АПРЕЛЬ 1984 г., ТОМ XX, № 4

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

В. А. ГАЛАКТИОНОВ, С. П. КУРДЮМОВ, А. А. САМАРСКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются свойства решений некоторых квазилинейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (k(u) \nabla u) + Q(u). \tag{1.1}$$

Здесь $\nabla(\cdot) = \mathrm{grad}_x(\cdot)$, t и $x \in \mathbf{R}^N$ — соответственно временная и пространственная координаты, $u = u(t, x) \geqslant 0$ — искомое решение. Конкретный вид функций $k \geqslant 0$, $Q \geqslant 0$ (неравенство $k \geqslant 0$ обеспечивает параболичность уравнения (1.1)) будет определен в каждом из рассматриваемых случаев. Если рассматривать (1.1) как уравнение процессов диффузии тепла и горения в некоторой сплошной среде, то $k(u)$ будет играть роль коэффициента теплопроводности, а $Q(u)$ — мощности объемных источников энергии, зависящих от температуры среды $u \geqslant 0$.

Хорошо известно, что при специальном выборе коэффициентов k, Q (и краевых данных) уравнение (1.1) допускает автомодельные или, в общем случае, инвариантные решения, которые определяются путем интегрирования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. В наибольшей общности групповая классификация уравнения (1.1) с произвольной парой функций $\{k(u), Q(u)\}$, позволяющая выделить все типы решений, инвариантных относительно локальной группы Ли точечных преобразований, проведена в [1, 2] (см. также [3]).

Отличительная особенность многих из этих частных решений уравнения (1.1) состоит в том, что они очень наглядно проявляют особенности эволюции пространственно неоднородных образований в сплошных нелинейных средах — диссипативных структур, рассматриваемых как результат «нелинейного взаимодействия» процессов диффузии тепла и энерговыделения (см. по этому поводу [4—6]). При этом важно отметить, что инвариантные решения имеют, как правило, весьма простую пространственно-временную структуру.

В работе основное внимание уделяется изучению асимптотической устойчивости существенно нестационарных инвариантных решений $u_A(t, x)$ уравнения (1.1), таких, что $\max_x u_A(t, x) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ или при $t \to T^- < +\infty$*). В последнем случае функция $u_A(t, x)$ называется режимом с обострением или неограниченным решением**). Показано,

*) В указанный класс инвариантных решений уравнения (1.1) не попадают достаточно подробно изученные в настоящее время стационарные решения и ограниченные автомодельные решения типа бегущей волны.

**) Отметим, что подобные законы нарастания величин в режиме с обострением используются для описания различных сильно нестационарных физических процессов (см., например, [6, 7] и приведенную там библиографию).

что многие из таких инвариантных решений являются асимптотически устойчивыми в специальных «автомодельных» нормах относительно возмущений начальной функции. Тем самым пространственно-временная структура инвариантных решений уравнения (1.1) описывает асимптотическое поведение большого множества неинвариантных решений.

Кратко охарактеризуем содержание работы. В § 2 вводятся необходимые функциональные пространства. В § 3, 4 изложение результатов упорядочено в соответствии с характером поведения коэффициентов $k(u)$ и $Q(u)$ при больших $u>0$. В § 3 рассматриваются инвариантные решения уравнения (1.1) с коэффициентами степенного вида, в § 4 — уравнения с экспоненциальными нелинейностями.

В настоящей работе применяются многие подходы и методы, использованные в [8—11] при изучении существенно нестационарных решений квазилинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

с произвольными $k(u)$. Это исследование основывалось на построении так называемых приближенных автомодельных решений (п.а.р.) уравнения (1.2), которые ему, вообще говоря, не удовлетворяют, но тем не менее правильно описывают асимптотические свойства решений рассматриваемых задач. В то время, как подходящие инвариантные решения уравнения (1.2) существуют в весьма редких случаях*) [12], п.а.р., как показано в [8—11] (см. также [13, 14]), можно построить при достаточно произвольных $k(u)$. Отметим, что применяемые в [8—11] методы позволяют, кроме всего прочего, доказать асимптотическую устойчивость многих из рассматриваемых ниже инвариантных решений относительно «малых отклонений» коэффициентов $k(u)$ и $Q(u)$ от соответствующих «инвариантных» зависимостей.

Авторы благодарны В. А. Дородницыну за полезные обсуждения.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже определяются функциональные пространства, которые понадобятся в дальнейшем. Обозначим через $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ шар радиуса R с центром в точке $x=0$ и границей $\partial\Omega$.

1. Пространство непрерывных в Ω функций $C_x(\Omega)$ снабжается нормой $\|v\|_{C_x}=\max\limits_{x\in\bar\Omega}|v(x)|$.

2. В гильбертовом пространстве $L^2_x(\Omega)$ скалярное произведение и норма определяются соответственно по формулам

$$(v,\ w)=\int\limits_\Omega v(x)w(x)\,dx,\quad \|v\|_{L^2_x}=\left(\int\limits_\Omega v^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

3. В пространстве $L^1_x(\Omega)$ норма имеет вид $\|v\|_{L^1_x}=\int\limits_\Omega|v(x)|\,dx$.

4. Нам также понадобится пространство $H^{-1}_x(\Omega)$ радиально симметричных функций, зависящих от одной переменной $r=\|x\|$. Скалярное произведение и норма в $H^{-1}_x(\Omega)$ определяются следующим образом [15]: $(v,\ w)_{H^{-1}_x}=(v,\ (-\Delta)^{-1}w)$, $\|v\|_{H^{-1}_x}=(v,\ v)^{\frac12}_{H^{-1}_x}$, где функция $Y=(-\Delta)^{-1}w$ такова, что $\Delta Y=-w$, $x\in\Omega$; $Y|_{\partial\Omega}=0$. Без труда проверяется, что в радиально симметричном случае

*) Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения (1.1) [1—3]. Полученные в настоящей работе результаты в сочетании с методами [8—11] позволяют построить широкие системы п. а. р. уравнения (1.1) с коэффициентами k, Q весьма произвольного вида. Результаты этого исследования будут отражены в последующих публикациях.

$$Y=Y(r)=\int\limits_r^R x^{1-N}dx\int\limits_0^x y^{N-1}w(y)\,dy,\ \ 0<r<R.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\|v\|_{H_x^{-1}}=\left\|x^{1-N}\int\limits_0^x y^{N-1}v(y)\,dy\right\|_{L_x^2}=$$

$$=\left[\varkappa_N\int\limits_0^R x^{1-N}dx\left(\int\limits_0^x y^{N-1}v(y)\,dy\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

($\varkappa_N$ — объем шара единичного радиуса в $\mathbf{R}^N$).

5. К множеству $h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)$, которое является подпространством гильбертова пространства $H_x^{-1}(\mathbf{R}^1)$, сопряженного к $H^1(\mathbf{R}^1)$, отнесем функции $v\in C(\overline{\mathbf{R}}^1)\cap L^1(\mathbf{R}^1)$, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,dx=0, \tag{2.1}$$

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_x^{+\infty} v(y)\,dy\right|<+\infty,\quad \left|\int\limits_{-\infty}^0 dx\int\limits_{-\infty}^x v(y)\,dy\right|<+\infty. \tag{2.2}$$

На указанном множестве функций из $H^{-1}(\mathbf{R}^1)$ обычным образом вводятся скалярное произведение и норма

$$(v,\,w)_{h_x^{-1}}=\left(v,\,\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}w\right),\ \ \|v\|_{h_x^{-1}}=(v,\ v)_{h_x^{-1}}^{\frac{1}{2}},$$

где функция $W=(-d^2/dx^2)^{-1}w$ является решением задачи

$$\frac{d^2W}{dx^2}=-w,\ \ x\in\mathbf{R}^1;\quad |w(\pm\infty)|<\infty. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (2.1), (2.2) решение задачи (2.3) существует (оно определено с точностью до константы, что в силу (2.1) не влияет на корректность введения скалярного произведения). При этом справедливо равенство

$$\|v\|_{h_x^{-1}}=\left\|\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}v\right\|_{L_x^2(\mathbf{R}^1)}=\left\|\int\limits_x^{+\infty} v(y)\,dy\right\|_{L_x^2(\mathbf{R}^1)}.$$

§ 3. УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ k, Q СТЕПЕННОГО ВИДА

В этом параграфе изучается асимптотическая устойчивость нестационарных автомодельных решений уравнения со степенными нелинейностями

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla(u^\sigma\,\nabla u)+u^\beta, \tag{3.1}$$

где $\sigma\geqslant 0$ и β — постоянные. Условия устойчивости зависят от характера поведения источника $Q(u)=u^\beta$ при больших u, т. е. от величины β (а также от соотношения между величинами σ и β).

