностью консервативного алгоритма коррекции потоков. Пусть

(9)
$$\begin{aligned}
&[\mathrm{flux}(\rho w)]_i = w_i\rho^*_i, \qquad [\mathrm{flux}(\rho\epsilon w)]_i = w_i(\rho\epsilon)^*_i,\\
&\rho^*_i = \rho^{(\mathrm{I})}_i = \rho_{i-½} - \mathrm{sign}(w_i - |w_i|)(\rho_{i+½} - \rho_{i-½}),\\
&(\rho\epsilon)^*_i = (\rho\epsilon)^{(\mathrm{I})}_i = (\rho\epsilon)_{i-½} - \mathrm{sign}(w_i - |w_i|)[(\rho\epsilon)_{i+½} - (\rho\epsilon)_{i-½}].
\end{aligned}$$

Такое определение потоков массы и внутренней энергии соответствует методу "донорных ячеек" [12]. Уравнения (2)–(6), (9) аппроксимируют систему (1) с первым порядком как по времени, так и по пространству. При симметричном определении величин ρ^*_i и $(\rho\epsilon)^*_i$:

$$\rho^*_i = \rho^{(\mathrm{II})}_i = (\rho_{i+½} + \rho_{i-½})/2, \qquad (\rho\epsilon)^*_i = (\rho\epsilon)^{(\mathrm{II})}_i = [(\rho\epsilon)_{i+½} + (\rho\epsilon)_{i-½}]/2$$

уравнения (2)–(6) имеют второй порядок аппроксимации по переменной ξ.

Для объединения достоинств обоих типов аппроксимаций рассмотрим "взвешенные" величины

$$(10)\quad \rho_i^* = \mu_i^{(\rho)}\rho_i^{(\mathrm{I})} + (1-\mu_i^{(\rho)})\rho_i^{(\mathrm{II})}, \qquad (\rho\epsilon)_i^* = \mu_i^{(\epsilon)}(\rho\epsilon)_i^{(\mathrm{I})} + (1-\mu_i^{(\epsilon)})(\rho\epsilon)_i^{(\mathrm{II})},$$

в которых весовые множители $\mu_i^{(\rho)} \in [0,\ 1]$, $\mu_i^{(\epsilon)} \in [0,\ 1]$ будем выбирать на основе анализа поведения вычисляемых сеточных функций ρ, $(\rho\epsilon) \in \mathcal{H}_\omega$. Приведем алгоритм нахождения величин $\mu_i^{(\rho)} \in \mathcal{H}_{\overline{\omega}}$, который можно трактовать как вариант метода "предиктор–корректор".

Положим вначале $\mu_i^{(\rho)} \equiv 0$ и из (2) определим предварительные величины масс ячеек $\hat{m}_{i+1/2}$ и плотностей $\tilde{\rho}_{i+1/2} = \hat{m}_{i+1/2}/(\hat{x}_{i+1} - x_i)$. Затем для каждой ячейки вычислим допустимые пределы изменения количества вещества Δm^+, $\Delta m^- \in \mathcal{H}_\omega$, которые в соответствии с идеологией методов "коррекции потоков" [13] при пересчете плотностей с $\mu_i^{(\rho)} \not\equiv 0$ не приведут к образованию новых локальных экстремумов по сравнению с имеющимися:

$$\Delta m_{i+1/2}^+ = (\rho_{i+1/2}^+ - \tilde{\rho}_{i+1/2})(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)/\tau_n,$$
$$\Delta m_{i+1/2}^- = -(\rho_{i+1/2}^- - \tilde{\rho}_{i+1/2})(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)/\tau_n,$$

где

$$\rho_{i+1/2}^+ = \max_{j\in Ш(i)}(\tilde{\rho}_{j+1/2}, \rho_{j+1/2}), \qquad \rho_{i+1/2}^- = \min_{j\in Ш(i)}(\tilde{\rho}_{j+1/2}, \rho_{j+1/2}),$$

$Ш(i)$ – трехточечный шаблон с центром в точке i.

На втором этапе положим $\mu_i^{(\rho)} \equiv 1$ и определим суммы всех дополнительных по сравнению с $\mu_i^{(\rho)} \equiv 0$ потоков, направленных внутрь и наружу ячейки с номером $(i+1/2)$:

$$\Delta Q_{i+1/2}^+ = \max(0, \Delta F_i) - \min(0, \Delta F_{i+1}),$$
$$\Delta Q_{i+1/2}^- = \max(0, \Delta F_{i+1}) - \min(0, \Delta F_i),$$
$$\Delta F_i = w_i(\rho_i^{(\mathrm{II})} - \rho_i^{(\mathrm{I})}).$$

