

## ПРОГРАММА DIANA РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

А.А. Самарский, С.А. Гайфулин, А.В. Захаров, Н.В. Змитренко,  
В.Я. Карпов, А.П. Михайлов, Т.В. Мищенко

Описывается программа *DIANA*, предназначенная для расчета уравнений одномерной газовой динамики с теплопроводностью в лагранжевых координатах в плоской, цилиндрической или сферической геометриях с учетом различных физических эффектов. Программа ориентирована на решение задач лазерного термоядерного синтеза.

### Введение

В работе описывается программа *DIANA*, предназначенная для расчета уравнений одномерной газовой динамики с теплопроводностью с учетом различных физических эффектов. Программа ориентирована на решение задач лазерного термоядерного синтеза.

Вычислительный эксперимент является мощным методом исследования сложных физических явлений [1]. Работы в этом направлении интенсивно ведутся в ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР в коллективе отдела, руководимого академиком А.А. Самарским.

Расчетно-теоретические работы в этой области базируются на большом опыте, накопленном в коллективе за многие годы при численном решении задач газовой динамики, магнитной гидродинамики, радиационной газовой динамики, квантовой механики, уравнений диффузии, переноса, кинетики и других задач.

Этот опыт отражен в методиках и программах (см., например, [2-4]), ориентированных на численное решение задач управляемого термоядерного синтеза (УТС) и эффективно использовавшихся при численном моделировании процессов в лазерном термоядерном синтезе (ЛТС), релятивистских электронных пучках,  $z$ - и  $\theta$ -пинчах и других задачах (см., например, [5-7]).

Разработка и реализация соответствующих методик и программ проводилась А.А. Самарским, С.П. Курдюмовым, П.П. Волосевичем, Ю.П. Поповым, Е.И. Ле-

вановым, Л.М. Дегтяревым, А.П. Фаворским, Г.В. Даниловой, Л.С. Царевой и другими сотрудниками [1-5].

В связи с совершенствованием организации работ в этой области и созданием пакета прикладных программ САФРА [8] возник вопрос о том, чтобы функциональное наполнение пакета соответствовало лучшим методикам, разработанным при решении перечисленных выше задач.

В частности, программа *DIANA* в методическом отношении эквивалентна программе ЛУЧ [7]. В программе *DIANA*, как и в программе ЛУЧ, используются полностью консервативные разностные схемы, итерационный метод последовательных прогонок и т.д. Программа ЛУЧ, созданная П.П. Волосевичем, Г.В. Даниловой, Л.С. Царевой и другими, успешно эксплуатируется в течение ряда лет и показала свою эффективность при решении различных задач ЛТС. Было проведено детальное сравнение программ *DIANA* и ЛУЧ, которое показало, что расчеты по ним дают одинаковые результаты.

Структура программы *DIANA* и общие правила ее написания базируются на системе *OLYMPUS* [9-11]. Мы также отчасти использовали соглашения, принятые в программе *MEDUSA* [12]. Программа *DIANA* имеет ряд общих модулей с программой *FLORA*. Программа *DIANA* является частью функционального наполнения пакета прикладных программ САФРА и

большинство использует предоставляемые пакетом услуги.

В настоящей работе приведены основные уравнения, метод их решения и кратко описана структура программы. Описание физических процессов, учитываемых программой, предполагается опубликовать в будущем. Подробное описание программы, вплоть до обращения к ней в пакете САФРА и задания параметров расчета, можно получить у авторов.

### Основные сведения о задаче

В программе *DIANA* вещество в механическом отношении рассматривается как идеальная (невязкая) сжимаемая жидкость, состояние которой зависит от одной пространственной координаты  $z$ . Тип геометрии области выделяется признаком  $g$ : значения 1, 2, 3 соответствуют плоской, цилиндрической, сферической геометрии соответственно.

Движение вещества описывается уравнением Эйлера, которое в массовых лагранжевых переменных  $(m, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -z^{g-1} \frac{\partial p}{\partial m} \quad (1)$$

Здесь  $u(m, t)$  — скорость вещества, определяющая изменение пространственной координаты  $z(m, t)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = u(m, t); \quad (2)$$

$p(m, t)$  — гидродинамическое давление.

