ДЕКАБРЬ 1983 г., ТОМ XIX, № 12

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.956

В. А. ГАЛАКТИОНОВ, С. П. КУРДЮМОВ, А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. I

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка задачи. В настоящей работе изучаются свойства решений параболической системы двух квазилинейных уравнений нелинейной теплопроводности с источниками

$$u_t=\Delta u^{\nu+1}+v^p, \tag{1.1}$$

$$v_t=\Delta v^{\mu+1}+u^q. \tag{1.2}$$

Здесь μ, ν, p, q — положительные постоянные; t — временная координата; Δ — обозначение N-мерного лапласиана; $u=u(t, x)\geqslant 0$ и $v=v(t, x)\geqslant 0$ ($x=(x_1, \ldots, x_N)$ — точка в $\mathbf{R}^N$) — искомое решение.

Система уравнений (1.1), (1.2) описывает процессы диффузии тепла и горения в двухкомпонентных сплошных средах с нелинейной теплопроводностью и объемным энерговыделением. Функции u и v тогда можно трактовать, как температуры взаимодействующих друг с другом компонент некоторой горючей смеси.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Будем рассматривать для уравнений (1.1), (1.2) первую краевую задачу при $t>0$, $x\in\Omega$ с условиями

$$u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0, \quad v(0, x)=v_0(x)\geqslant 0, \quad x\in\Omega; \tag{1.3}$$

$$u(t, x)=0, \quad v(t, x)=0, \quad t\geqslant 0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{1.4}$$

Предполагается, что $u^{\nu+1}\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, $v^{\mu+1}\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, где $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева первого порядка. В дальнейшем будем использовать обозначения, принятые в [1]; в частности, норму в $L^p(\Omega)$, $p>1$, будем записывать в виде $\|\cdot\|_p$ и через (,) обозначим скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

В данной работе основное внимание уделяется определению условий глобальной разрешимости и неразрешимости в целом (неограниченности решения) задачи (1.1)—(1.4) при различных параметрах μ, ν, p и q. Это исследование тесно связано с циклом работ [2—26] по изучению необычных свойств режимов с обострением, эффекта локализации тепла и нестационарных диссипативных структур в сплошных средах с нелинейными свойствами (см. также библиографию в [27, 28] и приведенный ниже краткий обзор литературы, посвященной неограниченным решениям эволюционных уравнений).

Свойства неограниченных решений задачи Коши для системы уравнений типа (1.1), (1.2) с источниками и стоками более общего вида изучались в работах [10, 19, 24] на основе построения и анализа автомодельных решений, а также численными методами.

2. Основные результаты работы. В § 2 установлено, что при $1<$

$<p<\mu+1$, $1<q<\nu+1$ задача имеет глобальное (ограниченное) решение при произвольных начальных функциях u_0, v_0.

В § 3 показано, что при $p=\mu+1$, $q=\nu+1$ глобальная разрешимость задачи зависит от пространственной структуры области Ω и имеет место, если $\lambda_1>1$, где $\lambda_1>0$ — первое (наименьшее) собственное значение задачи

$$\Delta w+\lambda w=0,\quad x\in\Omega;\quad w|_{\partial\Omega}=0. \tag{1.5}$$

Если же $\lambda_1<1$, то, как установлено § 4, задача не имеет глобального решения и существует такое $T_0<+\infty$, что

$$\|u^{\nu+1}(t,\ \cdot)\|_2+\|v^{\mu+1}(t,\ \cdot)\|_2\to+\infty,\quad t\to T_0^-. \tag{1.6}$$

Далее рассматривается случай $pq>(1+\mu)(1+\nu)$. Здесь в пространстве начальных функций $\{u_0;\ v_0\}$ выделены два непересекающихся множества: множество неустойчивости $\mathscr{V}$ и множество устойчивости $\mathscr{W}$ (названия даются в соответствии с терминологией [1]).

