Доказательство пункта а) следует из обратимости меры $\mu_{u(0)}$. Докажем б). Пусть $g > 0$; как следует из сформулированного выше утверждения, достаточно доказать, что $\hat{g} = \mathrm{M}\ln(\hat{\alpha}_n(u^{(1)}/\hat{\beta}_n(u^{(1)})) < 0$; покажем, что $\hat{g} = -g$. Для последовательности $\ln(\hat{\alpha}_n/\hat{\beta}_n)$ справедлива теорема Биркгофа, так что

$$-\hat{g} = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \ln(\hat{\beta}_j/\hat{\alpha}_j) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \ln(u_{j-1}^{(1)}\alpha_{j-1}/u_j^{(1)}\beta_j) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{-1}\Big(-\ln(u_n^{(1)}\beta_n) + \ln(u_0^{(1)}\alpha_0) + \sum_{1\leqslant j\leqslant n-1} \ln(\alpha_j/\beta_j)\Big) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln(u_n^{(1)}\beta_n) + \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{1\leqslant j\leqslant n-1} \ln(\alpha_j/\beta_j).$$

По лемме 2 первое слагаемое равно нулю, а $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n-1} \ln\gamma_j = g$.

Межфакультетская проблемная
научно-исследовательская лаборатория
молекулярной биологии и биоорганической химии
им. А.Н. Белозерского
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова
Московский текстильный институт
им. А.Н. Косыгина

Поступило
17 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темкин Д.Е.* – ДАН, 1972, т. 206, № 1, с. 27–30. 2. *Козлов М.В.* – Теор. вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 2, с. 406–408. 3. *Solomon F.* – Ann. Probability, 1975, vol. 3, № 1, p. 1–31. 4. *Kesten H., Kozlov M.V., Spitzer F.* – Comp. Math., 1975, vol. 30, № 2, p. 145–168. 5. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. Наука, 1974.

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

С.А. ВОЙЦЕХОВСКИЙ, В.Л. МАКАРОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ, Т.Г. ШАБЛИЙ

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ К ОБОБЩЕННЫМ РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ВЫПУКЛОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ

Одной из основных задач современной теории разностных схем является получение согласованных оценок скорости сходимости [1], т.е. оценок вида

$$(1)\qquad \|y-u^*\|_{W_2^s(\omega)} \leqslant Mh^{k-s}\|u\|_{W_2^k(\Omega)}, \quad 0\leqslant s<k,$$

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } W_2^k(\Omega)\subset C(\overline{\Omega}), \\ \overline{u}(x), & \text{если } W_2^k(\Omega)\not\subset C(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

$\forall x\in\omega$,

где $u(x)$ – решение исходной дифференциальной задачи, $\overline{u}(x)$ – некоторое его усреднение по области малого диаметра, $y(x)$ – решение соответствующей разностной схемы, $W_2^s(\omega)$ и $W_2^k(\Omega)$ – соболевские пространства функций соответственно дискретного и непрерывного аргумента. Основную трудность представляет получение согласованных оценок в слабых нормах и, в первую очередь, при $s=0$. В работе [2] для этой цели предложено использовать операторы точных разностных схем. В дальнейшем методика из [2] распространена на различные классы уравнений математической физики [1, 3–6], где пространственная область предполагалась канонической.

В настоящей работе с помощью операторов точных разностных схем для задачи вида

(2) $\quad -\Delta u(x)+q(x)\,u(x)=f(x), \quad x=(x_1,\ x_2)\in\Omega,$

(3) $\quad u(x)=0, \quad x\in\Gamma,$

где $f(x)\in W_2^{-1}(\Omega)$, $q(x)\in L_\infty(\Omega)$, $q(x)\geqslant 0$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, Ω – выпуклый многоугольник с границей Γ, строится разностная схема, для которой устанавливается согласованная оценка скорости сходимости (1) при $s=0$, $k=1$ (первый порядок точности).

