УДК 517.95

О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником

Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.

§ 1. Введение

1. В работе рассматриваются квазилинейные параболические уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}(u) = \nabla(k(u)\nabla u) + Q(u). \tag{1.1}$$

Здесь $\nabla(\cdot)=\operatorname{grad}_x(\cdot)$, t и $x=(x_1, \ldots, x_N)\in\mathbf{R}^N$ — соответственно временная и пространственная координаты, $u=u(t, x)\geqslant 0$ — искомое решение. Функции $k(s)\geqslant 0$, $Q(s)\geqslant 0$ определены при всех $s\geqslant 0$, $k\in C^1(\mathbf{R}_+^1)\cap C([0, +\infty))$, $Q\in C^2(\mathbf{R}_+^1)\cap C([0, +\infty))$, $k(s)>0$ при $s>0$ (последнее неравенство означает параболичность уравнения (1.1)).

Уравнение (1.1) используется для описания различных физических процессов, в частности, процесса диффузии тепла в нелинейных сплошных средах с объемным энерговыделением. В этом случае функция $k(u)$ играет роль нелинейного коэффициента теплопроводности, а $Q(u)$ — мощности объемных источников энергии, зависящих от температуры среды $u\geqslant 0$.

Отметим, что (1.1) допускает эквивалентное представление

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \widetilde{\mathbf{A}}(u) = \Delta\varphi(u) + Q(u), \tag{1.1'}$$

где $\Delta=\sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа и

$$\varphi(s) = \int_0^s k(\eta)\,d\eta, \quad s\geqslant 0. \tag{1.2}$$

В дальнейшем для (1.1) будут рассматриваться либо первая краевая задача в некоторой области $\Omega(t)\subset\mathbf{R}^N$ с, вообще говоря, подвижными границами или задача Коши, когда $\Omega(t)=\mathbf{R}^N$. В большинстве случаев нас будут интересовать существенно нестационарные решения $u(t, x)$, когда закон энерговыделения $Q(u)$ в (1.1) таким образом «согласован» с коэффициентом теплопроводности $k(u)$ (и в краевой задаче — с граничными условиями), что

$$\max_{x\in\overline{\Omega}(t)} u(t, x) \to +\infty \tag{1.3}$$

при $t\to+\infty$ или в течение конечного времени — при $t\to T^-<+\infty$. В последнем случае функция $u(t, x)$ называется режимом с обострением ($t=T$ — момент обострения) или неограниченным решением. Подобные законы нарастания величин в режиме с обострением используются для описания различных сильно нестационарных физических процессов (см., например, [1]—[3] и приведенную там библиографию).

Кроме того, будет рассмотрен один класс задач, в которых при некоторых фиксированных k и Q в зависимости от краевых данных справедливо либо (1.3), либо противоположное ему условие

$$\max_{x\in\bar{\Omega}(t)} u(t, x)\to 0, \quad t\to+\infty. \tag{1.4}$$

Во всех рассмотренных случаях на асимптотической стадии развития процесса (т. е. $t\to+\infty$ или $t\to T^-$) существенными являются «вклады» обоих нелинейных членов в правой части (1.1). В работе изучаются пространственно-неоднородные образования — диссипативные структуры, рассматриваемые, как результат «нелинейного взаимодействия» процессов диффузии тепла и энерговыделения (см. [3]—[5]). При этом краевые условия на границе $\partial\Omega(t)$ выбираются таким образом, чтобы в некотором смысле «стабилизировать» возникающую нестационарную структуру и сделать ее асимптотически устойчивой (см. об этом ниже). Каждой паре функций $\{k, Q\}$ (+краевые условия) отвечает семейство нестационарных диссипативных структур с характерными законами пространственно-временной эволюции, в определении которых состоит основная цель работы.

Исследование проводится с помощью построения так называемых приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения (1.1) при весьма широком выборе коэффициентов k и Q. Оно тесно связано и во многом опирается на результаты работ [6]—[9] (см. также [10], [11]), где похожими методами изучалась краевая задача для уравнения (1.1), $N=1$ при $Q(u)\equiv 0$. Особо подчеркнем, что представленное исследование охватывает весьма широкий класс уравнений (1.1) с коэффициентами k, Q достаточно общего вида.

2. В настоящее время весьма подробно изучены стационарные диссипативные структуры, отвечающие уравнению (1.1). Они удовлетворяют стационарному уравнению

$$\Delta\varphi(\bar{u}(x))+Q(\bar{u}(x))=0 \tag{1.5}$$

(φ определяется из (1.2)) и соответствующим краевым условиям. Заменой $\varphi(\bar{u})=\bar{v}$ уравнение (1.5) сводится к полулинейному виду

$$\Delta\bar{v}(x)+q(\bar{v}(x))=0, \tag{1.5'}$$

где $q(\bar{v})=Q(\varphi^{-1}(\bar{v}))$, φ^{-1} — функция, обратная к φ (φ^{-1} существует в силу монотонности φ). Исследованию нелинейных эллиптических задач для уравнений (1.5′) общего вида в ограниченных и неограниченных областях посвящено большое количество работ (см., например, [12]—[21] и приведенную там библиографию). В ряде случаев получены достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных решений уравнения (1.1), при выполнении которых

$$\|u(t, x)-\bar{u}(x)\|\to 0, \quad t\to+\infty, \tag{1.6}$$

или неустойчивости, когда (1.6) не имеет места (см., например, [14], [19], [22]—[29]). Как правило, требование (1.6) выделяет в пространстве начальных функций некоторое «множество притяжения», отвечающее фиксированному стационарному решению $\bar{u}$. Это же справедливо и для параболических систем квазилинейных уравнений типа (1.1) [26], [30]—[32]. В общем случае проблема устойчивости связана с исследо-

ванием аттракторов эволюционных уравнений (см. [33] и приведенную там библиографию).

3. Что касается нестационарных структур, то эффективным методом их исследования является построение подходящих автомодельных или инвариантных решений[1] уравнения (1.1), конкретный вид которых определяется путем интегрирования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти частные решения имеют, как правило, весьма простую пространственно-временную структуру и, что особенно важно, часто являются асимптотически устойчивыми в специальных («автомодельных») нормах относительно малых возмущений краевых данных. Тем самым наличие у (1.1) подходящего автомодельного или инвариантного решения полностью определяет конечный вид нестационарной диссипативной структуры, отвечающей данным коэффициентам k, Q.

Устойчивость существенно нестационарных инвариантных решений $u_A(t, x)$, удовлетворяющих условию (1.3) при $t \to +\infty$ или $t \to T^- < +\infty$, определяется отличным от (1.6) способом. Пусть, например, при некоторых фиксированных k и Q функция u_A имеет следующий вид (типичный для интересующих нас решений, инвариантных относительно локальной группы Ли точечных преобразований):

$$u_A(t, x) = E[\psi(t)\theta_A(\xi)], \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \tag{1.7}$$

где $E(s)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ — известные достаточно гладкие и неотрицательные функции, а $\theta_A(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое получается после подстановки выражения (1.7) в (1.1). Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения (1.1) с другими («неинвариантными», но близкими к ним) краевыми данными. В соответствии с пространственно-временной структурой выражения (1.7) определяется автомодельное представление решения $u(t, x)$ по формуле

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{\psi(t)} E^{-1}[u(t, \xi\varphi(t))], \tag{1.8}$$

где E^{-1} — функция, обратная к E, и тогда асимптотическая устойчивость инвариантного решения (1.7) означает, что в некоторой норме

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_A(\xi)\| \to 0 \tag{1.9}$$

при $t \to +\infty$ или $t \to T^-$.

4. В наибольшей полноте групповая классификация уравнения (1.1) при произвольных коэффициентах k и Q, позволяющая выделить все типы решений, инвариантных относительно локальной группы Ли точечных преобразований, проведена в [34], [35] (см. также [36], [37]). Отметим, что более общие подходы, использующие, в частности, группы Ли — Бэклунда, не дают расширения класса подходящих инвариантных решений (см. [38], [39]). Свойства отдельных инвариантных решений этого уравнения, в ряде случаев их устойчивость и разрешимость соответствующих нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, изучались, например, в [26], [34]—[62] (кроме того, существует большое число работ, в которых свойства инвариантных решений используются неявным образом). Подчеркнем, что исследование устойчивости нестационарных инвариантных решений уравнения (1.1) представляет

[1] Аналогичные подходы широко используются при изучении нестационарных решений уравнения (1.1) с $Q \equiv 0$ (см. библиографию в [61]).

собой самостоятельную и достаточно трудную задачу. В настоящее время подробно и практически исчерпывающе изучена устойчивость лишь одного семейства таких решений — ограниченных автомодельных решений типа «бегущей волны»

$$u_A(t, x) = \theta_A(\xi), \ \xi = x - Dt$$

(D — фиксированная постоянная), которые допускает (1.1) в случае источника $Q(u)$ такого, что $Q(0) = Q(1) = 0$, и специального вида начальных функций $0 \leqslant u_0(x) \leqslant 1$ в задаче Коши (см. [40]—[45], [26] и приведенную там библиографию). Для этого решения (1.3) не имеет места. Автомодельное представление здесь имеет вид (ср. (1.8))

$$\theta(t, \xi) = u(t, \xi + Dt + C)$$

($u(t, x)$ — решение, отвечающее определенному классу «неавтомодельных» начальных функций $u_0(x)$; величина постоянной C зависит от $u_0(x)$). Под устойчивостью тогда понимается выполнение (1.9) при $t \to +\infty$.

Отметим, что в тех случаях, когда u_A является неограниченным решением (т. е. определено на конечном интервале $0 \leqslant t < T < \infty$), автомодельное представление $\theta(t, \xi)$ не всегда можно определить по формуле (1.8). В связи с этим укажем на работы [3], [48]—[51], в которых изучались неограниченные автомодельные решения (и их асимптотическая устойчивость) задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{\sigma,\beta}(u) = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \tag{1.10}$$

где $\sigma > 0$ и $\beta > 1$ — фиксированные постоянные. Неограниченные решения задачи Коши для (1.10) обладают той особенностью, что малые возмущения начальной функции приводят к малому (априорно не известному) изменению длины интервала времени существования решения. Поэтому здесь автомодельное представление типа (1.8), вообще говоря, не имеет смысла, т. к. функции $\psi(t)$, $\varphi(t)$ (здесь они имеют вид $\psi = (T-t)^{-1/(\beta-1)}$, $\varphi = (T-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}$) и решение $u(t, x)$ определены на различных интервалах изменения времени[2] (в [56] показано, что в случае краевой задачи для (1.10) асимптотической устойчивости в смысле (1.8), (1.9) можно добиться за счет выбора подходящих граничных условий). Применительно к такой ситуации в [50], [51] предложен и в одномерном случае для (1.10) численно реализован другой подход, позволяющий исследовать «структурную» устойчивость неограниченных автомодельных решений в специальной «автомодельной» норме, в каждый момент времени согласованной с геометрическими размерами структуры и не использующей в явном виде переменной t. Последнее делает используемый в [50], [51] алгоритм устойчивым относительно изменений длины интервала времени существования решения. Вопрос строгого обоснования этого интересного подхода является открытым.