1. **Случай** $\beta<1$. Автомодельное решение уравнения (3.1) здесь имеет вид

$$u_A(t,\ x)=(t_0+t)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta_A(\xi),\ \ \xi=\frac{x}{(t_0+t)^{\frac{\sigma+1-\beta}{2(1-\beta)}}}, \tag{3.2}$$

где $t_0\in\mathbf{R}^1_+$ — произвольная постоянная, а функция $\Theta_A(\xi)>0$ удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению

$$\nabla_\xi(\Theta_A^\sigma\nabla_\xi\Theta_A)+\frac{\sigma+1-\beta}{2(1-\beta)}\nabla_\xi\Theta_A\,\xi-\frac{1}{1-\beta}\Theta_A+\Theta_A^\beta=0. \tag{3.3}$$

Нетрудно показать, что при $\beta<1$ и любых $\Theta_A(0)=\Theta_0\in(0,\ (1-\beta)^{1/(1-\beta)})$ существует радиально симметричное решение $\Theta_A(\rho)$, $\rho=\|\xi\|$ уравнения (3.3), достигающее при $\rho=0$ своего максимального значения и монотонно убывающее с увеличением ρ. Всюду, где оно положительно, это решение является классическим и удовлетворяет уравнению

$$\rho^{1-N}(\rho^{N-1}\Theta_A^\sigma\Theta_A')'+\frac{\sigma+1-\beta}{2(1-\beta)}\Theta_A'\rho-\frac{1}{1-\beta}\Theta_A+\Theta_A^\beta=0. \tag{3.4}$$

В центре симметрии задаются краевые условия

$$\Theta_A'(0)=0,\quad \Theta_A(0)=\Theta_0. \tag{3.5}$$

Локальная разрешимость задачи (3.4), (3.5) при малых $\rho>0$ устанавливается путем сведения ее к интегральному уравнению, глобальные свойства (в частности, монотонность) непосредственно вытекают из (3.4). В случае $\sigma>0$, $\beta=1-\sigma$ существует решение, представимое в явном виде

$$\Theta_A(\rho)=\left[\frac{\sigma}{2(2+N\sigma)}(\rho_*^2-\rho^2)\right]^{1/\sigma},\quad 0\leqslant\rho<\rho_*, \tag{3.6}$$

где $\rho_*=(2+N\sigma)/(1+N\sigma)^{1/2}$.

Фиксируем произвольное $\Theta_0\in(0,\ (1-\beta)^{1/(1-\beta)})$ и некоторое $\rho_0>0$ такое, что функция $\Theta_A(\rho)$ определена и положительна на $[0,\rho_0]$. Положим $a_0=\Theta_A(\rho_0)$ (очевидно, что $a_0<\Theta_0<1$). Обозначим через $\Omega(t)\subset\mathbf{R}^N$ шар $\{x\,|\,\|x\|<\rho_0(t_0+t)^{(\sigma+1-\beta)/2(1-\beta)}\}$ и через $\partial\Omega(t)$ — его границу. Рассмотрим для (3.1) краевую задачу в $\mathbf{R}^1_+\times\Omega(t)$ с условиями

$$u(t,x)=a_0(t_0+t)^{\frac{1}{1-\beta}},\quad t>0,\quad x\in\partial\Omega(t), \tag{3.7}$$

$$u(0,x)=u_0(x)>0,\quad x\in\Omega(0);\quad u_0\in C(\overline{\Omega}(0)) \tag{3.8}$$

(первому из них удовлетворяет автомодельное решение (3.2)). Отметим, что требование $u_0(x)>0$ в $\Omega(0)$ является существенным даже в случае $0<\beta<1$, когда $Q(0)=0$, поскольку вогнутость $Q(u)>0$ при малых $u>0$ влечет за собой неединственность решения и отсутствие непрерывной зависимости решения уравнения (3.1) от начальной функции, если $u_0(x)=0$ на множестве ненулевой меры (см. [16]).

Обозначим через $\Theta(t,\xi)$ автомодельное представление решения $u(t,x)$ задачи (3.1), (3.7), (3.8), определяемое пространственно-временной структурой функции (3.2)

$$\Theta(t,\xi)=(t_0+t)^{-\frac{1}{1-\beta}}u\left(t,\ \xi(t_0+t)^{\frac{\sigma+1-\beta}{2(1-\beta)}}\right). \tag{3.9}$$

В следующей теореме показано, что автомодельное решение (3.2) является асимптотически устойчивым *) относительно произвольных возмущений начальной функции.

Теорема 3.1. *Справедлива оценка*

$$\|\Theta(t,\xi)-\Theta_A(\xi)\|_{C_\xi}=O(t^{-1})\underset{t\to+\infty}{\to}0. \tag{3.10}$$

*) Здесь и далее под устойчивостью понимается сходимость $\Theta(t,\xi)\to\Theta_A(\xi)$ при $t\to+\infty$ (или при $t\to T^-$, если рассматриваются режимы с обострением). Такое определение устойчивости является общепринятым и часто единственно возможным; см. [8] и приведенный там список литературы.

Положим $\alpha=(\sigma+1-\beta)/2(1-\beta)$ и введем обозначения $u_A^{\pm}(t, x)=$ $=(t_{\pm}+t)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta_A(\xi_{\pm})$, $\xi_{\pm}=\dfrac{x}{(t_{\pm}+t)^{\alpha}}$, $\Omega_{\pm}(t)=\{x\in\mathbf{R}^N \mid \|x\|<\rho_0(t_{\pm}+t)^{\alpha}\}$, где t_+ и t_- — положительные постоянные, причем $t_+>t_-$. Идея доказательства теоремы состоит в построении двусторонней оценки решения задачи (3.1), (3.7), (3.8)

$$u_A^-(t, x)\leqslant u(t, x)\leqslant u_A^+(t, x), \tag{3.11}$$

из которой затем предельным переходом $t\to+\infty$ можно вывести оценку скорости сходимости (3.10).

Нам понадобится следующая лемма, справедливость которой вытекает из анализа уравнения (3.1) в точках достижения функцией $u(t, x)$ экстремума по x.

Лемма 3.1. *При любых $t\geqslant 0$ справедлива оценка*

$$\inf_{x\in\Omega(t)} u(t, x)=\min\{u|_{\partial\Omega(t)}, \ [(u_m^0)^{1-\beta}+(1-\beta)t]^{\frac{1}{1-\beta}}\}, \tag{3.12}$$

где $u_m^0=\inf\limits_{x\in\Omega(0)} u_0(x)>0$.

Замечание. При всех достаточно больших $t>0$ правая часть (3.12) равна $u|_{\partial\Omega(t)}$.

Доказательство теоремы 3.1. Положим

$$t_*=\max\left\{\tau>0 \,|\, \tau^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta_A\left(\frac{x}{\tau^{\alpha}}\right)\leqslant u_0(x), \ x\in\Omega(0)\right\},$$

$$t^*=\min\left\{\tau>0 \,|\, \tau^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta_A\left(\frac{x}{\tau^{\alpha}}\right)\geqslant u_0(x), \ x\in\Omega(0)\right\}$$

(в сделанных предположениях $0<t_*\leqslant t^*<+\infty$) и $t_-=\min\{t_0, t_*, (u_m^0)^{(1-\beta)}/(1-\beta)\}$, $t_+=\max\{t_0, t^*\}$. Без труда проверяется, что $u_0(x)\leqslant$ $\leqslant u_A^+(0, x)$, $x\in\Omega(0)$ и $u(t, x)\leqslant u_A^+(0, x)$ на $\partial\Omega(t)$. Отсюда на основании принципа максимума заключаем, что

$$u(t, x)\leqslant u_A^+(t, x), \quad (t, x)\in\mathbf{R}_+^1\times\Omega(t). \tag{3.13}$$

Также нетрудно видеть, что $u_0(x)\geqslant u_A^-(0, x)$ в $\Omega_-(0)$. Поскольку $t_-\leqslant$ $\leqslant(u_m^0)^{(1-\beta)}/(1-\beta)$ и $a_0<(1-\beta)^{1/(1-\beta)}$, из оценки (3.12) вытекает, что $u(t, x)\geqslant u_A^-(t, x)$ на $\partial\Omega_-(t)$. Поэтому

$$u(t, x)\geqslant u_A^-(t, x), \quad (t, x)\in\mathbf{R}_+^1\times\Omega_-(t). \tag{3.14}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$u(t, x)\geqslant a_0(t_-+t)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (t, x)\in\mathbf{R}_+^1\times(\overline{\Omega}(t)\setminus\Omega_-(t)). \tag{3.15}$$