1. В силу сделанных предположений относительно функций $f(x)$ и $q(x)$ решение задачи (2), (3) существует, единственно и принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ [7]. Будем предполагать, что область Ω – такой выпуклый многоугольник, который может быть составлен из конечного числа прямоугольных треугольников с катетами, параллельными координатным осям. Покроем плоскость x_1Ox_2 кусочно-равномерной сеткой $\hat{E}$, согласованной с границей Γ. Введем обозначения:

$$\hat{\omega}_0=E\cap\Omega,\quad \Gamma=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2,\quad \gamma_1=\hat{E}\cap\Gamma_1,\quad \hat{\omega}=\hat{\omega}_0+\gamma_1,\quad \gamma_2=\hat{E}\cap\Gamma_2,\quad \gamma=\gamma_1+\gamma_2,$$

где Γ_1 – совокупность звеньев ломаной Γ без угловых точек, которые непараллельны координатным осям. Пусть

$$e=e(x_{ij})=e(x_{1,i},\ x_{2,j})=\{\xi=(\xi_1,\ \xi_2):\ |\xi_\alpha-x_\alpha|\leqslant h_\alpha,\quad \alpha=1,\ 2\},$$

$$\forall x_{ij}\in\hat{\omega},\quad \Omega_\delta=\bigcup_{x_{ij}\in\gamma_1}e(x_{ij}).$$

Для построения разностной схемы, аппроксимирующей задачу (2), (3), необходимо продолжить решение последней на область $\Omega_\delta\setminus\Omega$. Для этого возьмем произвольный прямоугольник $e(x_{ij})\in\Omega_\delta$, границу которого будем обозначать $\Gamma(x_{ij})=\Gamma_{ij}$, и продолжим через его диагональ $\Gamma\cap e(x_{ij})$ функцию $q(x)$ четным образом, а функцию $f(x)$ – нечетным. След функции $u(x)$ с $\Gamma_{ij}\cap\Omega$ продолжим нечетным образом на $\Gamma_{ij}\setminus(\Gamma_{ij}\cap\Omega)$. Продолженные функции будем помечать сверху тильдой $\sim$.

Рассмотрим в области $e(x_{ij})$ следующую задачу Дирихле:

(4) $$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\tilde{q}(x)v=\tilde{f}(x),\quad x\in e(x_{ij});$$

(5) $\quad v(x)=\tilde{u}(x), \quad x\in\Gamma_{ij},$

где

$$k_1(x)=\begin{cases}1, & x\in e(x_{ij})\cap\Omega,\\ (a/b)^2, & x\in e(x_{ij})\setminus\Omega,\end{cases}\qquad k_2(x)=\begin{cases}1, & x\in e(x_{ij})\cap\Omega,\\ (b/a)^2, & x\in e(x_{ij})\setminus\Omega.\end{cases}$$

Здесь a и b – вещественные параметры, определяющие уравнение прямой

$\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} = 1$, на которой лежит диагональ прямоугольника. Имеет место

Лемма 1. *Пусть* $q(x) \geqslant 0$, $q(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 2$, $f(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$. *Тогда задача* (4), (5) *однозначно разрешима в классе* $W_2^1(\Omega)$ *и ее решение обладает свойством*

$$v(x) = u(x), \quad \forall x \in e(x_{ij}) \cap \Omega,$$

$$v(x_1, x_2) = -v\left(a - \frac{a}{b}x_2,\ b - \frac{b}{a}x_1\right), \quad \forall x \in e(x_{ij}),$$

т.е. $v(x) = \tilde{u}(x)$, $\forall x \in e(x_{ij})$.

Проделав такое продолжение для всех прямоугольников $e(x_{ij}) \in \Omega_\delta$, получим функцию $\tilde{u}(x)$, определенную во всей области $\Omega \cup \Omega_\delta$ и удовлетворяющую уравнению вида (4).