Массовая координата  $m$  связана с пространственной координатой  $z$  соотношением

$$dm = \rho d(z^g), \quad (3)$$

где  $\rho(m, t)$  — плотность вещества.

Будем предполагать, что значения массовой координаты  $m$  лежат в пределах  $0 \leq m \leq M$ , которые не изменяются со временем. Пределы изменения пространственной координаты  $z$  зависят от времени:

$$z_{лев}(t) = z(0, t) \leq z \leq z(M, t) = z_{прав}(t).$$

На границах области  $m=0, z=z_{лев}$  и  $m=M, z=z_{прав}$  для уравнения (1) будем рассматривать условия двух типов:

а) задана граничная скорость

$$u(0, t) = u_{лев}(t), \quad u(M, t) = u_{прав}(t);$$

б) задано граничное давление

$$p(0, t) = p_{лев}(t), \quad p(M, t) = p_{прав}(t),$$

причем типы граничных условий слева и справа независимы.

В начальный момент времени для уравнений (1)–(2) должно быть задано распределение пространственной координаты  $z(m, 0)$  или (что эквивалентно вследствие (3)) плотности  $\rho(m, 0)$  и начальной скорости  $u(m, 0)$ .

Гидродинамическое давление, входящее в уравнение (1), определяется плотностью вещества и температурами его электронной и ионной компонент

$$p = p_e(\rho, T_e) + p_i(\rho, T_i).$$

Распределение по пространству и изменение со временем температур электронов и ионов описывается уравнениями для внутренних энергий компонент

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial t} &= -p_e \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial W_e}{\partial m} + K + G_e; \\ \frac{\partial E_i}{\partial t} &= -p_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial W_i}{\partial m} - K + G_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $E_e$  и  $E_i(m, t)$  — внутренние энергии компонент, отнесенные к единице массы;  $W_e$  и  $W_i(m, t)$  — электронный и ионный потоки тепла через поперечное сечение области;  $K(m, t)$  — скорость обмена энергией между электронами и ионами (знак "+" берем в уравнении для электронов);  $G_e$  и  $G_i(m, t)$  — массовые плотности источников энергии (поглощение света лазера, собственное излучение, выделение термоядерной энергии).

Потоки тепла связаны с градиентами температур

$$W_{e,i} = -\alpha_{e,i} \rho z^{2(g-1)} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial m}, \quad (5)$$

где  $\alpha_e, \alpha_i$  — коэффициенты электронной и ионной теплопроводности.

Для уравнений энергии будем рассматривать граничные условия двух типов:

а) заданы граничные температуры:

$$T_e(0, t) = (T_e)_{лев}(t), \quad T_e(M, t) = (T_e)_{прав}(t),$$

$$T_i(0, t) = (T_i)_{лев}(t), \quad T_i(M, t) = (T_i)_{прав}(t);$$

б) заданы потоки тепла через границу

$$W_e(0, t) = (W_e)_{лев}(t), \quad W_e(M, t) = (W_e)_{прав}(t);$$

$$W_i(0, t) = (W_i)_{лев}(t), \quad W_i(M, t) = (W_i)_{прав}(t),$$

причем типы граничных условий слева и справа независимы.

В начальный момент времени  $t=0$  в области должны быть заданы распределения температур  $T_e(m, 0)$  и  $T_i(m, 0)$ .

### Метод решения уравнений

Дифференциальные уравнения энергии и движения совместно с уравнением состояния полностью описывают математическую модель задачи. Для численного решения этих уравнений мы пользуемся разностными методами и вводим сетку как по времени, так и по пространству. При этом процедура решения уравнений сводится к последовательному нахождению решения на каждом временном слое. Номер временного слоя будем обозначать верхним индексом  $n$ , так что  $t^n$  —

значение времени на  $n$ -м слое. Шаг по времени будем обозначать  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

Область изменения координаты  $z(m)$ , простирающаяся от точки  $z = z_{лев}(m=0)$  до точки  $z = z_{прав}(m=M)$ , делится на  $N$  интервалов (ячеек). Центры ячеек будем нумеровать индексом  $\ell$ , пробегающим значения от 1 до  $N$ . Границы ячеек нумеруются индексом  $j$ , который изменяется от 1 до  $N+1$ .