Суммируя оценки (3.13)—(3.15), получаем $u_A^-(t, x)\leqslant u(t, x)\leqslant u_A^+(t, x)$, $(t, x)\in\mathbf{R}_+^1\times\Omega_-(t)$, $a_0(t_-+t)^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant u(t, x)\leqslant u_A^+(t, x)$, $(t, x)\in\mathbf{R}_+^1\times(\overline{\Omega}(t)\setminus$ $\setminus\Omega_-(t))$. Используя обозначение (3.9), приведем эти оценки к такому виду:

$$\left(1+\frac{t_--t_0}{t_0+t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta_A(\xi_-)-\Theta_A(\xi)\leqslant\Theta(t, \xi)-\Theta_A(\xi)\leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t_+-t_0}{t_0+t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \Theta_A(\xi_+)-\Theta_A(\xi), \quad (t,\ x)\in \mathbf{R}^1_+\times\Omega_-(t), \tag{3.16}$$

$$a_0\left(1+\frac{t_--t_0}{t_0+t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}-\Theta_A(\xi)\leqslant\Theta(t,\ \xi)-\Theta_A(\xi)\leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t_+-t_0}{t_0+t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \Theta_A(\xi_+)-\Theta_A(\xi), \quad (t,\ x)\in \mathbf{R}^1_+\times(\overline{\Omega}(t)\setminus\Omega_-(t)). \tag{3.17}$$

Произведем теперь предельный переход. Прежде всего отметим, что

при $t\to+\infty$ $\left(1+\frac{t_\pm-t_0}{t_0+t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}=1+O(t^{-1})$,

$$\xi_\pm=\frac{x}{(t_\pm+t)^\alpha}=\xi\frac{1}{\left(1+\frac{t_\pm-t_0}{t_0+t}\right)^\alpha}=\xi(1+O(t^{-1})),$$

$$|\Theta_A(\xi_\pm)-\Theta_A(\xi)|\leqslant\max_{\rho\in[0,\ \rho_0]}|\Theta'_A(\rho)|\,|\,\|\xi_\pm\|-\|\xi\|\,|=O(t^{-1})$$

(автомодельная координата ξ здесь считается фиксированной). Очевидно, что

$$\|\Theta-\Theta_A\|_{C_\xi}=\max\left\{\|\Theta-\Theta_A\|_{C_x(\Omega_-(t))},\ \|\Theta-\Theta_A\|_{C_x(\overline{\Omega}(t)\setminus\Omega_-(t))}\right\}.$$

Пусть $x\in\Omega_-(t)$. Тогда из (3.16) получаем $\Theta(t,\ \xi)-\Theta_A(\xi)\geqslant(1+O(t^{-1}))\Theta_A(\xi_-)-\Theta_A(\xi)=\Theta_A(\xi_-)-\Theta_A(\xi)+O(t^{-1})=O(t^{-1})$, $\Theta(t,\ \xi)-\Theta_A(\xi)\leqslant(1+O(t^{-1}))\Theta_A(\xi_+)-\Theta_A(\xi)=O(t^{-1})$, т. е. $\|\Theta-\Theta_A\|_{C_x(\Omega_-(t))}=O(t^{-1})$ при $t\to+\infty$.

Пусть теперь $x\in\Omega(t)\setminus\Omega_-(t)$. Тогда из (3.17) так же, как в предыдущем случае, будем иметь $\Theta(t,\ \xi)-\Theta_A(\xi)\leqslant O(t^{-1})$, $\Theta(t,\ \xi)-\Theta_A(\xi)\geqslant a_0(1+O(t^{-1}))-\Theta_A(\xi)\geqslant a_0-\Theta_A(\xi)|_{\partial\Omega_-(t)}+O(t^{-1})$. Однако $\Theta_A(\xi)|_{\partial\Omega_-(t)}=\Theta_A\left(\rho^0\frac{(t_-+t)^\alpha}{(t_0+t)^\alpha}\right)=\Theta_A(\rho_0(1+O(t^{-1})))=\Theta_A(\rho_0)+O(t^{-1})$ и поэтому $\Theta(t,\ \xi)-\Theta_A(\xi)=O(t^{-1})$ при $x\in\Omega(t)\setminus\Omega_-(t)$, $t\to+\infty$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Указанным способом нетрудно доказать устойчивость решения (3.2) относительно «малых» возмущений граничного режима. Например, доказательство теоремы и оценка (3.10) остаются справедливыми, если (3.7) заменить произвольным граничным условием, удовлетворяющим неравенствам

$$a_0(t_-+t)^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant u|_{\partial\Omega(t)}\leqslant a_0(t_++t)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Замечание 2. Из сходимости $\Theta(t,\ \xi)\to\Theta_A(\xi)$ при $t\to+\infty$, в частности, вытекает, что решения $\Theta_A(\rho)$ задачи (3.4), (3.5), отвечающие различным $\Theta_0\in(0,\ (1-\beta)^{1/(1-\beta)})$, не могут пересекаться. Иными словами, теорема 3.1 устанавливает единственность решения задачи для уравнения (3.4) с условием $\Theta'_A(0)=0$, $\Theta_A(\rho_0)=a_0\in(0,\ (1-\beta)^{1/(1-\beta)})$.

Замечание 3. Похожий способ доказательства асимптотической устойчивости автомодельного решения на основе вывода двусторонней оценки типа (3.11) использовался в [17] при исследовании задачи (здесь Ω — полупространство $\mathbf{R}^N\cap\{x_1>0\}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-\frac{1}{p}u^{1+p},\quad t>0,\quad x\in\Omega,$$

$$u(t,x)=0,\quad x\in\partial\Omega=\{x_1=0\};\quad u(0,x)=u_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{3.18}$$

где $p>0$ — постоянная. Автомодельное решение здесь имеет вид $u_A(t,x)=(t_0+t)^{-1/p}g(x_1/[2(t_0+t)]^{1/2})$, где функция $g(\xi)$ такова, что $g''+\xi g'+2p^{-1}g(1-g^p)=0$, $g(0)=0$, $g(\xi)\to 1$ при $\xi\to\infty$. В [17] доказано существование функции g и при определенных ограничениях на начальную функцию $u_0(x)$ установлена асимптотическая устойчивость $u_A(t,x)$, в частности показано, что

$$u(t,x)=2^{-\frac{1}{2}}g'(0)\,x_1t^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}[1+O(t^{-\frac{1}{2}})]$$

при $t\to\infty$ равномерно по x в любой области $x\in\mathbf{R}^N\cap\{0\leqslant x_1\leqslant M\}$.

В заключение этого пункта отметим, что в случае $\sigma>0$, $\beta=1-\sigma$ уравнение (3.1) допускает более широкое, чем (3.2), семейство решений (по-видимому, не инвариантных [1—3]), представимых в явном виде *)

$$u_A(t,x)=\psi(t)\Theta_A(\xi),\quad \xi=\frac{x}{\varphi(t)}, \tag{3.19}$$

где

$$\psi(t)=(t_0+t)^{\frac{1}{\sigma}}\{1+C(t_0+t)^{-\frac{2(1+N\sigma)}{(2+N\sigma)}}\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\varphi(t)=(t_0+t)\{1+C(t_0+t)^{-\frac{2(1+N\sigma)}{(2+N\sigma)}}\}^{\frac{1}{2}},$$

C — произвольная постоянная, и функция $\Theta_A(\xi)$ определяется по формуле (3.6). При $t\to+\infty$ решения (3.19) по своим свойствам практически не отличаются от (3.2).

2. **Случай** $\beta=1$. При линейной функции $Q(u)=u$ уравнение (3.1) допускает семейство подходящих автомодельных решений

$$u_A(t,x)=\sigma^{-\alpha}\exp[(1+\alpha\sigma)t]\Theta_A(\xi),\quad \xi=\frac{\sigma^{\frac{1+\alpha\sigma}{2}}x}{\exp\left[\frac{\sigma(1+\alpha\sigma)}{2}t\right]}, \tag{3.20}$$

где $\alpha\in\left(-\frac{1}{\sigma},\ 0\right)$ — произвольная постоянная и функция $\Theta_A\geqslant 0$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\xi(\Theta_A^\sigma\nabla_\xi\Theta_A)+\frac{1+\alpha\sigma}{2}\nabla_\xi\Theta_A\,\xi-\alpha\Theta_A=0. \tag{3.21}$$

Если $\sigma=0$, то существуют также и такие решения:

$$u_A(t,x)=\{(t_0+t)^{-\gamma}\exp t\}\Theta_A(\xi),\quad \xi=\frac{x}{(t_0+t)^{1/2}}. \tag{3.22}$$

Здесь $\gamma>0$ — постоянная, функция $\Theta_A\geqslant 0$ такова, что

$$\Delta_\xi\Theta_A+\frac{1}{2}\nabla_\xi\Theta_A\,\xi+\gamma\Theta_A=0. \tag{3.23}$$

Исследование асимптотической устойчивости этих решений можно провести так же, как в предыдущем пункте, формулируя краевые за-

*) Подобные решения уравнения (1.1) при $k(u)=u^\sigma$, $\sigma>0$ со стоком $Q(u)=-u^{1-\sigma}$ построены в [18, 19].