2. На сетке $\hat{\omega}$ задачу (2), (3) будем аппроксимировать разностной схемой

(6) $\quad -\overline{k}_1 y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} - \overline{k}_2 y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + \hat{T}^{x_1} \hat{T}^{x_2}(\tilde{q})y = \hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(\tilde{f}), \quad x \in \hat{\omega};$

(7) $\quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad y(x') = -y(x), \quad x \in \gamma_1^-,$

где γ_1^- — предконтурные узлы для γ_1, точка $x' \in \gamma_1^+$ (множество законтурных узлов для γ_1) и соответствует точке x в смысле сделанного выше продолжения, $\hat{T}^{x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, — операторы точных разностных схем для неравномерной сетки [1]:

$$\hat{T}^{x_\alpha}(v) = \frac{1}{\hbar_\alpha h_\alpha} \int_{x_\alpha - h_\alpha}^{x_\alpha} (\xi_\alpha - x_\alpha + h_\alpha) v(x(\xi_\alpha))\, d\xi_\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_\alpha h_\alpha^+} \int_{x_\alpha}^{x_\alpha + h_\alpha^+} (x_\alpha + h_\alpha^+ - \xi_\alpha) v(x(\xi_\alpha))\, d\xi_\alpha,$$

$$x(\xi_\alpha) = \begin{cases} (\xi_1, x_2), & \alpha = 1, \\ (x_1, \xi_2), & \alpha = 2, \end{cases} \qquad \alpha = 1, 2, \quad \forall x \in \hat{\omega},$$

$$\overline{k}_\alpha = \{ k_\alpha (x(x_\alpha + h_\alpha^+/2))\}^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Заметим, что за счет такого выбора коэффициентов $\overline{k}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, уравнение (6) на γ_1 выполняется автоматически.

Чтобы оценить точность схемы (6), (7), введем функцию погрешности $z(x) = y(x) - \overline{u}(x)$, где

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} \hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(\tilde{u}), & x \in \hat{\omega}_0, \\ 0, & x \in \gamma, \end{cases}$$

$$\overline{u}(x') = -\overline{u}(x), \quad x' \in \gamma_1^+.$$

Функция $z(x)$ является решением следующей задачи:

(8) $\quad -\overline{k}_1 z_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} - \overline{k}_2 z_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + \hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(\tilde{q})z = -\eta^{(1)}_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} - \eta^{(2)}_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + \psi_0, \quad x \in \hat{\omega};$

(9) $\quad z(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad z(x') = -z(x), \quad x' \in \gamma_1^+,$

где $\psi_0 = \psi_0(x) = \hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(\widetilde{q}\widetilde{u}) - \hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(\widetilde{q})\bar{u}, \quad x \in \hat{\omega},$

$$\eta^{(\alpha)} = \eta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \hat{T}^{x_3-\alpha}(\widetilde{u}) - \bar{u}, & x \in \hat{\omega}_0, \\ \widetilde{T}^{x_3-\alpha}(\widetilde{u}), & x \in \gamma_1, \quad \alpha = 1, 2, \\ 0, & x \in \bar{\gamma}_1 \setminus \gamma_1, \\ 0, & x \in \gamma_2, \end{cases}$$

$$\widetilde{T}^{x_1}(v) = \frac{1}{\hbar_1 h_1} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} (\xi_1 - x_1 + h_1) v(\xi_1, x_2) d\xi_1 +$$

$$+ \frac{(b/a)^2}{\hbar_1 h_1^+} \int\limits_{x_1}^{x_1+h_1^+} (x_1 + h_1^+ - \xi_1) v(\xi_1, x_e) d\xi_1,$$

$$x \in \gamma_1, \quad (x_1 + h_1^+, \ x_2) \,\bar{\in}\, \hat{\omega},$$

$$\widetilde{T}^{x_2}(v) = \frac{1}{\hbar_2 h_2} \int\limits_{x_2-h_2}^{x_2} (\xi_2 - x_2 + h_2) v(x_1, \xi_2) d\xi_2 +$$

$$+ \frac{(a/b)^2}{\hbar_2 h_2^+} \int\limits_{x_2}^{x_2+h_2^+} (x_2 + h_2^+ - \xi_2) v(x_1 \xi_2) d\xi_2,$$

$$x \in \gamma_1, \quad (x_1, \ x_2 + h_2^+) \,\bar{\in}\, \hat{\omega}.$$

Здесь a и b – параметры прямой, на которой лежит точка x.