Давление, плотность, масса, температура, энергия, источники энергии считаются определенными в центрах ячеек и отмечаются индексом  $\ell$ . Скорость, координата, поток тепла относятся к границам ячеек и отмечаются индексом  $j$ .

Каждая ячейка содержит не изменяющуюся со временем массу вещества  $m_\ell$ , так что плотность вещества в ячейке равна

$$\rho_\ell = \frac{g m_\ell}{z_{j+1}^n - z_j^n}, \quad \ell = j. \quad (6)$$

Это соотношение является разностной аппроксимацией формулы (3).

Уравнение Эйлера (1) во внутренних узлах сетки аппроксимируем следующим уравнением:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -R_j \frac{2}{m_\ell + m_{\ell-1}} \left\{ \rho_\ell^{n+1} q_\ell^{n+1} - \rho_{\ell-1}^{n+1} q_{\ell-1}^{n+1} \right\}. \quad (7)$$

Здесь  $R_j$  — коэффициент, являющийся разностной аппроксимацией коэффициента  $\tau^{g-1}$  в уравнении (1):

$$R_j = \begin{cases} 1 & \text{при } g=1, \\ \{ \tau_j^{n+1} + \tau_j^n \} / 2 & \text{при } g=2, \\ \{ (\tau_j^{n+1})^2 + \tau_j^{n+1} \tau_j^n + (\tau_j^n)^2 \} / 3 & \text{при } g=3; \end{cases} \quad (8)$$

$q_\ell$  — давление искусственной вязкости, вводимое в разностную схему для сквозного счета ударных волн. Мы будем брать его в виде комбинации линейной и квадратичной вязкости. При  $\rho_\ell^n \geq \rho_\ell^{n+1}$  и при  $u_{j+1}^{n+1} \geq u_j^{n+1}$  вязкость равна нулю, а в противном случае вычисляется по формуле

$$q_\ell^{n+1} = \rho_\ell^{n+1} \left\{ -\mu_1 \alpha_\ell \Delta u_\ell + \mu_2 (\Delta u_\ell)^2 \right\}. \quad (9)$$

Здесь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — коэффициенты линейной и квадратичной вязкости, которые могут быть заданы пользователем;  $\alpha = (\rho_\ell^{n+1} / \rho_\ell^{n+1})^{1/2}$  — оценка скорости звука;

$$\Delta u_\ell = \frac{m_\ell}{\tau_\ell^{g-1} \Delta t} \left( \frac{1}{\rho_\ell^{n+1}} - \frac{1}{\rho_\ell^n} \right) -$$

аппроксимация разности скоростей границ ячеек.

Уравнение траекторий (2) аппроксимируем соотношением

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left\{ u_j^{n+1} + u_j^n \right\}.$$

Разностную аппроксимацию уравнений энергии (4) запишем в виде

$$(E_e)_\ell^{n+1} - (E_e)_\ell^n = (\Delta Q_e)_\ell^{n+1} + (\Delta A_e)_\ell^{n+1} + \Delta t K_e^{n+1} + \Delta t (G_e)_\ell^{n+1};$$

$$(E_i)_\ell^{n+1} - (E_i)_\ell^n = (\Delta Q_i)_\ell^{n+1} + (\Delta A_i)_\ell^{n+1} - \Delta t K_i^{n+1} + \Delta t (G_i)_\ell^{n+1}.$$

Здесь  $(\Delta A_{e,i})_\ell^{n+1}$  — работы сил давления над ячейкой;  $(\Delta Q_{e,i})_\ell^{n+1}$  — приток тепла в ячейку за счет теплопроводности.