дачи в соответствующих областях с подвижными границами (предварительно устанавливается существование радиально симметричных немонотонных решений уравнений (3.21) и (3.23)). Например, нетрудно показать, что для устойчивости (3.20) в L^1_ξ достаточно, чтобы $\alpha > -1/(2+N\sigma)$ (при этом предполагается, что $u_0(x) \leqslant u_A(0, x)$ в $\Omega(0)$). Однако здесь появляется новая возможность — рассмотреть автомодельные решения задачи Коши. При $\beta < 1$ уравнение (3.1) таких решений не допускает. Подчеркнем, что исследование устойчивости в случае задачи Коши имеет интересные особенности.

Мы ограничимся анализом автомодельного решения задачи Коши для одномерного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^1, \tag{3.24}$$

которое при $\sigma > 0$ имеет вид (ему отвечает $\alpha = -1/(\sigma+2)$ в (3.20))

$$u_A(t, x) = \sigma^{\frac{1}{\sigma+2}} \exp\left[\frac{2t}{\sigma+2}\right] \Theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma^{\frac{1}{\sigma+2}} x}{\exp\left[\frac{\sigma t}{\sigma+2}\right]}, \tag{3.25}$$

где $\Theta_A(\xi) = \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\xi_0^2 - \xi^2)^+\right]^{1/\sigma}$, $\xi \in \mathbf{R}^1$ (здесь введено обозначение $(g)^+ = \max\{0, g\}$) и постоянная ξ_0 вычисляется по формуле

$$\xi_0 = \left[\frac{2(\sigma+2)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}} \left[\frac{\sigma}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)} E_0\right]^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}, \quad E_0 > 0.$$

При таком выборе ξ_0

$$\|u_A(0, x)\|_{L^1_x(\mathbf{R}^1)} = E_0. \tag{3.26}$$

В случае $\sigma = 0$

$$u_A(t, x) = (t_0 + t)^{-1/2} \exp t\Theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(t_0+t)^{1/2}}, \tag{3.27}$$

где $\Theta_A(\xi) = \frac{E_0}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)$, $\xi \in \mathbf{R}^1$. Это автомодельное решение также удовлетворяет условию (3.26).

Будет показано, что приведенные выше автомодельные решения являются асимптотически устойчивыми относительно возмущений начальной функции, оставляющих неизменной ее «энергию». Рассмотрим для (3.24) задачу Коши с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^1; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}^1) \cap L^1(\mathbf{R}^1). \tag{3.28}$$

В случае $\sigma > 0$ функцию $u_0(x)$ для простоты будем считать финитной, а при $\sigma = 0$ — предполагать, что $u_0(x) = O(\exp(-x^2))$, $x \to \infty$. Автомодельное представление $\Theta(t, \xi)$ решения задачи (3.24), (3.28) определим обычным образом в соответствии с пространственно-временной структурой функций (3.25) или (3.27), т. е. в случае $\sigma > 0$ положим

$$\Theta(t, \xi) = \sigma^{-\frac{1}{\sigma+2}} \exp\left[-\frac{2t}{\sigma+2}\right] u\left(t, \xi\sigma^{-\frac{1}{\sigma+2}} \exp\left[\frac{\sigma t}{\sigma+2}\right]\right)$$

и при $\sigma = 0$ $\Theta(t, \xi) = (t_0 + t)^{1/2} \exp(-t) u(t, \xi(t_0+t)^{1/2})$.

Теорема 3.2. *Пусть начальная функция $u_0(x)$ в (3.28) такова, что*

$$\|u_0\|_{L^1_x(\mathbf{R}^1)}=E_0. \tag{3.29}$$

Тогда в случае $\sigma>0$ справедлива оценка

$$\|\Theta(t,\xi)-\Theta_A(\xi)\|_{h_\xi^{-1}(\mathbf{R}^1)}=O\left\{\exp\left[-\frac{\sigma t}{2(\sigma+2)}\right]\right\}\underset{t\to+\infty}{\to}0. \tag{3.30}$$

Если же $\sigma=0$, то

$$\|\Theta(t,\xi)-\Theta_A(\xi)\|_{h_\xi^{-1}(\mathbf{R}^1)}=O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)\underset{t\to+\infty}{\to}0. \tag{3.30'}$$

Замечание 1. Условие (3.29) обеспечивает однозначность выбора функции $\Theta_A(\xi)$ в (3.30), (3.30′), т. е. единственность автомодельного решения, описывающего асимптотические свойства решения рассматриваемой задачи Коши.

Доказательство. Рассмотрим случай $\sigma>0$, при $\sigma=0$ доказательство проводится аналогично. Положим $u=\exp tv$, $u_A=\exp tv_A$ и сделаем преобразование независимой переменной $\tau=\sigma^{-1}\exp(\sigma t):\mathbf{R}^1_+\to\to(\sigma^{-1},+\infty)$. Функции v и v_A удовлетворяют одному и тому же уравнению $\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(v^\sigma\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, $t>0$, $x\in\mathbf{R}^1$, причем $v_A=\tau^{-1/(\sigma+2)}\Theta_A(\zeta)$, $\zeta=x/\tau^{1/(\sigma+2)}$, является его точным автомодельным решением. Положим $z=v-v_A$. В силу (3.26) и (3.29) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z(\tau,x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z(\sigma^{-1},x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[u_0(x)-u_A(0,x)]\,dx=0$$

при любых $\tau>\sigma^{-1}$, и поэтому в сделанных предположениях, как нетрудно убедиться, справедливо включение $z\in h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)$, $\tau\geqslant\sigma^{-1}$. Скалярно умножая уравнение $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{\sigma+1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^{\sigma+1}-v_A^{\sigma+1})$, $t>0$, $x\in\mathbf{R}^1$ на z в $h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2_{h_x^{-1}}=-\frac{1}{\sigma+1}(v^{\sigma+1}-v_A^{\sigma+1},\ v-v_A)\leqslant 0.$$

Отсюда

$$\|z(\tau)\|_{h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)}\leqslant\|z(\sigma^{-1})\|_{h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)},\quad \tau\geqslant\sigma^{-1}. \tag{3.31}$$

Учитывая теперь, что

$$\|z(\tau)\|_{h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)}=\tau^{\frac{1}{2(\sigma+2)}}\left\|\Theta\left(\frac{\ln(\sigma\tau)}{\sigma},\zeta\right)-\Theta_A(\zeta)\right\|_{h_\zeta^{-1}(\mathbf{R}^1)}=$$

$$=\exp\left[\frac{\sigma t}{2(\sigma+2)}\right]\|\Theta(t,\xi)-\Theta_A(\xi)\|_{h_\xi^{-1}(R^1)},$$

из (3.31) получаем оценку скорости сходимости (3.30).

Замечание 2. Отметим, что из ограниченности $z(\tau,\cdot)$ в более сильной, чем $h_x^{-1}(\mathbf{R}^1)$, норме, например $L^2_x(\mathbf{R}^1)$ или $L^1_x(\mathbf{R}^1)$, не следует сходимость $\Theta\to\Theta_A$ при $t\to+\infty$.

3. **Случай $\beta>1$, $\sigma\geqslant0$; неограниченные автомодельные решения.** При $\beta>1$ уравнение (3.1) допускает автомодельные решения

$$u_A(t,x)=(T-t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\Theta_A(\xi),\quad \xi=\frac{x}{(T-t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}}, \tag{3.32}$$

существующие в течение конечного времени $0<t<T<+\infty$. Функция $\Theta_A(\xi)$ в (3.32) удовлетворяет квазилинейному эллиптическому уравнению

$$\nabla_\xi(\Theta_A^\sigma \nabla_\xi\Theta_A) - \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)} \nabla_\xi\Theta_A \xi - \frac{1}{\beta-1} \Theta_A + \Theta_A^\beta = 0. \qquad (3.33)$$

Различные свойства (в частности, свойство локализации при $\beta\geqslant\sigma+1$) автомодельных решений (3.32) задачи Коши изучались в [6, 20—23] (см. также список литературы в [6, 24]). В частности, в [20] для случая $\beta=\sigma+1\ (\sigma>0)$, $N=1$ построено неограниченное автомодельное решение уравнения (3.1), представимое в явном виде

$$u(t, x) = (T-t)^{-1/\sigma}\left\{\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right\}^{1/\sigma}, \quad L=2\pi\frac{(\sigma+1)^{1/2}}{\sigma}.$$

Оно особенно наглядно проявляет свойство локализации.