Отметим еще одну любопытную особенность процесса горения, описываемого уравнением (1.10): при $\beta \geqslant \sigma + 1$ его неограниченные решения являются локализованными, т. е. возрастают до бесконечности при $t \to T^- < +\infty$ в ограниченной по своим размерам части пространства [3], [48]—[55], [63] (см. также библиографию в [64], [65]). Возмож-

[2] Здесь возникает также другая трудность — при $\beta \geqslant \sigma + 1$ функция $\theta_A(\xi)$ определяется неоднозначно [3], [48]—[51], [55].

ные приложения этого эффекта своеобразной «тепловой инерции» указаны в [66], [67].

5. Групповой анализ уравнения (1.1), проведенный в [34]—[36], показывает, что подходящие точные автомодельные или инвариантные решения существуют лишь при коэффициентах k, Q некоторого специального вида, в основном степенного, как в (1.10), или экспоненциального, когда $k(u)$, $Q(u) \sim \exp u$.

В настоящей работе асимптотические свойства решений уравнений (1.1) исследуются на основе довольно общего подхода «автомодельной природы», состоящего в построении приближенных автомодельных решений (п. а. р.) рассматриваемых задач. Их основное отличие (которое отражено в названии) от точных автомодельных (инвариантных) решений состоит в том, что они не удовлетворяют исходному уравнению, но тем не менее правильно передают поведение большого класса его решений на развитой стадии их эволюции. Формальная методика построения п. а. р. описана в [6] (см. п. 6, § 1). Установлено, что нетривиальные п. а. р. существуют у весьма широкого класса уравнений (1.1).

Кратко охарактеризуем содержание работы. Множество всех п. а. р. уравнения (1.1) при различных $\{k, Q\}$ допускает естественное разделение на два класса. В одном из них п. а. р. строятся путем специальных преобразований известных точных инвариантных решений уравнения (1.1) с нелинейностями определенного вида (степенного, экспоненциального и т. д.). Такие инвариантные решения можно назвать «порождающими». В конечном итоге наличие указанных п. а. р. выражает своеобразную устойчивость «порождающих» решений относительно сравнительно «малых отклонений» коэффициентов k и Q от соответствующих «инвариантных» (степенных или экспоненциальных) зависимостей. Отметим в то же время, что п. а. р., определяемые некоторым «порождающим» инвариантным решением уравнения (1.1) с коэффициентами «инвариантного» вида, могут весьма существенно (в зависимости от k и Q) от него отличаться. Исследование различных классов подобных п. а. р. будет проведено в следующих работах.

Характерной особенностью п. а. р., принадлежащих другому классу, является то, что они в общем случае не имеют «порождающих» среди всех инвариантных решений уравнений (1.1) при произвольных коэффициентах. Этот весьма любопытный класс п. а. р. рассматривается в настоящей работе. В § 2 показано, что существует широкое множество коэффициентов $k(s)$ в (1.1), удовлетворяющих, в частности, условию

$$\left[\frac{k(s)}{k'(s)}\right]' \to \infty, \quad s \to +\infty, \tag{1.11}$$

и соответствующих им функций $Q(s) = Q_k(s)$ таких, что «порождающие» п. а. р. $u_a(t, x)$ удовлетворяют нелинейному уравнению первого порядка типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = B(u_a) = \frac{k(u_a)}{u_a + 1}(\nabla u_a)^2 + Q_k(u_a). \tag{1.12}$$

Оно существенно отличается от исходного параболического уравнения (1.1). Указанная ситуация имеет место, например, при $k(s) = \ln^\lambda(1+s)$, $\lambda > 0$, $Q_k(s) = (1+s)\ln^\beta(1+s)$, $\beta > 0$ (первые исследования «вырожденных» неограниченных п. а. р. в случае $k \equiv 1$ и $Q(s) =$

$=(1+s)\ln^{\beta}(1+s)$, $\beta>1$, были проведены в [10], [68]). Доказанная в работе асимптотическая устойчивость некоторых из таких п. а. р. указывает на своеобразное «вырождение» (понижение порядка) уравнения (1.1) на развитой стадии эволюции диссипативной структуры. Поэтому в соответствии с [6], [7], [10], [11], [68] этот случай построения п. а. р. будем называть «вырожденным». Аналогичный эффект «вырождения» возникает при исследовании краевых задач для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.13}$$

с коэффициентом k, удовлетворяющим условию (1.11) (см. [7], [10], [11]).

Особо подчеркнем, что «вырождение» исходного параболического оператора в (1.1) в оператор первого порядка уравнения (1.12) имеет место только в случае (1.11). Можно показать, что выполнение одного из условий, в определенном смысле противоположных (1.11), т. е. условия

$$\left[\frac{k(s)}{k'(s)}\right]'\to\frac{1}{\sigma},\ s\to+\infty;\ \sigma=\mathrm{const}>0$$

(это, например, $k(s)=s^{\sigma}$, $k(s)=s^{\sigma}\ln^{\lambda}(2+s)$ и т. д.) или

$$\left[\frac{k(s)}{k'(s)}\right]'\to 0,\ s\to+\infty$$

($k(s)=\exp s$, $k(s)=\exp(\exp s^{\alpha})$, $\alpha>0$, и т. д.), делает рассматриваемый случай «невырожденным», когда «порождающие» решения удовлетворяют уравнению вида (1.1) параболического типа.

В данной работе через $C_x(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^N$, обозначается пространство функций с нормой

$$\|\cdot\|_{C_x(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|\cdot|.$$

§ 2. Глобальные приближенные автомодельные решения в «вырожденном» случае

В этом параграфе строятся п. а. р., удовлетворяющие уравнению первого порядка и определенные при всех $t>0$.

«Вырожденный» случай реализуется при следующих ограничениях на коэффициент теплопроводности k в (1.1):

$$\int_0^{+\infty}\frac{k(\eta)}{\eta+1}\,d\eta=+\infty, \tag{2.1}$$

$$\left[\frac{k(s)}{k'(s)}\right]'\to\infty,\ s\to+\infty. \tag{2.2}$$

Условие (2.1) накладывает ограничение «снизу» на характер поведения функции $k(s)$ при больших s, условие (2.2) — ограничение «сверху».

В дальнейшем нам понадобится функция $E\in C([0,+\infty))$, определяемая из равенства

$$\int_0^{E(s)}\frac{k(\eta)}{\eta+1}\,d\eta=s,\ s\geqslant 0. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что $E(0)=0$, $E'(s)>0$ при $s>0$ и, в силу (2.1),

$$E(+\infty)=+\infty. \tag{2.4}$$

Поэтому E осуществляет взаимно однозначное монотонное отображение $\mathbf{R}_+^1 \to \mathbf{R}_+^1$ и существует E^{-1}: $\mathbf{R}_+^1 \to \mathbf{R}_+^1$ — функция, обратная к E.

Для удобства дальнейшего изложения введем функцию

$$\omega(s) = \max_{\eta \in [0,s]} k(E(\eta)). \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить, что в силу (2.2)

$$\frac{\omega(s)}{s} \to 0, \quad s \to +\infty. \tag{2.6}$$

Например, в случае, когда k является возрастающей функцией, т. е. $\omega(s) = k(E(s))$, в силу (2.2) имеем

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\omega(s)}{s} = \lim_{s\to+\infty} k'(E(s))E'(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{k'(E(s))}{k(E(s))}(E(s)+1) =$$
$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{p}{\left[\frac{k(p)}{k'(p)}\right]} = \left\{\lim_{p\to+\infty}\left[\frac{k(p)}{k'(p)}\right]'\right\}^{-1} = 0.$$

Условие (2.6) понадобится нам в дальнейшем.

1. «Порождающие» приближенные автомодельные решения. «Порождающие» п. а. р. существуют при наличии следующей связи между коэффициентами k и Q в (1.1):

$$Q(s) = Q_\alpha(s) = \frac{(s+1)}{k(s)}\left\{\int_0^s \frac{k(\eta)}{\eta+1}\,d\eta\right\}^\alpha, \tag{2.7}$$

где $\alpha \leqslant 1$ — произвольная постоянная. Функция E в (2.3) удовлетворяет тождествам

$$E^{-1}(s) = \int_0^s \frac{k(\eta)}{\eta+1}\,d\eta, \quad E'(E^{-1}(s)) = \frac{s+1}{k(s)}, \tag{2.8}$$

с помощью которых легко показать, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\eta}{Q_\alpha(\eta)} = \int_{E^{-1}(1)}^{+\infty} \frac{ds}{s^\alpha} = +\infty, \quad \alpha \leqslant 1. \tag{2.9}$$

Поэтому (см., например, [69]) при $\alpha \leqslant 1$ все решения уравнения (1.1) с $Q = Q_\alpha$, отвечающие ограниченным краевым данным, определены при всех $t > 0$. Напротив, в случае $\alpha > 1$ условие (2.9) не имеет места, и п. а. р., вообще говоря, следует искать в классе функций, растущих со временем в режиме с обострением. Возможность построения таких п. а. р. обсуждается в заключительном пункте этого параграфа (см. также [10], [68]).

