Часть I

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Самарский, А. В. Гулин

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

1. В работах [1—3] развита теория устойчивости операторно-разностных схем с операторами, определенными в унитарных или евклидовых пространствах H. В частности, изучалась устойчивость по начальным данным двухслойных разностных схем

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0, \quad n=0,1,\ldots, \tag{1}$$

где $y_n=y(t_n)\in H$, $t_n=n\tau$, $\tau>0$, A, B — линейные операторы, заданные в H; вектор $y_0\in H$ задан. В [2] получены необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным схемы (1), у которой хотя бы один из операторов A или B является самосопряженным и положительным. Изучению разностной схемы (1) с несамосопряженными операторами A и B посвящены работы [4—6, 11].

2. Будем предполагать, что операторы A, B не зависят от n, оператор B^{-1} существует. Примем следующее определение. Разностная схема (1) называется устойчивой, если существует самосопряженный положительный оператор $D: H\to H$ такой, что решение y_{n+1} задачи (1) при любых $y_n\in H$ и при всех $n=0, 1, \ldots$ удовлетворяет оценке

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1})\leqslant(Dy_n, y_n),\ n=0,\ 1, \ldots \tag{2}$$

Устойчивость в смысле этого определения будем называть также устойчивостью в норме D, а сам оператор D — оператором нормы.

Приведенное определение соответствует так называемой равномерной устойчивости по начальным данным, из которой, как известно [3, 7], следует устойчивость по правой части.

Ясно, что устойчивость в норме D эквивалентна выполнению операторного неравенства

$$D\geqslant S^*DS, \tag{3}$$

где $S=E-\tau B^{-1}A$ — оператор перехода схемы (1). Таким образом, теория устойчивости разностных схем сводится к исследованию операторных неравенств и, в частности, к установлению неравенств, эквивалентных (3), по более простых для проверки.

Требуется по заданному оператору S (оператор S задан неявно с помощью операторов A, B) найти положительное решение D неравенства (3). Условия, при которых такое решение существует, называются условиями устойчивости разностной схемы. Условия устойчивости зависят, вообще говоря, от выбора оператора нормы. Если его взять произвольно, то можно получить лишь грубые достаточные условия устойчивости. Наибольший интерес представляет нахождение такого оператора нормы D, который приводил бы к совпадающим необходимым и достаточным условиям устойчивости. Заметим, что не существует общих методов построения указанного оператора D, однако удаётся выделить широкие классы схем, для которых такое построение возможно.

В связи с решением операторного неравенства (3) необходимо отметить аналогию с методом функций Ляпунова в теории устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Как известно, в результате преобразования

$$C = (E - S)^{-1}(E + S)$$

неравенство (3) переходит в эквивалентное неравенство

$$C^*D + DC \geqslant 0. \tag{4}$$

Положительно определенная квадратичная форма (Dy, y), удовлетворяющая неравенству (4), называется функцией Ляпунова для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} + Cu = 0. \tag{5}$$

Известно, что если система уравнений (5) устойчива, то существует функция Ляпунова, причем не единственная (см., например, [8]).

Если речь идет о конкретных разностных схемах, аппроксимирующих задачи математической физики, то требуется исследовать норму $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$, порождаемую оператором D. Основным здесь является доказательство согласованности этой сеточной нормы с какой-либо нормой в пространстве функций непрерывного аргумента. Промежуточным этапом может быть доказательство эквивалентности нормы $\|y\|_D$ сеточной L_2-норме $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ с константами эквивалентности, не зависящими от сетки. Отметим, что необходимость аналогичного исследования функций Ляпунова возникает и в теории дифференциальных уравнений [9].

Замечание. Обычно устойчивость разностной схемы (1) по начальным данным определяется как выполнение оценки

$$\|y_n\| \leqslant M\|y_0\| \tag{6}$$

с константой M, не зависящей от сетки. Согласно матричной теореме Крайса [10], из устойчивости схемы (1) в смысле выполнения (6) следует ее устойчивость в смысле (2) в некоторой норме D. В том случае, когда

$$0 < \delta E \leqslant D \leqslant \Delta E, \quad \Delta > \delta > 0,$$

и отношение Δ/δ ограничено сверху константой, не зависящей от сетки, из устойчивости в норме D следует устойчивость в смысле (6).

3. Приведем некоторые теоремы об устойчивости несамосопряженных разностных схем. Будем в дальнейшем обозначать через $L_+(H)$ множество самосопряженных положительных операторов, действующих в H, через A_0 — оператор $0{,}5\,(A + A^*)$.

Теорема 1 (см. [11]). *Пусть существуют операторы $C: H \to H$ и $D \in L_+(H)$ такие, что справедливо представление*

$$B = D + \tau AC. \tag{7}$$

Если оператор $Q = E + CD^{-1}\tau A$ имеет обратный, то устойчивость схемы (1) *в норме D эквивалентна выполнению операторного неравенства*

$$(\tau A)_0 + (\tau A)^*((C - 0{,}5E)D^{-1})_0(\tau A) \geqslant 0.$$

Замечание. Оператор $Q = E + CD^{-1}\tau A$ имеет обратный, если существует хотя бы один из операторов A^{-1} или C^{-1}.

С точки зрения приложений наиболее интересны частные случаи этой теоремы, один из которых приведен ниже.

Следствие. *Пусть $A^* = -A$ и выполнено условие* (7). *Тогда неравенство*

$$C^*D + DC \geqslant D \tag{8}$$

достаточно (а если существует A^{-1}, то и необходимо) для устойчивости схемы (1) *в норме D.*

В [6] условие (8) применялось к исследованию устойчивости двухпараметрического семейства разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений акустики. Был найден оператор нормы D, и получены необходимые и достаточные условия устойчивости в виде неравенств, связывающих параметры схемы и шаги сетки. Показано, что эти условия устойчивости неулучшаемы: они выполняются, если схема устойчива хотя бы в одной норме D. Доказано, что найденная норма D эквивалентна сеточной L_2-норме.