Пусть H_h – пространство сеточных функций, определенных на сетке $\hat{\omega}$, со скалярным произведением и нормой вида

$$(v, y) = \sum_{x \in \hat{\omega}_0} \hbar_1 \hbar_2 v(x) y(x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_1} \hbar_1 \hbar_2 v(x) y(x),$$

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}, \quad \forall v, y \in H_h.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}_h$ пространство сеточных функций, определенных на сетке $\hat{\omega} \cup \cup \gamma_1^+ \cup \gamma_2$, обращающихся в нуль на γ и нечетно продолженных с γ_1^- на γ_1^+.

Справедлива следующая

Л е м м а 2. *$\forall y \in \overset{\circ}{H}_h$ имеют место неравенства*

$$\|Ay\| \geqslant \|A_\alpha y\|, \quad \alpha = 1, 2,$$

где $A = A_1 + A_2, \quad A_\alpha y = -\bar{k}_\alpha y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$

С помощью леммы 2 устанавливается

Л е м м а 3. *Для решения задачи* (8), (9) *будет справедлива априорная оценка*

$$(10) \quad \|z\| \leqslant M(\|\eta^{(1)}\| + \|\eta^{(2)}\| + \|\psi_0\|),$$

где M – постоянная, не зависящая от $u(x)$ и h.

Осталось только произвести оценку функционалов $\eta^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, и ψ_0. Сделать это можно с помощью леммы Брэмбла–Гильберта [8], в результате чего приходим к утверждению.

Л е м м а 4. *Пусть $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, тогда будут справедливы неравенства*

$$\|\eta^{(\alpha)}\| \leqslant Mh\|u\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2; \quad \|\psi_0\| \leqslant Mh\|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где $h = \max\limits_{x} h_\alpha(x)$.

Из лемм 3, 4 сразу следует

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1 $(p=\infty)$; *тогда разностная схема* (6), (7), *аппроксимирующая задачу* (2), (3), *имеет первый порядок точности, т.е.*

$$\|y-\bar{u}\|_{L_2(\omega)} \leqslant Mh\|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)}.$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть выполнены условия леммы 1 с $p>2$; тогда точность разностной схемы (6), (7) определяется оценкой

$$\|y-\bar{u}\|_{L_2(\omega)} \leqslant Mh^{1-2/p}\|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 останется в силе и для квазилинейного эллиптического уравнения вида

$$-\Delta u(x) = f_0(x) - f(x, u),$$

где $f_0(x)\in W_2^{-1}(\Omega)$, а $f(x,u)$ удовлетворяет по u условиям монотонности и липшиц-непрерывности.

З а м е ч а н и е 3. Пусть $f(x)\in L_2(\Omega)$, $q(x)\in L_p(\Omega)$, $p\geqslant 2$, $q(x)\geqslant 0$, тогда точность разностной схемы (6), (7) с видоизмененным коэффициентом $\hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(\tilde{q})$ [1, 2] определяется оценкой

$$\|y-u\|_{L_2(\omega)} \leqslant Mh^{3/2-2/p}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Киевский государственный университет
им. Т.Г. Шевченко

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
21 IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лазаров Р.Д., Макаров В.Л., Самарский А.А.* – Матем. сб., 1982, т. 117, № 4, с. 469–480. 2. *Макаров В.Л., Самарский А.А.* – ЖВМиМФ, 1980, т. 20, № 2, с. 381–397. 3. *Войцеховский С.А., Макаров В.Л.* – ДАН, 1980, т. 254, № 5, с. 1035–1038. 4. *Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* – ЖВМиМФ, 1981, т. 21, № 5, с. 1168–1179. 5. *Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* – ДАН, 1981, т. 259, № 2, с. 282–286. 6. *Макаров В.Д., Гаврилюк И.П., Пирназаров С.П.* – Вестн. Карак. фил. АН УзбССР, 1980, № 1 (79), с. 3–10. 7. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. 8. *Bramble J.H., Hilbert S.R.* – Numer. Math., 1971, vol. 16, № 4, p. 362–369.