Исследование разрешимости одномерного аналога уравнения (3.33) на всей оси $\xi\in\mathbf{R}^1$ проводилось в [22, 23, 25]. Отметим, что (3.33) допускает аналитические решения и в многомерном случае. Например, при $\sigma=0$, $\beta=2$ и $6<N<16$ это уравнение, которое принимает вид $\Delta_\xi\Theta_A - \frac{1}{2}\nabla_\xi\Theta_A\xi - \Theta_A + \Theta_A^2 = 0$, имеет радиально симметричное строго положительное и ограниченное в $\mathbf{R}^N$ решение*)

$$\Theta_A(\xi) = \frac{A}{(\|\xi\|^2+a)^2} + \frac{B}{(\|\xi\|^2+a)},$$

где $a=2\left[10\left(1+\frac{N}{2}\right)^{1/2} - (N+14)\right]$, $A=48\left[10\left(1+\frac{N}{2}\right)^{1/2} - (N+14)\right]$, $B=24\left[\left(1+\frac{N}{2}\right)^{1/2} - 2\right]$. Нетрудно видеть, что при $6<N<16$ постоянные a, A, B являются положительными.

В дальнейшем нам понадобится одно легко проверяемое утверждение: при любых $\beta>1$, $\sigma\geqslant0$ существует локальное решение $\Theta_A=\Theta_A(\rho)$, $\rho=\|\xi\|$ задачи

$$\rho^{1-N}(\rho^{N-1}\Theta_A^\sigma\Theta_A')' - \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}\Theta_A'\rho - \frac{1}{\beta-1}\Theta_A + \Theta_A^\beta = 0, \qquad (3.34)$$

$$\Theta_A'(0) = 0, \quad \Theta_A(0) = \Theta_0 > (\beta-1)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \qquad (3.35)$$

причем $\rho=0$ является точкой максимума. Отметим, что функция Θ_A может быть немонотонной (см. [6, 21—25]). Выберем величину $\rho_0>0$ такой, чтобы $a_0=\Theta_A(\rho_0)>0$, и положим

$$\Theta_* = \max_{\rho\in[0,\rho_0]}\Theta_A(\rho), \quad a_* = \min_{\rho\in[0,\rho_0]}\Theta_A(\rho). \qquad (3.36)$$

Обозначая, как обычно, через $\Omega(t)$ шар $\{x\in\mathbf{R}^N \mid \|x\| < \rho_0(T-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}\}$, рассмотрим для (3.1) краевую задачу с условиями

$$u(t, x) = a_0(T-t)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad t\in(0, T), \quad x\in\partial\Omega(t), \qquad (3.37)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x\in\Omega_0(0); \quad u_0\in C(\overline{\Omega}(0)). \qquad (3.38)$$

Автомодельное представление здесь имеет вид

$$\Theta_A(t, \xi) = (T-t)^{\frac{1}{\beta-1}} u\left(t, \xi(T-t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}\right). \qquad (3.39)$$

---

*) Приведенное решение получено по аналогии с решением уравнения типа (3.33) со стоком вместо источника, впервые построенным в [26].

Исследование асимптотической устойчивости решения (3.32) проводится разными способами в случаях $1<\beta<\sigma+1$ $(\sigma>0)$ и $\beta\geqslant\sigma+1$.

Теорема 3.3. *Пусть* $1<\beta<1+N\sigma/(N+2)$. *Пусть, кроме того,* $u_0(x)\leqslant u_A(0, x)$ *в* $\Omega(0)$ *и* *)

$$\delta=\beta\Theta_*^{\beta-1}-\frac{N}{2(\beta-1)}\left[\left(\sigma+1+\frac{2}{N}\right)-\beta\right]<0. \tag{3.40}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\Theta(t, \xi)-\Theta_A(\xi)\|_{L^1_\xi}=O\{(T-t)^{-\delta}\}\underset{t\to T^-}{\to}0. \tag{3.41}$$

Доказательство. В силу предположения $u_0(x)\leqslant u_A(0, x)$, $x\in\Omega(0)$, имеем

$$u(t, x)\leqslant u_A(t, x),\quad (t, x)\in(0, T)\times\Omega(t), \tag{3.42}$$

т. е. $z=u_A-u\geqslant 0$ и, следовательно,

$$\|z\|_{L^1_x}=\int\limits_{\Omega(t)} z(t, x)dx,\quad t\in(0, T). \tag{3.43}$$

Функция z удовлетворяет в $(0, T)\times\Omega(t)$ уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\nabla(u_A^\sigma\nabla u_A-u^\sigma\nabla u)+z\cdot F(t, x), \tag{3.44}$$

где $F(t, x)=\beta\int\limits_0^1(\eta u_A(t, x)+(1-\eta)u(t, x))^{\beta-1}d\eta$, причем в силу (3.42)

$$\max_{x\in\overline{\Omega}(t)} F(t, x)\leqslant\beta\Theta_*^{\beta-1}(T-t)^{-1}. \tag{3.45}$$

Интегрируя равенство (3.44) по $\Omega(t)$, с учетом (3.43) получим

$$\frac{d}{dt}\|z\|_{L^1_x}=\frac{1}{\sigma+1}\int\limits_{\partial\Omega(t)}\frac{\partial}{\partial n}(u_A^{\sigma+1}-u^{\sigma+1})ds+\int\limits_{\Omega(t)} zFdx, \tag{3.46}$$

где $\partial/\partial n$ — обозначение производной по внешней нормали к $\partial\Omega$. Однако в силу (3.42) и равенства $z=0$ на $\partial\Omega(t)$ имеем $\int\limits_{\partial\Omega(t)}\frac{\partial}{\partial n}(u_A^{\sigma+1}-u^{\sigma+1})ds\leqslant 0$, $t\in(0, T)$. Тогда с помощью (3.45) выводим из (3.46) неравенство $\frac{d}{dt}\|z(t)\|_{L^1_x}\leqslant\|z(t)\|_{L^1_x}\beta\Theta_*^{\beta-1}(T-t)^{-1}$, из которого в свою очередь следует, что $\|z(t)\|_{L^1_x}=O\{(T-t)^{-\beta\Theta_*^{\beta-1}}\}$, $t\to T^-$. Поскольку $\|z\|_{L^1_x}=(T-t)^{N[\beta-(\sigma+1+2/N)]/2(\beta-1)}\|\Theta-\Theta_A\|_{L^1_\xi}$, из полученной оценки вытекает справедливость (3.41) и в силу (3.40) — сходимость $\Theta(t, \xi)\to\Theta_A(\xi)$ при $t\to T^-$.

Замечание. Из уравнения (3.34) нетрудно получить, что при $1<\beta\leqslant\sigma+1$ и $\Theta_A(0)=\Theta_0>(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$ имеет место оценка $\Theta_A(\rho)\leqslant\Theta_0$ всюду, где $\Theta_A(\rho)>0$. Поэтому в условиях доказанной теоремы $\Theta_*=\Theta_0$. Отметим, что в силу сходимости $\Theta\to\Theta_A$ при $t\to T^-$ функция Θ_A определена однозначно, поэтому при выполнении условия (3.40), где $\Theta_*=\Theta_0$, кривые $\Theta_A=\Theta_A(\rho)$, отвечающие различным Θ_0, не могут пересекаться.

Теорема 3.4. *Пусть* $\beta\geqslant\sigma+1$, *если* $\sigma>0$, *и* $\beta>1$ *при* $\sigma=0$. *Пусть*

---

*) Ограничение $\beta<1+N\sigma/(N+2)$ обеспечивает существование величин $\Theta_*>(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$, удовлетворяющих (3.40).

*функция $u_0(x)$ является радиально симметричной, $u_0(x) \leqslant u_A(0, x)$ в $\Omega(0)$ и**

$$\delta = \beta\Theta_*^{\beta-1} - a_*\left(\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0}\right)^2 + \frac{N+2}{4(\beta-1)}\left[\beta - \right.$$

$$\left. - \left(\sigma + 1 + \frac{4}{N+2}\right)\right] < 0. \tag{3.47}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\Theta(t, \xi) - \Theta_A(\xi)\|_{H_\xi^{-1}} = O\{(T-t)^{-\delta}\} \underset{t\to T^-}{\to} 0. \tag{3.48}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в сделанных предположениях функция $u(t, x)$ при любых $t \in (0, T)$ является радиально симметричной, удовлетворяет неравенству (3.42) и оценкам

$$\max_{x\in\overline{\Omega}(t)} u(t, x) \leqslant \Theta_*(T-t)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad 0 < t < T,$$

$$\min_{x\in\overline{\Omega}(t)} u(t, x) \geqslant a_*(T-t)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad t \to T^-,$$

причем $z = u_A - u$ принадлежит пространству радиально симметричных функций $H_x^{-1}(\Omega(t))$ (см. § 2).