Укажем теперь конкретный вид «порождающих» п. а. р. $u_a(t, x)$. Как уже упоминалось, при любых $\alpha \leqslant 1$ все они являются инвариантными решениями нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{B}(u_a) = \frac{k(u_a)}{u_a+1}(\nabla u_a)^2 + Q_\alpha(u_a). \tag{2.10}$$

В случае $\alpha < 1$ функции u_a имеют вид

$$u_a(t, x) = E\left[(1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}}\theta_a(\xi)\right], \tag{2.11}$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) = \left(\frac{x_1}{(1+t)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}}}, \ldots, \frac{x_N}{(1+t)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}}}\right),$$

при $\alpha=1$ — это

$$u_a(t, x)=E[\exp t\theta_a(\xi)], \tag{2.12}$$

$$\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_N)=\left(\frac{x_1}{\exp\left(\frac{t}{2}\right)}, \ldots, \frac{x_N}{\exp\left(\frac{t}{2}\right)}\right).$$

Подставляя выражения (2.11) и (2.12) в уравнение (2.10), получаем, что $\theta_a(\xi)$ во всех точках, где они положительны, удовлетворяют следующим нелинейным уравнениям первого порядка: при $\alpha<1$ уравнению

$$(\nabla\theta_a)^2+\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}\nabla\theta_a\xi-\frac{1}{1-\alpha}\theta_a+\theta_a^\alpha=0, \tag{2.13}$$

а при $\alpha=1$ такому уравнению

$$(\nabla\theta_a)^2+\frac{1}{2}\nabla\theta_a\xi=0 \quad (\nabla(\cdot)=\operatorname{grad}_\xi(\cdot)). \tag{2.14}$$

Существование немонотонных решений уравнений (2.13), (2.14) будет установлено ниже.

$k(s)$	$Q_\alpha(s)$	$E(s)$
$\exp\left[\frac{\ln(3+s)}{\ln^\gamma\ln(3+s)}\right]$, $\gamma>0$	$\simeq s\exp\left[(\alpha-1)\frac{\ln s}{\ln^\gamma\ln s}\right]\ln^{\alpha\gamma}\ln s$	$\simeq\exp\left[\ln s\left(1-\gamma\frac{\ln\ln s}{\ln s}\right)\ln^\gamma\ln s\right]$
$\exp[\ln^\gamma(1+s)]$, $0<\gamma<1$	$\simeq\frac{s}{\gamma^\alpha}\exp[(\alpha-1)\ln^\gamma s]\times$ $\times\ln^{\alpha(1-\gamma)}s$	$\simeq\exp\left[\ln^{\frac{1}{\gamma}}s\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\frac{\ln\ln s}{\ln s}\right)\right]$
$\ln^\gamma(1+s)$, $\gamma>0$	$\simeq s\ln^{\alpha+\gamma(\alpha-1)}s/(1+\gamma)^\alpha$	$\simeq\exp\{[(1+\gamma)s]^{\frac{1}{1+\gamma}}\}$
$\ln(1+\ln(1+s))$	$\simeq s\ln^\alpha s\ln^{\alpha-1}\ln s$	$\simeq\exp\left[\frac{s}{\ln s}\right]$
1	$\simeq s\ln^\alpha s$	$\simeq\exp s$
$\{1+\ln(1+\ln(1+s))\}^{-1}$	$\simeq s\ln^\alpha s\ln^{1-\alpha}\ln s$	$\simeq\exp(s\ln s)$
$\{1+\ln^\gamma(1+s)\}^{-1}$, $0<\gamma<1$	$\simeq\frac{s}{(1-\gamma)^\alpha}\ln^{\alpha+\gamma(1-\alpha)}s$	$\simeq\exp\{[(1-\gamma)s]^{\frac{1}{1-\gamma}}\}$
$\{1+\ln(1+s)\}^{-1}$	$\simeq s\ln s\ln^\alpha\ln s$	$\simeq\exp(\exp s)$
$[1+\ln(1+s)]^{-1}\times$ $\times\{1+\ln[1+\ln(1+s)]\}^{-1}$	$\simeq s\ln s\ln\ln s\ln^\alpha\ln\ln s$	$\simeq\exp[\exp(\exp s)]$

В таблице приведены некоторые характерные коэффициенты k, удовлетворяющие (2.1), (2.2), и соответствующие им Q_α. Там же указаны главные члены асимптотических разложений функций $E(s)$ в (2.3) при $s\to+\infty$ (в явном виде E часто не вычисляются), с помощью которых определяется конкретный вид п. а. р.

Более общие классы п. а. р., имеющих в качестве «порождающих» функции (2.11) и (2.12), будут построены в п. 2 в конце этого параграфа.

Обозначим через $\theta(t, \xi)$ автомодельное представление решения $u(t, x)$ исходного уравнения (1.1), определяемое в соответствии с пространственно-временной структурой п. а. р. (2.11) или (2.12). Функция θ при $\alpha<1$ и $\alpha=1$ имеет соответственно вид

$$\theta(t, \xi) = (1+t)^{-\frac{1}{1-\alpha}} E^{-1}[u(t, \xi(1+t)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}})], \tag{2.15}$$

$$\theta(t, \xi) = \exp(-t) E^{-1}\left[u\left(t, \xi \exp\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]. \tag{2.16}$$

Смысл функций $\theta(t, \xi)$ ясен из сопоставления (2.15), (2.16) и (2.11), (2.12). Выражения (2.15), (2.16) «устроены» таким образом, что автомодельным представлением п. а. р. является функция $\theta_a(\xi)$.

Будет показано, что при выполнении условий (2.1), (2.2), (2.7), а также некоторых других ограничений, имеет место сходимость $\theta(t, \xi)$ к $\theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$. Это обеспечивает асимптотическую «близость» решений параболического уравнения (1.1) и уравнения типа Гамильтона — Якоби (2.10). Прежде чем переходить к изложению основных результатов этого параграфа, поясним с помощью некоторых качественных рассуждений и оценок, почему на асимптотической стадии происходит указанное «вырождение» параболического уравнения (естественно, в первую очередь это связано с рассматриваемыми здесь типами коэффициентов k и Q). Сделаем в исходном уравнении (1.1) замену $U=E^{-1}(u)$. Тогда для U получим следующее параболическое уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k(E(U))\Delta U + (\nabla U)^2 + U^\alpha. \tag{2.17}$$

В результате такой же замены $U_a=E^{-1}(u_a)$ в (2.10) приходим к другому уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = (\nabla U_a)^2 + U_a^\alpha, \tag{2.18}$$

которое отличается от (2.17) отсутствием первого члена в правой части. Однако, нетрудно показать, что в «малой окрестности» п. а. р. U_a (в частности, при $U=U_a$) он много меньше других членов уравнения при достаточно больших t. Проверим последнее, например, в случае $\alpha<1$, когда (см. (2.11))

$$U_a(t, x) = (1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}}}. \tag{2.19}$$

Отметим при этом, что U_a является точным автомодельным решением уравнения (2.18). Учитывая только характер зависимости оцениваемых величин от времени, в силу (2.6) имеем

$$\left|\frac{k(E(U_a))\Delta U_a}{(\nabla U_a)^2}\right| = \left|\frac{\Delta_\xi \theta_a}{(\nabla_\xi \theta_a)^2}\right| \frac{k(E(U_a))}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \lesssim \frac{\omega(t^{\frac{1}{1-\alpha}})}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \to 0, \quad t \to +\infty;$$

$$\left|\frac{k(E(U_a))\Delta U_a}{U_a^\alpha}\right| = \left|\frac{\Delta_\xi \theta_a}{\theta_a^\alpha}\right| \frac{k(E(U_a))}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \lesssim \frac{\omega(t^{\frac{1}{1-\alpha}})}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Эти оценки, в принципе, свидетельствуют о возможности построения п. а. р. уравнения (2.17), удовлетворяющих (2.18) (см. [6]).

Исследование «порождающих» п. а. р. проведем сначала в двух сравнительно простых частных случаях, в которых возможен более полный анализ.

1.1. Случай $k(s)=1$, $\alpha=0$. Уравнение (1.1) здесь является линейным, т. к. $Q(s)=Q_0(s)=(1+s)$. Нам будет удобнее записать его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+u. \tag{2.20}$$

Для (2.20) будет рассматриваться задача Коши с начальным условием

$$u(0,\ x)=u_0(x)\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^N;\ u_0\in L^1(\mathbf{R}^N). \tag{2.21}$$

При $k\equiv 1$ преобразование E в (2.3) имеет вид $E(s)=\exp s-1$. Как следует из (2.10), п. а. р. u_a при этом удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\frac{(\nabla u_a)^2}{(1+u_a)}+(1+u_a),\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^N, \tag{2.22}$$

и определяется по формуле (см. (2.11) в случае $\alpha=0$)

$$u_a(t,\ x)=\exp[U_a(t,\ x)]-1=\exp[(1+t)\,\theta_a(\xi)]-1,\ \xi=\frac{x}{(1+t)}, \tag{2.23}$$

где функция $\theta_a(\xi)$ является неотрицательной (тогда в силу (2.23) $u_a(t,\ x)\geqslant 0$) и удовлетворяет уравнению (2.14). Нам понадобится одно его (обобщенное) решение [3], зависящее только от $\|\xi\|$:

$$\theta_a(\xi)=\left(1-\frac{\|\xi\|^2}{4}\right)^+,\ \xi\in\mathbf{R}^N. \tag{2.24}$$

Отметим, что п. а. р. u_a в каждый момент времени финитна по x и является неотрицательным обобщенным решением уравнения (2.22).

Формулы (2.23), (2.24) определяют вид п. а. р. задачи Коши (2.20), (2.21). В то же время уравнение (2.20) заменой $u=v\exp t$ сводится к уравнению теплопроводности и поэтому (см., например, [69])

$$u(t,\ x)=\frac{\exp t}{(2\sqrt{\pi t})^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}u_0(y)\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right)dy. \tag{2.25}$$

В следующей теореме производится сопоставление (2.25) и п. а. р. (2.23). Как уже было принято, через $\theta(t,\ \xi)$ обозначается автомодельное представление решения $u(t,\ x)$, которое в данном случае имеет вид

$$\theta(t,\ \xi)=(1+t)^{-1}\ln[1+u(t,\ \xi(1+t))]. \tag{2.26}$$

Теорема 2.1. *Пусть начальная функция* $u_0\not\equiv 0$ *в* (2.21) *такова, что*

$$\exp(\gamma\|x\|)\,u_0(x)\in L^1(\mathbf{R}^N)\ \textit{при любых}\ \gamma>0. \tag{2.27}$$

Тогда

$$\|\theta(t,\ \xi)-\theta_a(\xi)\|_{C_\xi(\mathbf{R}^N)}=O\left(\frac{N}{2}\,\frac{\ln t}{t}\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0, \tag{2.28}$$

где θ_a *имеет вид* (2.24).

---

[3] Здесь используется обозначение $(f)^+=\max\{0,\ f\}$.