Из разностных уравнений движения и уравнений для внутренней энергии вытекает закон сохранения полной энергии. Введем  $E_{tot}^n$  — полную (сумму кинетической и внутренней) энергию системы на  $n$ -м слое,  $\Delta A$  — работу над системой внешних сил при переходе от  $n$ -го временного слоя к  $n+1$ -му. Тогда

$$E_{tot}^{n+1} - E_{tot}^n = \Delta A + \Delta t \left\{ W_{лев}(t^{n+1}) - W_{прав}(t^{n+1}) \right\} + \Delta t \sum_{\ell=1}^N m_\ell G_\ell^{n+1},$$

т.е. изменение полной энергии системы на одном временном шаге связано:

- с работой внешних сил на границах системы;
- с притоком тепла через внешние границы;
- с объемными источниками энергии.

#### Схема решения разностных уравнений

Разностные уравнения движения и энергии совместно с уравнением состояния представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых используется следующий итерационный процесс:

- задаем начальное приближение для значения скорости и температуры на  $n+1$ -м временном слое (подпрограмма *STIT*);
- при фиксированной температуре решаем уравнения движения и находим новое приближенное значение скорости на  $n+1$ -м слое (подпрограмма *MOTION*);
- при найденной фиксированной скорости решаем уравнения энергии и находим очередное приближенное значение температуры на  $n+1$ -м слое (подпрограмма *ENERGY*);
- проверяем выполнение закона сохранения энергии (подпрограмма *CONSERV*). Если он выполнен с требуемой точностью, то считаем, что значения функций на момент времени  $t^{n+1}$  найдены. В противном случае возвращаемся к выполнению пункта б) и снова повторяем описанный процесс.

Этот алгоритм решения уравнений зафиксирован в схеме счета программы и, в частности, в подпрограмме управления расчетом временного шага (подпрограмма *STEPON*).

В таблице перечислены имена и назначение подпрограмм, входящих в программу *DIANA*.

Программные единицы программы DIANA

Имя подпрограммы	Номер	Архивное имя	Назначение
------------------	-------	--------------	------------

Класс 0. Управление расчетом

MODIFY	0.2	OLN002	Изменение управляющих параметров системы
COTROL	0.3	OLD003	Управление расчетом

Класс 1. Пролог

LABRUN	1.1	DIA101	Маркировка расчета
PRESET	1.3	DIA103	Предварительное определение параметров расчета
DATA	1.4	DIA104	Определение данных расчета
AUXVAL	1.5	DIA105	Определение вспомогательных величин
INITAL	1.6	DIA106	Определение начальных физических условий
RESUME	1.7	DIA107	Продолжение расчета по предыдущей записи
CLASS1	1.10	OLDCL1	Вызов подпрограмм класса I
FINDM	1.11	DIA111	Построение массовой сетки в области
MESHGN	1.12	DIA112	Генерация массовой сетки

Класс 2. Вычисления

STEPON	2.1	DIA201	Шаг вычислений
MOTION	2.2	DIA202	Решение уравнений движения
STIT	2.3	DIA203	Начало итераций
PRESS	2.4	DIA204	Вычисление гидродинамического давления
VISART	2.5	DIA205	Вычисление давления искusstvenной вязкости
ABCFM	2.6	FLO206	Вычисление коэффициентов разностного уравнения движения
GAUSS1	2.7	FLO207	Решение разностного уравнения методом прогонки
MOVEON	2.8	FLO208	Вычисление гидродинамических переменных
CVERGE	2.9	DIA209	Исследование сходимости итераций
TIMSTP	2.10	FLO210	Выбор временного шага
EXAM	2.11	DIA211	Изучение текущего состояния системы

Продолжение таблицы

Имя подпрограммы	Номер	Архивное имя	Назначение
------------------	-------	--------------	------------