Умножим скалярно уравнение $\frac{\partial z}{\partial t} = \nabla(u_A^\sigma \nabla u_A - u^\sigma \nabla u) + u_A^\beta - u^\beta$, которому удовлетворяет функция z (отметим, что $z = 0$ на $\partial\Omega(t)$), на $(-\Delta)^{-1}z$. В результате получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, (-\Delta)^{-1}z\right) = -\frac{1}{\sigma+1}(u_A^{\sigma+1} - u^{\sigma+1}, z) +$$

$$+ (u_A^\beta - u^\beta, (-\Delta)^{-1}z). \tag{3.49}$$

Положим $x_0(t) = \rho_0(T-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}$. Тогда $x_0'(t) = -\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)} \times$ $\times \rho_0(T-t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}-1} \leqslant 0$ при $\beta \geqslant \sigma+1$ $(\sigma > 0)$ или $\beta > 1$ $(\sigma = 0)$. Поэтому, как нетрудно проверить (см. § 2),

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, (-\Delta)^{-1}z\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2_{H_x^{-1}(\Omega(t))} - \frac{\varkappa_N}{2}(x_0^{1-N}x_0')(t) \times$$

$$\times \left(\int_0^{x_0(t)} x^{N-1}z(t, x)\,dx\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2_{H_x^{-1}(\Omega(t))}. \tag{3.50}$$

Далее имеем $\frac{1}{\sigma+1}(u_A^{\sigma+1} - u^{\sigma+1}, z) \geqslant a_*^\sigma (T-t)^{-\frac{\sigma}{\beta-1}}\|z\|^2_{L_x^2}$. Воспользуемся теперь оценкой

$$\|\nabla z\|^2_{L_x^2(\Omega(t))} \geqslant \lambda_1(t)\|z\|^2_{L_x^2(\Omega(t))}, \tag{3.51}$$

справедливой при любых $z \in H_0^1(\Omega(t))$. Здесь $\lambda_1(t) > 0$ — первое собственное значение задачи $\Delta\psi + \lambda_1\psi = 0$, $x \in \Omega(t)$; $\psi|_{\partial\Omega(t)} = 0$, определяемое по

---

* Здесь $z_N^{(1)} > 0$ — первый (наименьший) положительный корень функции Бесселя $J_{\frac{N-2}{2}}$.

формуле $\lambda_1(t) = \left[\frac{2z_N^{(1)}}{D(t)}\right]^2$, где $D(t)$ — диаметр области $\Omega(t)$. Из (3.51) имеем

$$\|z\|^2_{L^2_x} \geqslant \lambda_1(t)\|z\|^2_{H_x^{-1}}, \quad \lambda_1(t) = \left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0}\right]^2 (T-t)^{-\frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta-1}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\frac{1}{\sigma+1}(u_A^{\sigma+1} - u^{\sigma+1}, z) \geqslant a_*^\sigma \left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0}\right]^2 (T-t)^{-1}\|z\|^2_{H_x^{-1}}. \tag{3.52}$$

Учитывая, что $z = u_A - u \geqslant 0$ в $\Omega(t)$, нетрудно вывести такую оценку:

$$(u_A^\beta - u^\beta, (-\Delta)^{-1}z) \leqslant \beta\Theta_*^{\beta-1}(T-t)^{-1}\|z\|^2_{H_x^{-1}}. \tag{3.53}$$

С помощью (3.50), (3.52), (3.53) из (3.49) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|z\|_{H_x^{-1}} \leqslant (T-t)^{-1}\left\{\beta\Theta_*^{\beta-1} - a_*\left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0}\right]^2\right\}\|z\|_{H_x^{-1}},$$

из которого следует, что

$$\|z(t)\|_{H_x^{-1}} = O\left\{(T-t)^{-\beta\Theta_*^{\beta-1}+a_*\left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0}\right]^2}\right\}, \quad t \to T^-. \tag{3.54}$$

Учитывая теперь, что (см. § 2, п. 4)

$$\|z\|_{H_x^{-1}} = \|\Theta - \Theta_A\|_{H_\xi^{-1}}(T-t)^{-\frac{1}{\beta-1}+\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}\left(1+\frac{N}{2}\right)},$$

из (3.54) выводим (3.48).

Замечание 1. В случае $\beta \geqslant \sigma+1$ устойчивость $u_A(t, x)$ в норме C_ξ или L_ξ^1 применяемыми выше методами доказать, по-видимому, нельзя.

Замечание 2. В условиях теорем 3.3 и 3.4 радиально симметричные решения Θ_A уравнения (3.34), $\Theta_A(\rho_0) = a_0$ являются единственными. Нетрудно показать, что при $\beta \geqslant \sigma+1$ решения Θ_A, отвечающие различным (но близким) значениям Θ_*, могут пересекаться, поэтому ограничение (3.47) на величины Θ_* и a_* является существенным (это особенно просто устанавливается в случае $\beta = \sigma+1$).

4. Случай $\beta > 1$, $\sigma \geqslant 0$; глобальные автомодельные решения. При $\beta > 1$ уравнение (3.1) допускает, кроме (3.32), автомодельные решения (3.2), определенные для всех $t > 0$. Функция Θ_A при этом удовлетворяет уравнению (3.3). Нетрудно показать, что в случае $\beta > 1$ при любых $\Theta_0 > 0$ существует локальное решение*) $\Theta_A = \Theta_A(\rho) \geqslant 0$, $\rho = \|\xi\|$ задачи (3.4), (3.5), причем всюду в области определения оно является монотонно убывающим. Тогда, определяя по формулам (3.7), (3.8) краевые условия для уравнения (3.1), которым удовлетворяет и автомодельное решение (3.2), можно исследовать его асимптотическую устойчивость. Остановимся кратко на некоторых результатах этого исследования.

В предположении $u_0(x) \leqslant u_A(0, x)$ в $\Omega(0)$ так же, как при доказательстве теоремы 3.3, устанавливается, что для устойчивости $u_A(t, x)$ в норме L_ξ^1 относительно возмущений начальной функции достаточно, чтобы

$$\delta = \beta\Theta_0^{\beta-1} - \frac{N}{2(\beta-1)}\left[\beta - \left(\sigma+1+\frac{2}{N}\right)\right] < 0. \tag{3.55}$$

*) Нелокальная разрешимость этой задачи при $\sigma=0$ на всей оси $\rho \in R_+^1$ изучалась в [27], численное исследование в случае $N=1$ проводилось в [22, 23] ($\sigma > 0$) и в [28] ($\sigma = 0$).

При этом $\|\Theta(t, \xi)-\Theta_A(\xi)\|_{L^1_\xi}=O(t^\delta)\to 0$, $t\to+\infty$. Естественно, значения $\Theta_0>0$, удовлетворяющие (3.55), существуют только в случае

$$\beta>\sigma+1+\frac{2}{N}. \tag{3.56}$$

Заметим, что условие (3.55) обеспечивает строгую монотонность зависимости решения задачи (3.4), (3.5) от величины Θ_0.

Неравенство (3.55), в принципе, может обеспечивать асимптотическую устойчивость автомодельного решения (3.2) задачи Коши для (3.1). Разумеется, предварительно необходимо убедиться, что при некотором $\Theta_0>0$ существует положительное решение задачи (3.4), (3.5), определенное при всех $\rho>0$ и такое, что $\rho^{N-1}\Theta_A(\rho)\in L^1(\mathbf{R}^1)$. В случае $\sigma=0$, как установлено в [27], такое решение существует, если $1+2/N<\beta<\infty$ для $N=1$, 2 и $1+2/N<\beta<1+4/(N-2)$ для $N\geqslant 3$ (отметим, что здесь ограничение снизу на величину β совпадает с (3.56) при $\sigma=0$). В случае $1<\beta\leqslant 1+2/N$ таких решений нет, более того, при указанных значениях β все нетривиальные неотрицательные решения задачи Коши для (3.1), $\sigma=0$ являются неограниченными [15, 29] (напротив, если $\beta>1+2/N$, то задача Коши имеет глобальные решения при достаточно малых начальных функциях $u_0(x)\geqslant 0$ [15]).

В случае $\sigma>0$ ограничение (3.56) также является необходимым для существования решения Θ_A с указанными выше свойствами. Это нетрудно установить непосредственно из вида уравнения (3.4), интегрируя обе его части по интервалу $(0, +\infty)$ с весом ρ^{N-1} (см. [22, 23]), об этом же свидетельствует отсутствие глобальных решений задачи Коши для (4.1) при $1<\beta<\sigma+1+2/N$ [30] (в [30] также показано, что при $\beta>\sigma+1+2/N$ такие решения существуют, если $u_0(x)$ достаточно мала).