Доказательство. В результате тождественных преобразований выражение для $\theta(t, \xi)$ приводится к виду

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{(1+t)} \ln \left\{ 1 + \frac{\exp\left[t\left(1 - \frac{\|\xi\|^2}{4}\right)\right]}{(2\sqrt{\pi t})^N} I(t, \xi) \right\}, \tag{2.29}$$

где введено обозначение

$$I(t, \xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_0(y) \exp\left[-\frac{\|y\|^2}{4t} + \frac{y \cdot \xi}{4}\right] dy.$$

В силу предположения (2.27) при любых $\xi \in \mathbf{R}^N$ существует конечный положительный предел функции $I(t, \xi)$ при $t \to +\infty$.

Пусть сначала $\|\xi\| \leqslant 2$. Тогда из (2.29) непосредственно следует, что

$$\theta(t, \xi) = \left(1 - \frac{\|\xi\|^2}{4}\right) - \frac{N}{2}\frac{\ln t}{t} + O\left(\frac{1}{t}\right) = \theta_a(\xi) + O\left(\frac{N}{2}\frac{\ln t}{t}\right), \quad t \to +\infty.$$

Если же $\|\xi\| > 2$, т. е. $(1 - \|\xi\|^2/4)^+ = 0$, то из (2.29) при $t \to +\infty$ получаем

$$\theta(t, \xi) = O\left\{ t^{-\left(1 + \frac{N}{2}\right)} \exp\left[t\left(1 - \frac{\|\xi\|^2}{4}\right)\right] I(t, \xi) \right\},$$

причем, как нетрудно убедиться, функция

$$\exp\left[t\left(1 - \frac{\|\xi\|^2}{4}\right)\right] I(t, \xi)$$

при достаточно больших t является ограниченной равномерно по ξ, $\|\xi\| > 3$. Поэтому в случае $\|\xi\| > 2$ имеем

$$\theta(t, \xi) = o\left\{\frac{N}{2}\frac{\ln t}{t}\right\}, \quad t \to +\infty.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание 1. Требование (2.27), вообще говоря, не является оптимальным. Однако в таком виде оно заметно упрощает доказательство.

Замечание 2. Вид п. а. р. зависит от того, каким образом определяется автомодельное представление решения задачи[4]. Например, если вместо (2.26) положить

$$\theta(t, \xi) = (1+t)^{-1} \ln [u(t, \xi(1+t))]$$

(здесь уже $\theta(t, \xi)$ может принимать отрицательные значения), то в условиях теоремы 1 получаем

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{(1+t)} \ln \left\{ \frac{\exp\left[t\left(1 - \frac{\|\xi\|^2}{4}\right)\right]}{(2\sqrt{\pi t})^N} I(t, \xi) \right\} = 1 - \frac{\|\xi\|^2}{4} + o\left(\frac{N}{2}\frac{\ln t}{t}\right). \tag{2.30}$$

П. а. р. в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{(\nabla u_a)^2}{u_a} + u_a, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

и имеет вид

$$u_a(t, x) = \exp[(1+t)\theta_a(\xi)], \quad \xi = \frac{x}{(1+t)}.$$

---

[4] Отметим, что п. а. р., вообще говоря, является неединственным, его пространственно-временная структура зависит, в частности, от выбора нормы, в которой доказывается его устойчивость (подобные примеры приведены в [7]).

Для θ_a получается тогда то же уравнение (2.13) при $\alpha=0$, однако ограничения $\theta_a \geqslant 0$ здесь нет, поэтому

$$\theta_a(\xi) = 1 - \frac{\|\xi\|^2}{4}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Отсюда в силу (2.30) имеем: $\theta(t, \xi) \to \theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$, причем справедлива оценка (2.28).

Отметим, что для широкого класса уравнений, включающего (2.20), можно построить другие («невырожденные») п. а. р., удовлетворяющие параболическим уравнениям.

1.2. Случай $k(s)=1$, $\alpha=1$. Уравнение (1.1) запишем здесь в таком виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u \ln u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N). \tag{2.31}$$

Покажем, что при специальном выборе начальной функции оно имеет п. а. р., удовлетворяющие уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{(\nabla u_a)^2}{(1+u_a)} + (1+u_a)\ln(1+u_a).$$

Пусть

$$u_0(x) = a_0 \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{2.32}$$

где постоянная a_0 удовлетворяет неравенству

$$a_0 > \exp(1/2). \tag{2.33}$$

Задача (2.31) тогда обладает тем преимуществом, что ее решение выписывается в явном виде

$$u(t, x) = \exp\left\{A_0 \exp t - \frac{\|x\|^2}{4} + \frac{1}{2}\right\}, \tag{2.34}$$

где $A_0 = \ln a_0 - 1/2 > 0$. Это инвариантное решение уравнения (2.31) указано в [34], [35] (свойства более общего двухпараметрического семейства таких решений изучались в [54]).

П. а. р. здесь выглядит следующим образом (см. (2.12)):

$$u_a(t, x) = \exp[\exp t \cdot \theta_a(\xi)] - 1, \quad \xi = \frac{x}{\exp\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(напомним, что $E(s) = \exp s - 1$ при $k \equiv 1$), где $\theta_a \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению (2.14). Оно имеет бесконечное множество подходящих решений

$$\theta_a(\xi) = \left(B_0 - \frac{\|\xi\|^2}{4}\right)^+, \quad \xi \in \mathbf{R}^N,$$

$B_0 > 0$ — произвольная постоянная. Определяя автомодельное представление решения $u(t, x)$ по формуле (см. (2.16))

$$\theta(t, \xi) = \exp(-t) \ln\left[1 + u\left(t, \xi \exp\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right],$$

в силу (2.34) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (2.32), (2.33) *и, кроме того,* $B_0 = A_0 = \ln a_0 - 1/2$. *Тогда*

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{C_\xi(\mathbf{R}^N)} = O(\exp(-t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

Замечание 1. В условиях теоремы 2.2 выбор п. а. р. зависит от начальной функции $u_0(x)$. Это существенным образом отличает данную теорему от предыдущей и в первую очередь связано с большей «мощностью» источника тепла в (2.31) по сравнению с (2.20).

Замечание 2. Так же, как в случае $\alpha=0$, при $\alpha=1$ вид п. а. р. зависит от способа определения автомодельного представления.

1.3. «Порождающие» приближенные автомодельные решения при $\alpha<1$. В этом пункте рассматриваются «вырожденные» п. а. р. уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla(k(u)\nabla u)+Q_\alpha(u) \tag{2.35}$$

с коэффициентом теплопроводности k, удовлетворяющим условиям (2.1), (2.2) в случае $\alpha<1$. П. а. р. здесь имеют вид (2.11), где функция θ_a такова, что выполнено (2.13).

Прежде всего необходимо убедиться в существовании немонотонного ограниченного решения $\theta_a\geqslant 0$ уравнения (2.13). Найдем нетривиальное радиально симметричное решение θ_a, зависящее только от $\rho=\|\xi\|$. Оно удовлетворяет краевой задаче

$$(\theta_a')^2+\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}\theta_a'\rho-\frac{1}{1-\alpha}\theta_a+\theta_a^\alpha=0,\ \rho>0, \tag{2.36}$$

$$\theta_a'(0)=0\quad\left(\theta_a'=\frac{d\theta_a}{d\rho}\right). \tag{2.37}$$

Лемма 2.1. *При любых $\alpha<1$ существует решение задачи* (2.36), (2.37), *определенное на ограниченном интервале $0<\rho<\rho_*<+\infty$, причем*

$$\theta_a(\rho)=(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\frac{1}{4(1-\alpha)}\rho^2+o(\rho^2),\ \rho\to 0. \tag{2.38}$$

Это решение является монотонно убывающим и принадлежит C^2 всюду, где оно положительно.

Для доказательства рассмотрим сначала случай $0\leqslant\alpha<1$. Искомая функция θ_a тогда удовлетворяет уравнению

$$\theta_a'(\rho)=-\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}-\left\{\left[\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}\right]^2\rho^2+\frac{1}{1-\alpha}\theta_a-\theta_a^\alpha\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.39}$$

или, что то же самое, интегральному уравнению

$$\theta_0-\theta_a(\rho)=\frac{2-\alpha}{8(1-\alpha)}\rho^2+\int_0^\rho\left\{\left[\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}\right]^2\eta^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\alpha}\theta_a(\eta)-\theta_a^\alpha(\eta)\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta=M(\theta_0-\theta_a)(\rho), \tag{2.39'}$$

где $\theta_0=\theta_a(0)=(1-\alpha)^{1/(1-\alpha)}$ (это равенство непосредственно вытекает из (2.36) и (2.37)). Разрешимость (2.39′) при достаточно малых ρ следует из теоремы Шаудера о неподвижной точке непрерывного преобразования. При этом решение ищется в множестве

$$X_\delta=\{w\,|\,\lambda_-\rho^2\leqslant\theta_a-w(\rho)\leqslant\lambda_+\rho^2,\ 0\leqslant\rho\leqslant\delta\},$$

где положительные величины δ, $\lambda_+-1/4(1-\alpha)$, $1/4(1-\alpha)-\lambda_-$ выбира-

ются столь малыми, чтобы оператор $M(\theta_0-w)$, определяемый по формуле (2.39), переводил множество X_δ в себя (нетрудно показать, что при достаточно малых $\delta>0$ последнее обеспечивается неравенствами $4\lambda_+^2+(\lambda_--2\lambda_+)/(1-\alpha)>0$, $4\lambda_-^2+(\lambda_+-2\lambda_-)/(1-\alpha)<0$). Монотонность и финитность решения следует из анализа интегральных кривых уравнения (2.39) в области $0\leqslant\theta_a\leqslant(1-\alpha)^{1/(1-\alpha)}$. Отметим, что в силу (2.39′)

$$\theta_a(\rho)\leqslant\left[\theta_0-\frac{2-\alpha}{8(1-\alpha)}\rho^2\right]^+. \tag{2.40}$$

Оценка θ_a снизу вытекает из неравенства

$$\theta_a'\left(\theta_a'+\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}\rho\right)=\frac{1}{1-\alpha}\theta_a-\theta_a^\alpha\leqslant 0,$$

откуда

$$\theta_a(\rho)\geqslant\left[\theta_0-\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}\rho^2\right]^+. \tag{2.41}$$

В силу (2.40) и (2.41) имеем

$$2\left[\frac{(1-\alpha)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}}{2-\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}<\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a<2\left[\frac{2(1-\alpha)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}}{2-\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

Отметим, что при $\alpha=0$ решение задачи (2.36), (2.37) определяется в явном виде по формуле (2.24).