Класс 2. Вычисления

SHIFT	2.12	DIA212	Перепись переменных со слоя 2 на слой 1
BOUNDY	2.13	FLO213	Вычисление граничных условий
ENERGY	2.20	DIA220	Решение уравнения энергии
STATEE	2.21	DIA221	Уравнение состояния электронов
STATEI	2.22	DIA222	Уравнение состояния ионов
COULOG	2.23	DIA223	Вычисление кулоновского логарифма
SOURCE	2.24	DIA224	Вычисление источников в уравнении энергии
XCHANG	2.25	DIA225	Обмен энергией между электронами и ионами
HCDUCT	2.26	DIA226	Коэффициенты электронной и ионной теплопроводности
ABCFE	2.27	DIA227	Вычисление коэффициентов разностного уравнения энергии
GAUSS2	2.28	DIA228	Решение системы двух разностных уравнений методом прогонки
FINDT	2.29	DIA229	Вычисление температуры на новом слое
BREMS	2.30	DIA230	Потери энергии за счет тормозного излучения
ABSORB	2.31	DIA231	Поглощение света лазера
CONSRV	2.32	DIA232	Вычисление отдельных членов закона сохранения энергии
LASER	2.33	DIA233	Мощность лазерного излучения
FUSION	2.34	DIA234	Энергия термоядерных реакций
BURNUP	2.37	DIA237	Выгорание дейтерия и трития

Класс 3. Вывод

OUTPUT	3.1	DIA301	Управление выводом
RECORD	3.2	DIA302	Чтение и запись результатов расчета
MPRINT	3.3	DIA303	Печать результатов расчета
SELECT	3.4	DIA304	Заполнение буферов вывода
TREAT	3.5	DIA305	Обработка результатов расчета и печать

Продолжение таблицы

Имя подпрограммы	Номер	Архивное имя	Назначение
------------------	-------	--------------	------------

Класс 4. Эпilog

TESEND	4.1	FLO401	Проверка на конец расчета
ENDRUN	4.2	DIA402	Преграждение расчета

Класс 5. Диагностика

CLIST	5.2	DIA502	Печать COMMON переменных
ARRAYS	5.3	DIA503	Печать COMMON массивов

Класс U

DUMCOM	U27	OLDU27	Печать заданных COMMON блоков
--------	-----	--------	-------------------------------

Список литературы

1. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. — Вестник АН СССР, 1979, № 5, с.38—49.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
3. Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Препринт, М.: ИПМ АН СССР, 1967.
4. Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. — Журнал вычисл. мат. и мат. физ., 1988, т.8, № 5, с.1025—1038.

5. Волосевич С.П., Дегтярев Л.М., Леванов Е.И. и др. Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициирование термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения. — Физика плазмы, 1978, т.2, № 6, с.883—897.

6. Афанасьев Ю.В., Басов Н.Г., Волосевич П.П. и др. Лазерное инициирование термоядерной реакции в неоднородных сферических мишенях. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, №2, с.150—155.

7. Басов Н.Г., Волосевич П.П., Гамалий Е.Г. и др. Сжатие оболочечных мишеней при нагреве лазерным импульсом наносекундной длительности. — ЖЭТФ, 1980, т.78, № 1, с.420—430.

8. Горбунов-Посадов М.М., Карпов В.Я., Корги и Д.А. и др. Пакет прикладных программ САФРА. Системное наполнение. Препринт № 85, М.: ИПМ АН СССР, 1977.

9. Roberts K.V. An introduction to the OLYMPUS system. — Computer Phys. Commun., 1974, v.7, p.237—243.

10. Christiansen J.P., Roberts K.V. OLYMPUS. A standard control and utility package for initial-value tertran programs. — Computer Phys. Commun., 1974, v.7, p.245—270.

11. Гайфулин С.А., Карпов В.Я., Мищенко Т.В. САФРА. Функциональное наполнение. Система OLYMPUS. Препринт № 27, М.: ИПМ АН СССР, 1980.

12. Christiansen J.P., Ashby D.E.T.F., Roberts K.V. MEDUSA. A one-dimensional laser fusion code. — Computer Phys. Commun., 1974, v.7, p.271.

Статья поступила в редакцию 20.09.82.