По найденным величинам вычислим промежуточные значения $\mu^\pm \in \mathcal{H}_\omega$:

$$\mu_{i+1/2}^\pm = \begin{cases} \min(1, \Delta m_{i+1/2}^\pm/\Delta Q_{i+1/2}^\pm), & \text{если } \Delta Q_{i+1/2}^\pm > 0, \\ 1, & \text{если } \Delta Q_{i+1/2}^\pm = 0, \end{cases}$$

по которым и определим весовые множители $\mu^{(\rho)} \in \mathcal{H}_\omega$:

$$\mu_i^{(\rho)} = \begin{cases} \min(\mu_{i+1/2}^+, \mu_{i-1/2}^-), & \text{если } \Delta F_i \geqslant 0, \\ \min(\mu_{i-1/2}^+, \mu_{i+1/2}^-), & \text{если } \Delta F_i < 0. \end{cases}$$

Величины $\mu_i^{(\epsilon)}$ определяются аналогично анализа рассчитываемого профиля внутренней энергии $(\rho\epsilon) \in \mathcal{H}_\omega$.

Очевидно, что описанная процедура не нарушает полной консервативности уравнений (2)–(7).

6. Рассмотренные явные полностью консервативные алгоритмы сравнивались со схемами Годунова [3], Жмакина–Фурсенко [5] и Бориса–Бука (SHASTX) [13] на одномерных тестовых задачах в эйлеровых переменных, подробно описанных в [5]. Оказалось, что схема (2)–(7), (9) с $\kappa = 0{,}25$ практически точно в отличие от схемы [3] передает волну разрежения при моделировании распада разрыва сравнительно небольшой интенсивности ($P_2/P_1 = 2$, $\rho_2/\rho_1 = 1$, $\gamma = 1{,}4$). Фронт ударной волны при этом остается монотонным и размазывается на 2–3 расчетные ячейки. При расчете сильного разрыва ($P_2/P_1 = 480$, $\rho_2/\rho_1 = 8$, $\gamma = 5/3$) полностью консервативная схема также обладает заметными преимуществами во всех областях течения.

Полностью консервативный метод коррекции потоков на распаде сильного разрыва оказался заметно точнее схемы SHASTX, хорошо передает веер волны разрежения, а в областях контактной границы и ударной волны приводит к результатам, практически совпадающим с полученными по схеме Жмакина–Фурсенко [5].

7. В схеме (2)–(7) используются три временных слоя для скорости u и два – для остальных переменных. Описанный подход без существенных изменений распространяется и на явную полностью консервативную разностную схему, трехслойную по всем переменным (ρ, ϵ, x, u) [11]. Практическим критерием устойчивости обеих схем оказывается условие Куранта [12].

Полностью консервативный метод коррекции потоков обобщается на случаи двух и трех пространственных измерений и произвольные криволинейные системы координат.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило 27 V 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lax P.D., Wendroff B.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, p. 217–237. 2. *MacCormack R.W.* American inst. for aeronautics and astronautics paper, 1969, p. 69–354. 3. *Годунов С.К.* – Матем. сб., 1959, т. 47 (89), с. 271–306. 4. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* – ЖВМ и МФ, 1971, т. 11, № 1, с. 182–207. 5. *Жмакин А.И., Фурсенко А.А.* – Там же, 1980, т. 20, № 4, с. 1021–1031. 6. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задачи газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с. 7. *Попов Ю.П., Самарский А.А.* – ЖВМ и МФ, 1970, т. 10, № 3, с. 773–779. 8. *Кузьмин А.В., Макаров В.Л.* – Там же, 1982, т. 22, № 1, с. 123–133. 9. *Самарский А.А. и др.* Препринт ИПМ АН СССР, 1981, № 63. 24 с. 10. *Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С.* Препринт ИПМ АН СССР, 1982, № 19. 22 с. 11. *Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С.* Препринт ИЭА, ИЭА-3747/16, 1983. 32 с. 12. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с. 13. *Boris J.P., Book D.L.* – J. Comp. Phys., 1973, vol. 11, № 1, p. 38–69. 14. *Zalesak S.T.* – Ibid., 1979, vol. 31, p. 335–362.

УДК 517.988.8 МАТЕМАТИКА

А.М. ДЕНИСОВ

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 4 IV 1983)

Рассмотрим задачу приближенного решения операторного уравнения I рода

$$A\bar{x} = \bar{y}, \tag{1}$$

где A – линейный, вполне непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_2 (H_1, H_2 – действительные сепарабельные гильбертовы пространства). Предположим, что A определен на всем H_1, $\overline{AH_1} = H_2$ и $\ker A = 0$. Пусть правая часть (1) известна приближенно, т.е. заданы элемент y_δ и число δ такие, что $\| y_\delta - \bar{y} \| \leqslant \delta$. Задача решения уравнения (1) некорректна [1].

Пусть φ_i – некоторый ортонормированный базис в H_1. Рассмотрим множество

$$X_n = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \quad \| Ax - y_\delta \| \leqslant q\delta \right\},$$