Если же $\alpha<0$, то для $\theta_a'(\rho)$ получается отличное от (2.39) уравнение

$$\theta_a'(\rho)=-\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}\rho+\left\{\left[\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}\right]^2\rho^2+\frac{\theta_a}{1-\alpha}-\theta_a^\alpha\right\}^{\frac{1}{2}},$$

которое анализируется так же, как в предыдущем случае. Оно имеет смысл в области

$$\rho^2\geqslant\left[\frac{4(1-\alpha)}{2-\alpha}\right]^2\left(\frac{\theta_a}{1-\alpha}-\theta_a^\alpha\right).$$

Нетрудно показать, что решение обязательно пересекает границу этой области и тем самым определено на ограниченном интервале. При этом всюду в области определения справедлива оценка

$$\theta_a(\rho)>\left[\theta_0-\frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}\rho^2\right]^+.$$

Пусть $\theta_a(\xi)$ — построенное выше решение уравнения (2.13). Фиксируем произвольное $0<\rho_0<\rho_*$ и положим $a_0=\theta_a(\rho_0)>0$. Очевидно, что

$$a_0<\theta_0=(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2.43}$$

Также нетрудно убедиться, что

$$q_a=\max|\Delta_\xi\theta_a(\xi)|=\max_{0\leqslant\rho\leqslant\rho_0}\left|\theta_a''(\rho)+\frac{N-1}{\rho}\theta_a'(\rho)\right|<+\infty.$$

Обозначим через $\Omega_0(t)\subset\mathbf{R}^N$ шар $\{x\,|\,\|x\|<\rho_0(1+t)^{(2-\alpha)/2(1-\alpha)}\}$ и через $\partial\Omega_0(t)$ — его границу.

В дальнейшем для параболического уравнения (2.35) будет рассматриваться первая краевая задача в области $t>0$, $x\in\Omega_0(t)$ с условиями

$$u(0,x)=u_0(x)>0,\ x\in\Omega_0(0);\ u_0\in\mathbf{C}^2(\overline{\Omega}_0(0)), \tag{2.44}$$

$$u(t,x)=E[a_0(1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}}],\ t>0,\ x\in\partial\Omega_0(t) \tag{2.45}$$

(предполагается, что $u_0(x)=E(a_0)$ на $\partial\Omega_0(0)$). В силу выбора величин ρ_0, a_0 п. а. р. (2.11) также удовлетворяет краевому условию (2.45). Будет показано, что это п. а. р. правильно описывает асимптотические свойства решения краевой задачи (2.35), (2.44), (2.45). Отметим, что даже в случае $0<\alpha<1$, когда $Q_\alpha(0)=0$, вообще говоря, нельзя подобно тому, как это сделано в пп. 1 и 2, рассмотреть задачу Коши для уравнения (2.35). Это связано с тем, что при $0<\alpha<1$ источник $Q_\alpha(s)$ в (2.7) при малых $s>0$ является вогнутой функцией. Последнее, как известно (см. [70]), в общем случае влечет за собой неединственность решения и отсутствие непрерывной зависимости решения от краевых данных. При этом задача становится корректной, если ее решение почти всюду является строго положительным. Однако в случае задачи Коши таких п. а. р. не существует.

Из (2.44), (2.45) без труда получаем, что функция $U=E^{-1}(u)$ удовлетворяет уравнению (2.17), а также краевым условиям

$$U(0, x)=U_0(x)=E^{-1}(u_0(x))>0, \quad x\in\Omega_0(0),$$

$$U(t, x)=a_0(1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega_0(t). \tag{2.46}$$

Нам понадобятся следующие оценки функции $U(t, x)$.

Лемма 2.2. *При всех достаточно больших $t>0$*

$$\min_{x\in\bar\Omega_0(t)} U(t, x)=a_0(1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{2.47}$$

$$\max_{x\in\bar\Omega_0(t)} U(t, x)\leqslant[U_m^{1-\alpha}+(1-\alpha)t]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad U_m=\max U_0(x). \tag{2.48}$$

Доказательство (2.47) и (2.48) основано на анализе уравнения (2.17) в точках достижения абсолютного минимума и максимума по x функции U в $\Omega_0(t)$.

Теперь мы можем перейти к доказательству основного утверждения этого пункта.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha<1$ и выполняются условия* (2.1), (2.2), (2.7). *Пусть, кроме того,*

$$a_0^{1-\alpha}>[\alpha(1-\alpha)]. \tag{2.49}$$

Тогда

$$\|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)\|_{C_\xi}=O\left\{t^{\alpha a_0^{\alpha-1}-\frac{1}{1-\alpha}}\int_1^t\frac{\omega\,[(U_m^{1-\alpha}+(1-\alpha)\tau)^{\frac{1}{1-\alpha}}]}{(1+\tau)^{1+\alpha a_0^{\alpha-1}}}\,d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \tag{2.50}$$

где θ — автомодельное представление (2.15) *решения задачи* (2.35), (2.44), (2.45).

Замечание 1. Условие (2.49) автоматически выполняется при $\alpha\leqslant\leqslant 0$.

Доказательство. Положим $z=U-U_a$, где $U_a=E^{-1}(u_a)$ удовлетворяет уравнению (2.18) и краевому условию (2.46). Тогда для z получаем параболическое уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t}=k(E(U))\Delta z+\nabla z\nabla(U+U_a)+k(E(U))\Delta U_a+U^\alpha-U_a^\alpha,$$

причем $z(t, x)=0$ на $\partial\Omega_0(t)$. Отсюда в силу принципа максимума заключаем, что $|z(t, x)|\leqslant z_0(t)$, где положительная гладкая функция $z_0(t)$

при всех достаточно больших t удовлетворяет неравенству

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}_0(t)} k(E(U(t,x))) \max_{x\in\bar{\Omega}_0(t)} |\Delta U_a(t,x)| +$$
$$+ z_0(t) \max_{x\in\bar{\Omega}_0(t)} \alpha \int_0^t [\nu U(t,x) + (1-\nu) U_a(t,x)]^{\alpha-1} d\nu.$$

Используя обозначение (2.5) и оценку (2.48), имеем

$$k(E(U(t,x))) \leqslant \omega[(U_m^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{1/(1-\alpha)}].$$

Поскольку $U_a = (1+t)^{1/(1-\alpha)}\theta_a$, справедливо неравенство

$$|\Delta U_a(t,x)| = \frac{1}{(1+t)} |\Delta_\xi \theta_a| \leqslant \frac{q_a}{(1+t)}.$$

Учитывая, что $\alpha<1$, с помощью (2.47) получаем

$$\int_0^1 [\nu U + (1-\nu) U_a]^{\alpha-1} d\nu \leqslant \frac{a_0^{\alpha-1}}{(1+t)}.$$

Таким образом, при всех достаточно больших t (скажем, при любых $t>$ $>t_*$) выполнено неравенство

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant \omega[(U_m^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}] \frac{q_a}{(1+t)} + z_0 \frac{\alpha a_0^{\alpha-1}}{(1+t)},$$

из которого получаем оценку

$$z_0(t) = O\left\{(1+t)^{\alpha a_0^{\alpha-1}} \int_{t_*}^t \frac{\omega[(U_m^{1-\alpha} + (1-\alpha)\tau)^{\frac{1}{1-\alpha}}]}{(1+\tau)^{1+\alpha a_0^{\alpha-1}}} d\tau\right\}$$

при $t\to\infty$. Отсюда в силу условия $\|\theta(t,\xi) - \theta_a(\xi)\|_{C_\xi} \leqslant (1+t)^{-1/(1-\alpha)} z_0(t)$ убеждаемся в справедливости (2.50). Остается установить, что правая часть (2.50) стремится к нулю при $t\to+\infty$. Поскольку по предположению $(1-\alpha)^{-1} - \alpha a_0^{\alpha-1} > 0$, получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1+t)^{(1-\alpha)^{-1}-\alpha a_0^{\alpha-1}}} \int_{t_*}^t \frac{\omega[(U_m^{1-\alpha} + (1-\alpha)\tau)^{\frac{1}{1-\alpha}}]}{(1+\tau)^{1+\alpha a_0^{\alpha-1}}} d\tau =$$
$$= \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)^{-1} - \alpha a_0^{\alpha-1}} \lim_{t\to+\infty} \frac{\omega[((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}]}{((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}} = 0$$

(здесь используется условие (2.6)), что завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. При «критическом» значении $\alpha=1$ доказательство сходимости по используемой выше схеме не проходит. Поэтому вопрос о структуре п. а. р. при $\alpha=1$ (за исключением частного случая, рассмотренного в п. 1.2) остается открытым.

2. Приближенные автомодельные решения при $\alpha<1$ (общий случай). Ниже рассматриваются «вырожденные» п. а. р. уравнения (1.1) с более общим, чем в (2.7), видом источника $Q(u)$. Изложим кратко общую схему построения п. а. р. в этом случае.

Замена $u=E(U)$ преобразует (1.1) к виду (ср. (2.17))

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k(E(U))\Delta U + (\nabla U)^2 + q(U), \tag{2.51}$$

где

$$q(U) = \frac{Q(E(U))}{E'(U)}. \tag{2.52}$$

Пусть $q'(s) \neq 0$ при всех достаточно больших $s > 0$. Мы будем предполагать, что зависимость $q(s)$ при больших s «близка» к степенной s^α в следующем смысле:

$$\left[\frac{q(s)}{q'(s)}\right]' \to \frac{1}{\alpha}, \quad s \to +\infty, \tag{2.53}$$

$$\frac{q'(\zeta s)}{\zeta^{\alpha-1} q'(s)} \to 1, \quad s \to +\infty; \quad \zeta = \text{const} > 0. \tag{2.54}$$

Если $q(s) = s^\alpha$, то (2.53), (2.54) превращаются в тождества. Из (2.52) нетрудно получить, что

$$Q(s) = \frac{s+1}{k(s)} q(E^{-1}(s)), \quad s > 0. \tag{2.52'}$$

П. а. р. уравнения (2.51) будем искать в виде

$$U_a(t, x) = \psi(t)\,\theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \tag{2.55}$$

где положительные монотонно возрастающие функции $\psi(t)$, $\varphi(t)$ подлежат в дальнейшем определению, а θ_a является радиально симметричным решением обыкновенного дифференциального уравнения (2.13). Если $q(s) = s^\alpha$, $\alpha < 1$, то, как показано в п. 1, $\psi(t) = (1+t)^{1/(1-\alpha)}$, $\varphi(t) = (1+t)^{(2-\alpha)/2(1-\alpha)}$, и выражение (2.55) определяет «порождающее» п. а. р. В общем случае, когда функция q не является степенной (хотя и «близка» к ней), зависимости ψ и φ также, вообще говоря, не являются степенными. П. а. р. (2.55) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \psi'(t)\,\theta_a(\xi) - \left(\psi \frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t) \nabla_\xi \theta_a \xi. \tag{2.56}$$