В случае $\beta>\sigma+1+2/N$ исследование устойчивости решения (4.2) удобно проводить в норме L^1_ξ (при $\sigma=0$ можно также использовать пространство L^2_ξ, для оценки $\|\nabla z\|^2_{L^2_x}$ в этом случае применяется неравенство (3.51)). Если же $1<\beta\leqslant\sigma+1$ $(\sigma>0)$, то подходящим пространством является H^{-1}_ξ. Тем же способом, что при доказательстве теоремы 3.4, устанавливается, что для асимптотической устойчивости решения (3.2) достаточно, чтобы (ср. (3.47))

$$\delta=\beta\Theta_0^{\beta-1}-a_0\left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0}\right]^2+\frac{N+2}{4(\beta-1)}\left[\beta-\left(\sigma+1+\frac{4}{N+2}\right)\right]<0.$$

В заключение отметим, что дополнительные автомодельные решения появляются у уравнения (1.1) со степенными коэффициентами $k(u)=u^\sigma$, $Q(u)=u^{\sigma+1}+\mu u$, $\mu=\mathrm{const}$, которое легко преобразуется к виду (3.1).

§ 4. ОБ УРАВНЕНИЯХ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВИДА

В этом параграфе рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla(\exp(\sigma u)\nabla u)+\exp(\beta u), \tag{4.1}$$

где $\sigma\geqslant 0$, β — фиксированные постоянные.

1. Случай $\beta\leqslant 0$. При $\beta\leqslant 0$ уравнение (4.1) имеет подходящие инвариантные решения следующего вида: если $\beta<0$, то это решения

$$u_A(t, x)=\ln\left[(t_0+t)^{-1/\beta}\Theta_A(\xi)\right],\quad \xi=\frac{x}{(t_0+t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}}}, \tag{4.2}$$

где функция Θ_A удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\Theta_A \nabla_\xi (\Theta_A^{\sigma-1} \nabla_\xi \Theta_A) + \frac{\beta-\sigma}{2\beta} \nabla_\xi \Theta_A \xi + \frac{1}{\beta} \Theta_A + \Theta_A^{\beta+1} = 0.$$

Если же $\beta=0$, то существует целое семейство подходящих решений (предполагается, что $\sigma>0$)

$$u_A(t, x) = \ln [\sigma^{-\alpha} \exp [(1+\alpha\sigma)(t_0+t)] \Theta_A(\xi)], \tag{4.3}$$
$$\xi = \sigma^\alpha x / \exp \left[\frac{\sigma(1+\alpha\sigma)}{2} (t_0+t) \right].$$

Здесь $\alpha \in (-1/\sigma, 0)$ — произвольная постоянная. Подставляя выражение (4.3) в (4.1), получаем для Θ_A уравнение

$$\Theta_A \nabla_\xi (\Theta_A^{\sigma-1} \nabla_\xi \Theta_A) + \frac{1+\alpha\sigma}{2} \nabla_\xi \Theta_A \xi - \alpha \Theta_A = 0.$$

Сформулируем теорему об асимптотической устойчивости решений (4.2). Как всегда, нам понадобится локальное радиально симметричное решение $\Theta_A = \Theta_A(\rho)$, $\rho = \|\xi\|$, достигающее при $\rho=0$ максимума. Оно является решением задачи $\Theta_A \rho^{1-N} (\rho^{N-1} \Theta_A^{\sigma-1} \Theta_A')' + \frac{\beta-\sigma}{2\beta} \Theta_A' \rho + \frac{1}{\beta} \Theta_A + \Theta_A^{\beta+1} = 0$, $\Theta_A'(0) = 0$, $\Theta_A(0) = \Theta_0 \in (0, (-\beta)^{-1/\beta})$. Нетрудно убедиться, что при $\Theta_0 < (-\beta)^{-1/\beta}$ функция Θ_A является монотонно убывающей. Фиксируем $\rho_0 > 0$ такое, что $a_0 = \Theta_A(\rho_0) > 0$, положим $\Omega(t) = \{x \mid \|x\| < \rho_0 (t_0+t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}}\}$ и рассмотрим для (4.1) краевую задачу с условиями

$$u(t, x) = \ln [a_0 (t_0+t)^{-1/\beta}], \quad t>0, \quad x \in \partial\Omega(t), \tag{4.4}$$
$$u(0, x) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega(0); \quad u_0 \in C(\overline{\Omega}(0)). \tag{4.5}$$

Постоянную $t_0>0$ в (4.4) выберем таким образом, чтобы $a_0 t_0^{-1/\beta} \geqslant 1$. Тогда выражения, стоящие в правых частях (4.2), (4.4), имеют смысл и $u_A(t, x) > 0$, $u(t, x) > 0$ всюду в $\mathbb{R}_+^1 \times \Omega(t)$. Автомодельное представление решения задачи (4.1), (4.4), (4.5) определим по формуле

$$\Theta(t, \xi) = (t_0+t)^{1/\beta} \exp [u(t, \xi (t_0+t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}})].$$

Теорема 4.1. *Справедлива оценка*

$$\|\Theta(t, \xi) - \Theta_A(\xi)\|_{C_\xi} = O(t^{-1}) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.6}$$

При доказательстве теоремы используется преобразование $u = \ln v$, которое приводит (4.1) к «степенному» виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \nabla (v^{\sigma-1} \nabla v) + v^{\beta+1}, \ t>0, \ x \in \Omega(t). \tag{4.7}$$

Тогда $\Theta(t, \xi) = (t_0+t)^{1/\beta} v(t, \xi (t_0+t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}})$. В остальном к оценке скорости сходимости (4.6) приводят рассуждения, применявшиеся при доказательстве теоремы 3.1.

Устойчивость решений (4.3) при $\beta=0$ устанавливается несколько иными способами. Например, справедливо следующее утверждение, которое доказывается так же, как теорема 3.3 (формулировка краевой задачи и определение автомодельного представления, отвечающего (4.3), проводится здесь обычным образом).

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha \in (-1/\sigma, 0)$ и $u_0(x) \leqslant u_A(0, x)$ в $\Omega(0)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\Theta(t,\xi)-\Theta_A(\xi)\|_{L^1_\xi}=O\left\{\exp\left[-\frac{\sigma N}{2}(1+\alpha\sigma)t\right]\right\}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

При $\alpha\leqslant-1/\sigma$ сходимость удобно определять в норме пространства H^{-1}_ξ по примеру того, как это делается в теореме 3.4.

2. **Случай $\beta>0$, $\sigma\geqslant0$; неограниченные инвариантные решения.** В этом пункте рассматриваются инвариантные решения

$$u_A(t,x)=\ln\left[(T-t)^{-1/\beta}\Theta_A(\xi)\right],\quad \xi=\frac{x}{(T-t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}}},\tag{4.8}$$

определенные на интервале $0<t<T<+\infty$, где

$$\Theta_A\nabla_\xi(\Theta_A^{\sigma-1}\nabla_\xi\Theta_A)-\frac{\beta-\sigma}{2\beta}\nabla_\xi\Theta_A\xi-\frac{1}{\beta}\Theta_A+\Theta_A^{\beta+1}=0.$$

Локальное радиально симметричное решение Θ_A удовлетворяет задаче

$$\Theta_A\rho^{1-N}(\rho^{N-1}\Theta_A^{\sigma-1}\Theta_A')'-\frac{\beta-\sigma}{2\beta}\Theta_A'\rho-\frac{1}{\beta}\Theta_A+\Theta_A^{\beta+1}=0,\ \Theta_A'(0)=0,\ \Theta_A(0)=$$
$=\Theta_0$, где $\Theta_0>\beta^{-1/\beta}$ (тогда $\rho=0$ является точкой максимума). При $\beta=\sigma$ решение этой задачи имеет вид

$$\Theta_A(\rho)=\left\{\left[\frac{1}{\sigma}+AJ_{\frac{N-2}{2}}(\sigma^{1/2}\rho)\right]^+\right\}^{1/\sigma},\tag{4.9}$$

где $A>0$ — постоянная. Фиксируем $\rho_0\in\mathbf{R}^1_+$ такое, что $a_0=\Theta_A(\rho_0)>0$, и, учитывая, что $\Theta_A(\rho)$ может быть немонотонной, введем обозначения (3.36). Будем считать, что $a_*T^{-1/\beta}\geqslant1$ (тогда $u_A(t,x)\geqslant0$ в $(0,T)\times\times\Omega(t)$). Определим обычным образом область $\Omega(t)$, краевые условия $u(t,x)=\ln[a_0(T-t)^{-1/\beta}]$, $t>0$, $x\in\partial\Omega(t)$, $u(0,x)=u_0(x)>0$, $x\in\Omega(0)$; $u_0\in C(\overline{\Omega}(0))$ и автомодельное представление

$$\Theta(t,\xi)=(T-t)^{1/\beta}\exp\left[u(t,\xi(T-t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}})\right].$$

Теорема 4.3. *Пусть $0<\beta<N\sigma/(N+2)$. Пусть $u_0(x)\leqslant u_A(0,x)$ в $\Omega(0)$ и* *)

$$\delta=\beta\Theta_*^\beta+\frac{\beta-\sigma}{2\beta}N<0.\tag{4.10}$$

Тогда $\Theta(t,\xi)\to\Theta_A(\xi)$, $t\to T^-$, причем справедлива оценка (3.41).