Остановимся на вопросе о необходимых условиях устойчивости. В [2] было показано, что если $A^* = A > 0$, то условие

$$B^* + B \geqslant \tau A \tag{9}$$

необходимо и достаточно для устойчивости схемы (1) в норме A. Оказывается, что это условие не является, вообще говоря, необходимым для устойчивости в нормах, отличных от нормы A. Исключение представляет случай, когда оба оператора A и B являются самосопряженными. В [4] приведен пример схемы, для которой условие (9) не является необходимым для устойчивости. В пространстве $H \oplus H$ рассматривается явная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $A_{12} : H \to H$, $A_{22} = \tau A_{12}^* A_{12}$, $y_n = \{u_n, v_n\}$. Если A_{12}^{-1} существует, то существует и A^{-1}, и схема (10) эквивалентна схеме

$$\tilde{B} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A} y_n = 0, \tag{11}$$

где $\tilde{B} = A^{-1}$, $\tilde{A} = E$. Для схемы (11) условие (9), т. е. $A^{-1} + A^{*-1} \geqslant \tau E$ не выполняется. Однако эта схема устойчива в норме

$$D = \begin{pmatrix} E & -0{,}5\tau A_{12} \\ 0{,}5\tau A_{12}^* & E \end{pmatrix}$$

при условии $E > 0{,}25\tau^2 A_{12}^* A_{12}$. Отметим, что в виде (10) записывается, например, явная полностью консервативная разностная схема с вязкостью для уравнений акустики [12].

4. Многочисленные примеры приложения теории устойчивости к конкретным разностным схемам приведены в [3], где рассмотрены разностные схемы, аппроксимирующие уравнения 2-го порядка параболического и гиперболического типов. Наиболее просто поддаются исследованию уравнения с самосопряженными операторами. В случае схем с несамосопряженными операторами применение общей теории вызывает определенные трудности. Так, например, не удалось пока сформулировать общие теоремы об устойчивости несамосопряженных разностных схем с нелокальными граничными условиями, хотя достаточные условия устойчивости для отдельных схем такого вида получены методом разделения переменных в [13]. Тем не менее в настоящее время результаты и методы теории устойчивости разностных схем успешно применяются к обоснованию устойчивости разностных схем для уравнений газовой динамики в акустическом приближении [6, 14, 15], для многомерных параболических уравнений [16, 17], для динамических задач теории упругости [18]. В [19] предложено обобщение теории устойчивости на случай уравнений вида (1), где $A = A(y)$ — нелинейный оператор. Несомненно, что для дальнейшего приложения теории к конкретным схемам необходимо более детальное изучение свойств разностных операторов и развитие аппарата операторных неравенств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Классы устойчивых схем.— ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 5, с. 1096—1133.
2. Самарский А. А. Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем.— ДАН СССР, 1968, т. 181, № 4, с. 808—811.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
4. Гулин А. В. Об устойчивости по начальным данным несамосопряженных разностных схем.— ДАН СССР, 1979, 244, № 4, с. 797—799.
5. Гулин А. В. Устойчивость разностных схем и операторные неравенства.— Диф. уравнения, 1979, XV, № 12, с. 2238—2250.
6. Арделян Н. В., Гулин А. В. К обоснованию устойчивости разностных схем для уравнений акустики. Препринт № 96. М.: ИПМ АН СССР, 1978.
7. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
8. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
9. Булгаков А. П., Годунов С. К. Качество устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и его вычислительная оценка. Препринт № 51. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978.
10. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
11. Гулин А. В. Теоремы об устойчивости несамосопряженных разностных схем.— Мат. сборник, 1979, т. 110 (152), № 2 (10), с. 297—303.
12. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1980.
13. Иовкин Н. Ц. Разностные схемы для одной неклассической задачи.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычислит. математики и кибернетики, 1977, вып. 2, с. 20—32.
14. Арделян Н. В. Об устойчивости разностных схем газовой динамики с учетом гравитации. Препринт № 136. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
15. Таран М. Д. Численное моделирование многомерных газодинамических течений с помощью метода частиц конечного размера. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М., 1980.
16. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. Препринт № 1/Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
17. Гулин А. В., Фрязинов И. В. О точности схем переменных направлений для уравнения теплопроводности в произвольной области.— Диф. уравнения, 1976, т. 12, № 10, с. 1906—1914.
18. Коновалов А. Н. Решение задач теории упругости в напряжениях. Новосибирск: НГУ, 1979.
19. Ляшко А. Д. О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем.— ДАН СССР, 1974, т. 215, № 2, с. 263—265.

Ж.-Л. Лионс

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

В теории оптимального управления распределенных систем *уравнения состояния* принято формально записывать в виде

$$Ay = Bv, \tag{1}$$

где A — оператор в частных производных (линейный или нелинейный, эволюционного или стационарного типа); v — управление; $y(v)$ — состояние системы; B — оператор, который, можно считать, задает граничные условия. В уравнение (1) нужно добавить *начальные условия*, если A — оператор эволюционного типа.

Обычно в теории мы полагаем, что если *v задано в соответствующем банаховом пространстве* U[1], уравнение (1) имеет единственное решение $y(v) \in Y$, $\forall v \in U$.

Функция стоимости $J(v)$ записывается в виде

$$J(v) = \varphi(y(v)) + \psi(\|v\|_U), \tag{2}$$

[1] U обычно зависит от структуры функции стоимости, которая определена ниже.