Однако в силу (2.13)

$$\theta_a = (1-\alpha)(\nabla_\xi \theta_a)^2 + \frac{2-\alpha}{2} \nabla_\xi \theta_a \xi + (1-\alpha)\,\theta_a^\alpha.$$

Подставляя это равенство в (2.56), имеем

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = (1-\alpha)\left(\frac{\psi'\varphi^2}{\psi^2}\right)(t)\,(\nabla_x U_a)^2 + \left[\frac{2-\alpha}{2}\frac{\psi'}{\psi} - \frac{\varphi'}{\varphi}\right](t)\,\nabla_x U_a \dot{x} + (1-\alpha)(\psi'\psi^{-\alpha})(t)\,U_a^\alpha. \tag{2.57}$$

Функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ определяются из наглядного требования «максимального совпадения» правых частей уравнений (2.51) и (2.57). Это дает следующие зависимости: функция ψ определяется, например, из равенств

$$\psi'(t) = \frac{1}{1-\alpha} q(\psi(t)), \quad t > 0; \quad \psi(0) = 1, \tag{2.58}$$

а φ имеет вид

$$\varphi(t) = \left\{\frac{1}{1-\alpha}\frac{\psi^2(t)}{\psi'(t)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \tag{2.59}$$

Из (2.57) тогда получаем

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = (\nabla U_a)^2 + G(t)\,\nabla U_a x + H(t)\,U_a^\alpha, \tag{2.60}$$

где введены обозначения

$$G(t)=\left(\frac{2-\alpha}{2}\frac{\psi'}{\psi}-\frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t),\quad H(t)=\left(\frac{q(\psi)}{\psi^{\alpha}}\right)(t). \tag{2.61}$$

Легко видеть, что в случае «порождающих» п. а. р. $G\equiv 0$, $H\equiv 1$ и (2.50) совпадает с (2.18).

Рассмотрим теперь для (1.1) краевую задачу в области $t>0$, $x\in\Omega_0(t)=\{x\,|\,\|x\|\leqslant\rho_0\varphi(t)\}$ с начальным условием (2.45) и граничным условием

$$U(t,x)=a_0\psi(t),\quad t>0,\quad x\in\partial\Omega_0(t) \tag{2.62}$$

(здесь постоянные a_0 и ρ_0 выбираются так же, как в п. 1.3). Отметим, что условию (2.62) удовлетворяет п. а. р. (2.55). В исходных обозначениях $U=E^{-1}(u)$ это условие имеет вид

$$u(t,x)=E[a_0\psi(t)],\quad t>0,\quad x\in\partial\Omega_0(t). \tag{2.63}$$

При этом п. а. р.

$$u_a(t,x)=E(U_a)=E[\psi(t)\theta_a(\xi)],\quad \xi=\frac{x}{\varphi(t)}, \tag{2.64}$$

исходного параболического уравнения (1.1) удовлетворяет такому уравнению:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\mathbf{B}(t,u_a)=\frac{k(u_a)}{u_a+1}(\nabla u_a)^2+G(t)\nabla u_a\cdot x+H(t)Q_\alpha(u_a). \tag{2.65}$$

Автомодельное представление решения $u(t,x)$ определим по формуле

$$\theta(t,\xi)=\frac{1}{\psi(t)}U(t,\xi\varphi(t)),\quad t>0,\quad \xi\in[0,\rho_0]. \tag{2.66}$$

Так же, как в п. 1.3, нам понадобятся оценки решения задачи (2.51), (2.45), (2.62) снизу и сверху.

Лемма 2.3. *Пусть выполняются условия* (2.53) *и* (2.54). *Тогда при всех достаточно больших* $t>0$ *справедливы оценки*[5]

$$\min_{x\in\bar\Omega_0(t)}U(t,x)=a_0\psi(t), \tag{2.67}$$

$$\max_{x\in\bar\Omega_0(t)}U(t,x)\cong(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\psi(t), \tag{2.68}$$

где $\psi(t)$ *определяется из* (2.58).

Доказательство леммы основано на оценках, вытекающих из принципа максимума, и использует тот факт, что решение $u_m(t)$ эквивалентной «пространственно-однородной задачи»

$$\frac{du_m}{dt}(t)=q(u_m(t)),\quad t>0;\quad u_m(0)>0 \tag{2.69}$$

асимптотически совпадает с функцией $\theta_0\psi(t)$. Действительно, из (2.69) имеем $u_m(t)\cong F^{-1}(t)$, где F^{-1} — функция, обратная

$$F(s)=\int_1^s\frac{d\eta}{q(\eta)},\quad s>1.$$

Тогда, последовательно раскрывая неопределенности, имеем (см. (2.58))

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(u_m(t))}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\theta_0\psi'(t)}{q(\theta_0\psi(t))}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1-\alpha)\psi'(t)}{q(\psi(t))}=1.$$

[5] Здесь и далее символом $\cong$ обозначается асимптотическая эквивалентность функций при $t\to\infty$.

Здесь использовано выводимое из (2.54) условие

$$\frac{q(\zeta s)}{\zeta^{\alpha} q(s)} \to 1, \quad s \to +\infty; \quad \zeta = \text{const} > 0. \tag{2.70}$$

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения этого параграфа.

Теорема 2.4. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (2.1), (2.2), (2.53), (2.54) *и, кроме того, выполнено неравенство* (2.49). *Тогда*

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{C_\xi} \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{2.71}$$

где θ — *автомодельное представление* (2.66) *решения задачи* (1.1), (2.44), (2.63).

Замечание. Оценка скорости сходимости $\theta \to \theta_a$ при $t \to +\infty$ будет получена в процессе доказательства теоремы.

Доказательство. Из (2.51) и (2.60) следует, что функция $z = U - U_a$ удовлетворяет при $t > 0$, $x \in \Omega_0(t)$ уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k(E(U))\,\Delta z + \nabla z \cdot \nabla(U_a + U) + k(E(U))\,\Delta U_a -$$
$$- G(t)\,\nabla U_a \cdot x + [q(U) - q(U_a)] + [q(U_a) - H(t)\,U_a^{\alpha}],$$

причем $z \equiv 0$ на $\partial\Omega_0(t)$. Отсюда в силу принципа максимума и оценок, полученных в лемме 2.3, имеем $|z(t, x)| \leqslant z_0(t)$ всюду в $\Omega_0(t)$, где ограниченная гладкая функция z_0 при достаточно больших $t > 0$ такова, что

$$\frac{dz_0}{dt}(t) = q_a \omega[\theta_0 \psi(t)] \frac{\psi(t)}{\varphi^2(t)} + p_a |G(t)|\,\psi(t) + z_0(t)\,h_q(t) + g_q(t), \tag{2.72}$$

где

$$q_a = \max|\Delta_\xi \theta_a(\xi)|, \quad p_a = \max|\nabla_\xi \theta_a(\xi) \cdot \xi| < +\infty,$$

$$h_q(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}_0(t)} \int_0^1 q'(\nu U + (1 - \nu)\,U_a)\,d\nu = q'(a_0 \psi(t)), \quad t \to +\infty;$$

$$g_q(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}_0(t)} |q(U_a(t, x)) - H(t)\,U_a^{\alpha}(t, x)|.$$

Для доказательства сходимости решения задачи к п. а. р. в смысле (2.71) достаточно показать, что $z_0(t)/\psi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ (см. доказательство теоремы 2.3). Из (2.72) непосредственно следует, что

$$\frac{z_0(t)}{\psi(t)} \cong q_a \frac{J(t)}{\psi(t)} \int_1^t \frac{\omega[\theta_0 \psi(\tau)]\,\psi(\tau)\,d\tau}{\varphi^2(\tau)\,J(\tau)} + p_a \frac{J(t)}{\psi(t)} \int_1^t |G(\tau)| \frac{d\tau}{J(\tau)} +$$
$$+ \frac{J(t)}{\psi(t)} \int_1^t g_q(\tau) \frac{d\tau}{J(\tau)} = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad t \to +\infty,$$

где через J обозначено выражение

$$J(t) = \exp\left[\int_1^t h_q(\tau)\,d\tau\right].$$

Нетрудно проверить, что в сделанных предположениях

$$\frac{\int_1^t h_q(\tau)\,d\tau}{\ln \psi(t)} \to a_0^{\alpha-1} \alpha(1 - \alpha), \quad t \to +\infty.$$

Действительно,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\int\limits_1^t h_q(\tau)\,d\tau}{\ln\psi(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{q'(a_0\psi(t))\,\psi(t)}{\psi'(t)}=$$

$$=a_0^{\alpha-1}(1-\alpha)\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi}{\left[\frac{q(\psi)}{q'(\psi)}\right]}=a_0^{\alpha-1}(1-\alpha)\left\{\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{q(s)}{q'(s)}\right]'\right\}^{-1}=a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha).$$

Отсюда получаем

$$J(t)=\exp\left\{\ln\psi(t)\left[\frac{\int\limits_1^t h_q(\tau)\,d\tau}{\ln\psi(t)}\right]\right\}\simeq[\psi(t)]^{a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)}.$$

Поэтому, учитывая (2.59) и (2.6), имеем

$$\lim_{t\to+\infty}I_1(t)=\frac{q_a}{1-a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)}\lim_{t\to+\infty}\frac{\omega(\theta_0\psi)\,\psi}{\varphi^2\psi}=$$

$$=\frac{q_a(1-\alpha)}{1-a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)}\lim_{t\to+\infty}\frac{\omega[\theta_0\psi(t)]}{\psi(t)}=0.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{t\to+\infty}I_2(t)=\frac{p_a}{1-a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)}\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{2-\alpha}{2}-\frac{\psi}{\psi'}\frac{\varphi'}{\varphi}\right|=$$

$$=\frac{p_a}{2[1-a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)]}\lim_{t\to+\infty}\left|2-\alpha-\frac{1}{\psi}\left(\frac{\psi^2}{\psi'}\right)'\right|=$$

$$=\frac{p_a}{2[1-a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)]}\left|1-\alpha-\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\psi}{\psi'}\right)'(t)\right|=0,$$

поскольку в силу (2.58) и (2.53)

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\psi}{\psi'}\right)'(t)=\lim_{\psi\to+\infty}\left[\frac{\psi}{q(\psi)}\right]'_\psi q(\psi)=1-\lim_{\psi\to+\infty}\frac{\psi}{\left[\frac{q(\psi)}{q'(\psi)}\right]}=1-\alpha.$$

Наконец, рассматривая выражение $I_3(t)$, имеем

$$\lim_{t\to+\infty}I_3(t)=\frac{1-\alpha}{1-a_0^{\alpha-1}\alpha(1-\alpha)}\lim_{t\to+\infty}\max_{\eta\in[a_0,\theta_0]}\left|1-\frac{q(\eta\psi(t))}{\eta^\alpha q(\psi(t))}\right|=0.$$

Рассмотрим один конкретный случай применения теоремы 2.4.