Замечание. Нетрудно показать, что при $\beta\in(0,\sigma)$ справедливо равенство $\Theta_*=\Theta_0$.

Доказательство. Из уравнения для функции $z=u_A-u\geqslant0$ следует, что (см. доказательство теоремы 3.3)

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|_{L^1_x}\leqslant\|z(t)\|_{L^1_x}\beta\Theta_*^{\beta-1}(T-t)^{-1},$$

т. е.

$$\|z(t)\|_{L^1_x}=O\{(T-t)^{-\beta\Theta_*^\beta}\},\quad t\to T^-.\tag{4.11}$$

Нетрудно проверить, что

$$\|u_A-u\|_{L^1_x}\geqslant\frac{1}{\Theta_*}\|\Theta_A-\Theta\|_{L^1_x}=(T-t)^{\frac{N(\beta-\sigma)}{2\beta}}\frac{1}{\Theta_*}\|\Theta_A-\Theta\|_{L^1_\xi}.\tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) вытекает (4.10).

*) При выполнении условия $\beta<N\sigma/(N+2)$ всегда существуют $\Theta_*>\beta^{-1/\beta}$, удовлетворяющие неравенству (4.10).

Теорема 4.4. *Пусть $\beta \geqslant \sigma$, если $\sigma > 0$, и $\beta > 0$ при $\sigma = 0$. Пусть функция $u_0(x)$ является радиально симметричной, $u_0(x) \leqslant u_A(0, x)$ в $\Omega(0)$ и*

$$\delta = \beta\Theta_*^\beta - a_*^\sigma \left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0} \right]^2 + \frac{\beta - \sigma}{2\beta} \left(1 + \frac{N}{2} \right) < 0. \quad (4.13)$$

Тогда $\Theta(t, \xi) \to \Theta_A(\xi)$, $t \to T^-$, *причем справедлива оценка (3.48).*

Доказательство. Тем же, что при доказательстве теоремы 3.4, способом получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z(t)\|^2_{H_x^{-1}} \geqslant -\frac{1}{\sigma} (\exp(\sigma u_A) - \exp(\sigma u), z) +$$
$$+ (\exp(\beta u_A) - \exp(\beta u), \quad (-\Delta)^{-1} z). \quad (4.14)$$

Однако нетрудно видеть, что в силу (3.51) $(\exp(\sigma u_A) - \exp(\sigma u), z) \geqslant \sigma a_*^\sigma \times$ $\times (T-t)^{-\frac{\sigma}{\beta}} \|z\|^2_{L_x^2} \geqslant \sigma a_*^\sigma \left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0} \right]^2 (T-t)^{-1} \|z\|^2_{H_x^{-1}}$ и, кроме того, $(\exp(\beta u_A) -$ $- \exp(\beta u), (-\Delta)^{-1} z) \leqslant \beta\Theta_*^\beta (T-t)^{-1} \|z\|^2_{H_x^{-1}}$. Поэтому из (4.14) получаем оценку $\frac{d}{dt} \|z(t)\|_{H_x^{-1}} \leqslant \left\{ \beta\Theta_*^\beta - a_*^\sigma \left[\frac{z_N^{(1)}}{\rho_0} \right]^2 \right\} (T-t)^{-1}$, из которой с учетом неравенства

$$\|z(t)\|_{H_x^{-1}} \geqslant \frac{1}{\Theta_*} \|\Theta_A - \Theta\|_{H_x^{-1}} = (T-t)^{\frac{\beta-\sigma}{2\beta}\left(1+\frac{N}{2}\right)} \frac{1}{\Theta_*} \|\Theta_A - \Theta\|_{H_\xi^{-1}}$$

выводится (3.48).

Замечание. Покажем, что ограничение (4.13) на величины Θ_*, a_*, ρ_0 является существенным для устойчивости инвариантного решения в классе начальных функций $\{u_0 > 0 \mid u_0(x) \leqslant u_A(0, x)$ в $\Omega(0)\}$. Рассмотрим для простоты случай $\beta = \sigma$. Пусть $\Theta_A(\rho)$ является монотонной при $\rho \in (0, \rho_0)$, тогда $\Theta_* = \Theta_0 = \Theta_A(0)$, $a_* = a_0 = \Theta_A(\rho_0)$ и (4.13) дает ограничение сверху на величину ρ_0

$$\rho_0 < z_N^{(1)} \left[\frac{\Theta_A(\rho_0)}{\Theta_A(0)} \right]^{\sigma/2}. \quad (4.15)$$

Это условие действительно необходимо, поскольку, как следует из (4.9), при $\rho_0 = \rho_* = z_N^{(1)}/\sigma^{1/2}$ существует бесконечное множество решений $\Theta_A(\rho)$ со сколь угодно близкими амплитудами $\Theta_A(0)$, удовлетворяющих одним и тем же краевым условиям $\Theta'_A(0) = 0$, $\Theta_A(\rho^*) = \sigma^{-1/2}$. Поэтому об устойчивости $u_A(t, x)$ в этом случае говорить не имеет смысла. В то же время при выполнении (4.15) равенство $\rho_0 = \rho_*$ невозможно.

3. **Случай $\beta > 0$, $\sigma \geqslant 0$; глобальные инвариантные решения.** Не останавливаясь подробно на исследовании инвариантных решений (4.2), которые допускает уравнение (4.1) при $\beta > 0$, отметим лишь, что для их устойчивости в L_ξ^1 достаточно, чтобы

$$\delta = \beta\Theta_0^\beta - \frac{N(\beta - \sigma)}{2\beta} < 0 \quad (\beta > \sigma).$$

При этом $\|\Theta - \Theta_A\|_{L_\xi^1} = O(t^\delta) \to 0$, $t \to +\infty$ (см. доказательство теоремы 4.3).

В заключение этого параграфа отметим, что инвариантные решения имеет также уравнение (1.1) с экспоненциальными коэффициентами $k(u) = \exp(\sigma u)$, $Q(u) = \exp(\sigma u) + \mu$, $\mu = \text{const}$ [1—3]. Простой заменой это уравнение сводится к виду (4.1).

15. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.
16. Fujita H., Watanabe S.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1968, vol. 21, p. 631—652.
17. Пухначев В. В.— Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 1, с. 109—114.
18. Кершнер Р.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1978, vol. 32, p. 301—330.
19. Мартинсон Л. К.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1979, № 4, с. 36—39.
20. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.
21. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
22. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— М., 1977.— 80 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 106).
23. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 380—390.
24. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
25. Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1107—1114.
26. Бартман А. Б. Распад плазмы при оптическом пробое газов.— Тез. докл. V Всесоюзн. совещ. по нерезон. взаимод. оптич. излуч. с веществом.— Л.: Изд-во ГОИ им. С. И. Вавилова, 1981, с. 264—265.
27. Haraux A., Weissler F. B.— Indiana Univ. Math. J., 1982, vol. 31, p. 167—189.
28. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.— М., 1979.— 30 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 161).
29. Kobayashi K., Sirao T., Takana H.— J. Math. Soc. of Japan, 1977, vol. 29, p. 407—424.
30. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362—1364.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 19 сентября 1983 г.

УДК 517.95

Г. В. ЖИДКОВ

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

Основой построения функциональных пространств H и B, рассматриваемых в работах С. М. Никольского, Л. Д. Кудрявцева, О. В. Бесова, Л. Н. Слободецкого и других, являются первая и вторая разности функций (см., например, [1—3]). Л. Д. Кудрявцевым были заложены основы разрешимости вариационных задач в этих пространствах.

Пространства B при некоторых частных случаях были введены еще С. Н. Бернштейном в связи с исследованием абсолютной сходимости тригонометрических рядов.

Из классических теорем С. Н. Бернштейна, Д. Джексона, А. Зигмунда следует, что для периодических функций существуют необходимые и достаточные характеристики степенного роста разностей в терминах наилучших приближений [1].

В непериодическом случае нельзя указать такие необходимые и достаточные характеристики первой и второй разности функций. Это следует из результатов С. Н. Бернштейна [1]. Поэтому возникала задача о построении аналогов функциональных пространств H и B для непериодических функций [4].

С другой стороны, необходимость построения таких пространств была вызвана исследованием осесимметричных краевых задач и вариационных методов для них. Класс таких задач появляется в гидромеханике и газовой динамике при изучении осесимметричных течений и осесимметричных напряжений в теории упругости.

В статье строятся такие пространства для функций многих переменных и исследуются их свойства. Эти пространства обозначим $\bar{H}$ и $\bar{B}$.