Пример 1. Пусть

$$k(s)=\ln^\lambda(1+s),\quad q(s)=s^\alpha\exp[\ln^\gamma(1+s)],\quad s>0, \tag{2.73}$$

где $\lambda\geqslant0$, $\alpha<1$ и $\gamma\in(0,1)$ — постоянные. Нетрудно видеть, что условия (2.1), (2.2) и (2.53), (2.54) здесь выполнены (последнее обеспечивается неравенством $\gamma<1$). Из (2.3) имеем

$$E(s)=\exp\{[(\lambda+1)s]^{\frac{1}{\lambda+1}}\}-1,\quad E^{-1}(s)=\frac{\ln^{\lambda+1}(1+s)}{\lambda+1}.$$

Поэтому в силу (2.52′) источник Q в исходном уравнении (1.1) имеет вид

$$Q(s)=\frac{(1+s)}{(\lambda+1)^\alpha}\ln^{\lambda(\alpha-1)+\alpha}(1+s)\exp\left\{\ln^\gamma\left[1+\frac{\ln^{\lambda+1}(1+s)}{\lambda+1}\right]\right\}\simeq$$

$$\simeq\frac{s}{(\lambda+1)^\alpha}\ln^{\lambda(\alpha-1)+\alpha}s\exp[(\lambda+1)^\gamma\ln^\gamma\ln s] \tag{2.73′}$$

при больших s. Таким образом, как следует из теоремы 2.4, при соответствующем выборе краевого условия уравнение (1.1) с коэффициентами (2.73), (2.73′) имеет п. а. р.

$$u_a(t, x) = \exp\{[(\lambda+1)\psi(t)\theta_a(\xi)]^{\frac{1}{\lambda+1}}\} - 1, \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)},$$

где функции ψ, φ определяются по следующим асимптотически точным при $t \to +\infty$ формулам (см. (2.58), (2.59)):

$$\psi(t) \cong (1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left\{\left[\frac{1}{1-\alpha}\ln(1+t)\right]^{\nu}\right\},$$

$$\varphi(t) \cong (1+t)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\alpha}\ln(1+t)\right]^{\nu}\right\}.$$

3. О неограниченных приближенных автомодельных решениях в «вырожденном» случае. Как уже отмечалось, при $\alpha > 1$ уравнение (2.35) может, вообще говоря, не иметь глобального решения и поэтому («порождающие») п. а. р. следует искать в классе функций, определенных на конечном интервале изменения времени. Такие п. а. р., удовлетворяющие уравнению первого порядка типа Гамильтона—Якоби (2.10), существуют и имеют сходный с (2.11) вид

$$u_a(t, x) = E[(T-t)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\theta_a(\xi)],$$
$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) = \left(\frac{x_1}{(T-t)^{\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}}}, \ldots, \frac{x_N}{(T-t)^{\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}}}\right). \tag{2.74}$$

Здесь $T \in \mathbf{R}_+^1$ — произвольная постоянная (время существования решения). Поскольку $\alpha > 1$, имеем $u_a(t, 0) = E[(T-t)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\theta_a(0)] \to +\infty$ при $t \to T^- < +\infty$. Подставляя (2.74) в уравнение (2.10), получим для функции $\theta_a \geqslant 0$ следующее уравнение первого порядка (ср. (2.13)):

$$(\nabla\theta_a)^2 - \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\nabla_\xi\theta_a\xi - \frac{1}{\alpha-1}\theta_a + \theta_a^\alpha = 0. \tag{2.75}$$

Нетрудно показать, что при любых $\alpha > 1$ существует нетривиальное немонотонное решение уравнения (2.75), зависящее только от $\rho = \|\xi\|$. Оно удовлетворяет краевой задаче

$$(\theta_a')^2 - \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\theta_a'\rho - \frac{1}{\alpha-1}\theta_a + \theta_a^\alpha = 0, \quad \rho > 0, \tag{2.76}$$

$$\theta_a'(0) = 0. \tag{2.77}$$

Лемма 2.4. *При любых $\alpha > 1$ существует (обобщенное) решение $\theta_a \geqslant 0$ задачи (2.76), (2.77), причем*

$$\theta_a(\rho) = (\alpha-1)^{-\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{4(\alpha-1)}\rho^2 + o(\rho^2), \quad \rho \to 0. \tag{2.78}$$

Это решение является убывающим и принадлежит C^2 всюду, где оно положительно. При $1 < \alpha < 2$ решение финитно, при $\alpha > 2$ — строго положительно в $\mathbf{R}_+^1$.

Локальная разрешимость задачи (2.76), (2.77) устанавливается так же, как при доказательстве леммы 2.1. Монотонность решения, удовлетворяющего (2.78), непосредственно вытекает из вида уравнения (2.76).

Если $1<\alpha<2$, то из (2.76) также получаем

$$\theta_a'^2 - \frac{\theta_a}{\alpha-1} + \theta_a^\alpha = \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\theta_a'\rho \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\theta_a' \leqslant -\left[\theta_a\left(\frac{1}{\alpha-1} - \theta_a^{\alpha-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \theta_a(0) = \theta_0 = (\alpha-1)^{-\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем оценку сверху решения θ_a через неполную бета-функцию и, в частности, условие финитности

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a < \pi^{\frac{1}{2}}(\alpha-1)^{-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\right)} < +\infty. \tag{2.79}$$

При $\alpha=2$ уравнение (3.4) интегрируется и его решение представимо в явном виде, например

$$\theta_a(\rho) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right), & \rho \leqslant \pi, \\ 0, & \rho > \pi. \end{cases} \tag{2.80}$$

Если же $\alpha>2$, то, как следует из (2.76), имеем

$$-\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\theta_a'\rho - \frac{1}{\alpha-1}\theta_a = -\theta_a'^2 - \theta_a^\alpha \leqslant 0. \tag{2.81}$$

Выберем $\rho_1>0$ такое, что $\theta(\rho_1)>0$. Тогда из (2.81) получаем

$$\theta_a(\rho) \geqslant \theta_a(\rho_1)\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{-\frac{2}{\alpha-2}}, \quad \rho > \rho_1,$$

и тем самым решение является строго положительным.

Отметим также, что искомое решение θ_a при всех $\rho>0$ не меньше, чем убывающее решение задачи

$$f'^2 - \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}f'\rho - \frac{1}{\alpha-1}f = 0, \quad \rho>0; \quad f(0) = \theta_0,$$

которое подробно рассматривалось в [7], [10], [11]. Функция $f(\rho)\geqslant 0$ определяется из некоторого алгебраического соотношения, что позволяет вывести оценки $\theta_a(\rho)$ снизу. Отсюда, например, в случае $1<\alpha<2$ получаем

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a > \operatorname{mes}\operatorname{supp} f = 2\left[\frac{2-\alpha}{\alpha-1}\right]^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}}.$$

Используя преобразования $U=E^{-1}(u)$ и $U_a=E^{-1}(u_a)$, так же, как в п. 1, нетрудно показать, что при $\alpha>1$ в «окрестности» п. а. р. $U_a = (T-t)^{-1/(\alpha-1)}\theta_a(\xi)$ происходит асимптотическое «вырождение» при $t\to T^-$ параболического оператора в правой части (2.17) в оператор первого порядка уравнения (2.18) (об этом же свидетельствуют и другие качественные оценки [10], [68]). Однако, строгое доказательство сходимости автомодельного представления

$$\theta(t,\xi) = (T-t)^{\frac{1}{\alpha-1}}E\left[u_a\left(t, \xi(T-t)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}}\right)\right] \tag{2.82}$$

решения уравнения (2.35) к $\theta_a(\xi)$ при $t\to T^-$ провести не удается. Встре-

чающиеся здесь трудности, в общем, типичны для задач, решения которых эволюционируют в режиме с обострением (см. [50], [51], [56]). Например, в случае задачи Коши время существования решения T зависит от начальной функции и поэтому автомодельное представление (2.83) «неустойчиво» по отношению к ее малым возмущениям. Для некоторых классов задач устойчивость неограниченных автомодельных решений можно обеспечить выбором подходящих краевых условий (см. [56]). В данном же случае ввиду «недивергентности» дифференциальных членов в правой части (2.17) ни один из методов [56] не дает положительного результата. Метод доказательства теоремы 2.3 так же не проходит, поскольку вместо (2.49) здесь появляется требование $\theta_0^{\alpha-1}\alpha<1/(\alpha-1)$, которое при $\alpha>1$ и $\theta_0=(\alpha-1)^{-1/(\alpha-1)}$ (см. лемму 2.4) выполненным быть не может. В то же время отметим, что результаты численных расчетов задачи Коши для (2.35) при $k\equiv 1$, $N=1$ свидетельствуют о сходимости $\theta(t, \xi)\to\theta_\alpha(\xi)$ при $t\to T^-$ [68] (автомодельное представление $\theta(t, \xi)$ при этом определяется иным, отличным от (2.83), способом; например, при $\alpha=2$ это $\theta(t, \xi)=U(t, \xi)/[\max U(t, x)]$, θ_α имеет вид (2.80)).

§ 3. Заключение

Ниже для систематизации полученных в § 2 результатов приведена так называемая «плоскость краевых задач» для уравнения (1.1). Вдоль осей, расположенных на «плоскости», отложены классы (как правило, однопараметрические семейства) функций $\{k\}$ и $\{Q\}$, упорядоченных по характеру изменения коэффициентов $k(u)$ и $Q(u)$ при больших u. Каждой точке «плоскости» соответствует свое семейство нестационарных решений, отвечающих данным коэффициентам уравнения, причем, как уже упоминалось во введении, имеются в виду такие решения (и такие отвечающие им краевые условия), которые формируются за счет «нелинейного взаимодействия» процессов диффузии и энерговыделения. Например, точке 1 на «плоскости» с координатами $(\{1\}, \{u\})$ отвечает семейство решений (2.25), все наиболее характерные свойства которых описывает пространственно-временная структура соответствующих автомодельных решений уравнения (2.20)

$$u_A(t, x)=\frac{c}{t^{N/2}}\exp\left\{-\frac{\|x\|^2}{4t}+t\right\}, \quad c=\text{const}>0.$$

Точке 2 (координаты $(\{1\}, \{u\ln u\})$) отвечает семейство инвариантных решений (2.34) уравнения (2.31). Этими двумя «точками» исчерпывается весь набор точных инвариантных решений уравнения (1.1) в рассматриваемой области «плоскости краевых задач» [6].

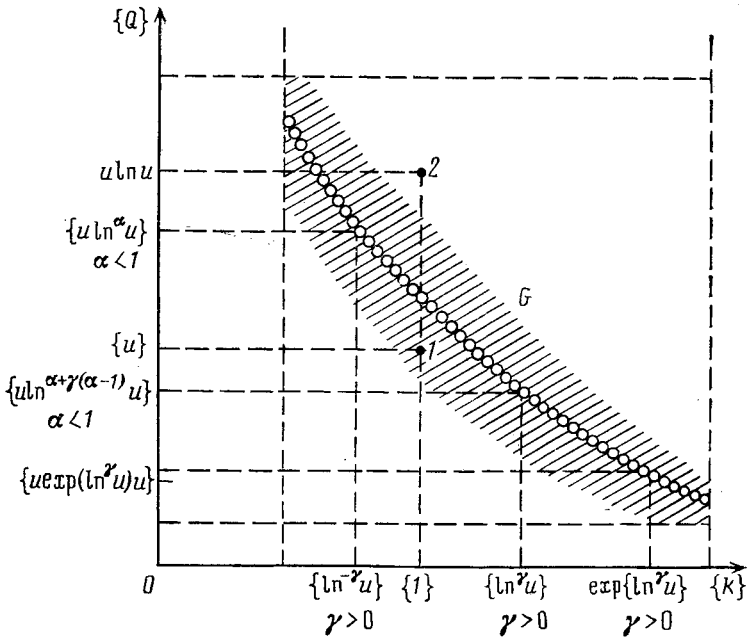
На рисунке приведена та область «плоскости» (она заштрихована), которую целиком удалось покрыть семействами «вырожденных» п. а. р., построенных в рамках излагаемой выше теории. Кривой А—А отвечает семейство «порождающих» п. а. р. (см. теорему 2.3). Это семейство существует при любых k, удовлетворяющих условиям (2.1), (2.2), (2.7), $\alpha<1$, и поэтому образует «непрерывную» кривую. Полная система п. а. р.

---

[6] Разумеется, при любых k и Q уравнение (1.1) допускает инвариантные решения типа «бегущей волны», которые, однако, в силу своих специфических особенностей не могут описывать асимптотическое поведение его решений (о причинах этого см., например, в [47]).

в заштрихованной области G, содержащей кривую А — А, указана в теореме 2.4.

В заключение отметим, что в других областях «плоскости» также могут быть построены полные системы п. а. р., однако здесь они являются



Области G «вырожденных» п. а. р. «плоскости краевых задач»; ○ — «порождающие» п. а. р., • — точные автомодельные или инвариантные решения.

«невырожденными» (см. § 1) и удовлетворяют параболическим уравнениям, отличным от исходного. Отметим, что в области G существуют ветви «невырожденных» п. а. р. (для уравнения (1.13) они построены в [9]).

Литература

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— Ж. прикл. механ. и техн. физики, 1977, № 1, с. 3—23.
3. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
4. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
5. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
6. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 292—322.
7. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 435—455.
8. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III.— Матем. сб., 1983, т. 120(162), с. 3—21.
9. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV.— Матем. сб., 1983, т. 121(163), с. 131—155.
10. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.— Труды МИАН, 1981, т. 158, с. 153—162.
11. *Галактионов В. А.* О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности.— Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1660—1676.

12. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений.— УМН, 1959, т. 14, вып. 2, с. 87—158.
13. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
14. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
15. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956.
16. *Похожаев С. И.* Об одном подходе к нелинейным уравнениям.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1327—1331.
17. *Bahri A., Berestycki H.* A perturbation method in critical point theory and applications.— Trans. of Amer. Math. Soc., 1981, v. 267, p. 1—32.
18. *Strauss W. A.* Existence of solitary waves in higer dimensions.— Comm. in Math. Phys., 1972, v. 55, p. 149—162.
19. *Berestycki H., Lions P. L., Pebtier L. A.* An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in R^N.— Indiana Univ. Math. J., 1981, v. 30, p. 141—157.
20. *De Figueiredo D. G., Lions P.-L., Nussbaum R. D.* A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic aquations.— J. Math. Pures et Appl., 1982, v. 61, p. 41—63.
21. *Lions P. L.* On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.— SIAM Review, 1982, v. 24, p. 441—467.
22. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1976.
23. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Устойчивость по Ляпунову решений смешанных задач для нелинейных параболических уравнений.— В кн.: Труды Всесоюзн. конф. по уравн. с част. производными. М.: изд-во МГУ, 1978, с. 42—45.
24. *Зеленяк Т. И.* О стабилизации решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной.— Дифф. уравнения, 1968, т. 4, № 1, с. 34—45.
25. *Руденко Э. Н.* О поведении решений смешанных задач для квазилинейных уравнений параболического типа.— Дифф. уравнения, 1971, т. 7, № 1, с. 115—120.
26. *Fife P. C.* Mathematical aspects of reacting and diffusing systems. Berlin: Springer, 1979.
27. *De Mottoni P., Talenti G., Tesei A.* Stability results for a class of nonlinear parabolic equations.— Ann. Mat. Pure et Appl., 1977, v. 115, p. 295—310.
28. *Зеленяк Т. И., Михайлов В. П.* Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \to \infty$.— В кн.: Дифф. уравн. с частн. производными. М.: Наука, 1970, с. 96—118.
29. *Maginu K.* Stability of stationary solutions of a semilinear parabolic partial differential equation.— J. Math. Anal. Appl., 1978, v. 63, p. 224—243.
30. *Fife P. C., Tang Ming Ming.* Comparison principles for reaction — diffusion systems: irregular comparison functions and applications to questions of stability and speed of propagation of disturbances.— J. Differ. Equat., 1981, v. 40, p. 168—185.
31. *Акрамов Т. А.* О стабилизации решений системы уравнений в частных производных, описывающих кинетику обратимых химических реакций.— Динамика сплошн. среды, 1976, № 26, с. 3—16.
32. *Chuen K. N., Conley C. C., Smoller J. A.* Positively invariant region for systems of nonlinear diffusion equations.— Indiana Univ. Math. J., 1977, v. 26, p. 373—392.
33. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности.— УМН, 1983, т. 38, вып. 4, с. 133—187.
34. *Дородницын В. А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 6, с. 1393—1400.
35. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях.— Дифф. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1215—1223.
36. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком. Препринт № 57, М.: ИПМ АН СССР, 1979.
37. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
38. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли.— Беклунда.— Функц. анализ, 1980, т. 14, № 1, с. 25—36.
39. *Kumei S., Bluman G. W.* When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations.— SIAM J. Appl. Math., 1982, v. 42, p. 1157—1173.
40. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме.— Бюлл. МГУ, 1937, т. 1, № 6, с. 1—26.
41. *Канель Я. И.* О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения.— Матем. сб., 1962, т. 59(101), доп., с. 245—288.
42. *Канель Я. И.* О стабилизации решений уравнений теории горения при финитных начальных функциях.— Матем. сб., 1964, т. 65(107), с. 398—413.
43. *Sattinger D. H.* On the stability of waves of nonlinear parabolic systems.— Adv. in Math., 1976, v. 22, p. 312—355.
44. *Gartner J.* Location of wave front for the multidimensional *K-P-P* equation and brownian first exit densities.— Math. Nachr., 1982, v. 105, p. 317—351.

45. *Hagan S.* The instability of nonmonotonic wave solutions of parabolic equations.— Stud. Appl. Math., 1981, v. 64, p. 57—88.
46. *Atkinson C., Reuter G. E. H., Ridler-Rowe C. J.* Travelling wave solutions for some nonlinear diffusion equations.— SIAM J. Math. Anal., 1981, v. 12, p. 880—892.
47. *Галактионов В. А.* О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источником тепла.— ЖВМ и МФ, 1981, т. 21, № 4, с. 980—989.
48. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.
49. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
50. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт № 106, М.: ИПМ АН СССР, 1977.
51. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.— ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 2, с. 380—390.
52. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$.— ДАН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362—1364.
53. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Устойчивость собственных функций и эффекты переноса в неоднородной диссипативной среде. Препринт № 16, М.: ИПМ АН СССР, 1980.
54. *Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником. Препринт № 31, М.: ИПМ АН СССР, 1980.
55. *Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.* Исследование автомодельных структур в нелинейной среде. Препринт № 108, М.: ИПМ АН СССР, 1982.
56. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником.— Дифф. уравнения, 1984, т. 20, № 4, с. 614—632.
57. *Lacey A. A.* The spatial dependence of supercritical reacting systems.— IMA J. Appl. Math., 1981, v. 27, p. 71—84.
58. *Haraux A., Weissler F. B.* Non-uniqueness for a semilinear initial value problem.— Indiana Univ. Math. J., 1982, v. 31, p. 167—189.
59. *Пухначев В. В.* Асимптотика при $t \to \infty$ положительного решения краевой задачи для модельного уравнения химической кинетики.— Дифф. уравнения, 1971, т. 7, № 1, с. 109—114.
60. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 4, с. 1048—1054.
61. *Кершнер Р.* О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1978, т. 32, № 3—4, с. 301—330.
62. *Мартинсон Л. К.* Распространение возмущений в нелинейных процессах переноса.— Труды МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1979, № 301, с. 19—34.
63. *Галактионов В. А.* Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений.— ДАН СССР, 1982, т. 264, № 5, с. 1035—1040.
64. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифф. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
65. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А . А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I.— Дифф. уравнения, 1983, т. 19, № 12, с. 2123—2140.
66. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—624.
67. *Самарский А. А., Курдюмов С. П.* Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС.— В кн.: Труды кафедры волновой и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ. М.: МГУ, 1979, с. 18—28.
68. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений. Препринт № 161, М.: ИПМ АН СССР, 1979.
69. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
70. *Fujita H., Watanabe S.* On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasi-linear parabolic equations.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1968, v. 21, p. 631—652.

Институт прикладной
математики им. М. В. Келдыша
Москва

Поступила в редакцию
18.XI.1983