Множество неустойчивости $\mathscr{V}$ (см. § 4) обладает тем свойством, что включение $\{u_0,\ v_0\}\in\mathscr{V}$ приводит к неограниченности решения, когда для некоторого $T_0<+\infty$ $\|u^{\nu+1}\|_2+\|v^{\mu+1}\|_2\to+\infty$, $t\to T_0^-$.

Множество устойчивости $\mathscr{W}$ (§ 5) характеризуется тем, что включение $\{u_0,\ v_0\}\in\mathscr{W}$ обеспечивает глобальную разрешимость задачи, причем $\{u(t,\ x),\ v(t,\ x)\}\in\mathscr{W}$ для любых $t>0$. Построение множества $\mathscr{W}$ производится с помощью семейства стационарных решений системы (1.1), (1.2). В заключительном пункте § 5 на основе этого метода изучаются условия локализации неограниченных решений задачи Коши для уравнений (1.1), (1.2).

3. Краткий обзор. Исследованию условий *отсутствия глобальных решений нелинейных эволюционных уравнений* посвящено большое число работ, выполненных в течение последних 20 лет. В данном обзоре основное внимание уделяется результатам исследования неограниченных (неограниченно возрастающих в течение конечного времени) решений нелинейных параболических уравнений. Кроме того, приводятся некоторые результаты аналогичного исследования нелинейных уравнений типа Шредингера и гиперболических уравнений, а также дается список литературы по несуществованию решений нелинейных эллиптических (стационарных) задач.

3.1. По-видимому, первые результаты по несуществованию глобальных неотрицательных решений *нелинейных параболических уравнений* были получены в [29—32]. В этих работах рассматривалось полулинейное уравнение типа

$$u_t=\mathscr{L}u+Q(u), \tag{1.7}$$

где $\mathscr{L}=\sum\limits_{i,\,j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$ — самосопряженный равномерно эллиптический оператор с гладкими коэффициентами (например, $\mathscr{L}=\Delta$) и $Q(u)$ — положительная выпуклая при $u>0$ функция. В [29—31] изучалась краевая задача в ограниченной области $x\in\Omega\subset\mathbf{R}^N$, в [32] — задача Коши. В работах [30, 31] (см. также [33, 34]) условия отсутствия глобального решения получены с помощью построения подходящего неограниченного нижнего решения уравнения (1.7), в [29] — на основе метода собственных функций (название дается в терминологии работы [35]). Последний подход состоит в скалярном умножении (1.7) на первую собственную функцию задачи $\mathscr{L}\psi+\lambda\psi=0$, $\psi>0$ в Ω; $\psi=0$ на $\partial\Omega$, $\|\psi\|_1=1$, интегрировании по частям (с учетом краевого условия $u=0$ на $\partial\Omega$) и применении неравенства Йенсена для выпуклых функций [36] $(Q(u),\ \psi)\geqslant Q[(u,\ \psi)]$. В результате для $F(t)=(u(t,\ \cdot),\ \psi)$ получается обыкновенное дифференциальное неравенство, из которого выводятся необходимые утверждения.

В дальнейшем подходы, развитые в [29—31], оказались весьма плодотворными. В частности, различные модификации метода неограниченных нижних решений для исследования уравнений (1.7) применялись в [9, 21, 37—40]; метод собственных функций использовался в [35, 37, 41] при изучении краевых задач для полулинейных параболических уравнений, а также в случае нелинейных уравнений гиперболического типа [42]

$$u_{tt}=\Delta u+Q(u). \tag{1.8}$$

Кроме того, в аналогичных целях метод собственных функций применялся при исследовании неограниченности решения краевых задач и задач Коши для квазилинейных параболических уравнений [20, 43, 44] (см. также § 4 настоящей работы) вида

$$u_t=\nabla(k(u)\nabla u)+Q(u); \quad k(u)>0 \ \text{ при } \ u>0 \tag{1.9}$$

(здесь $\nabla=\mathrm{grad}_x$), а также уравнений $u_t=\varphi(u)u_{xx}+\psi(u)$ [45].

В работе [32] (см. также [1]) рассматривалась задача Коши для полулинейного параболического уравнения

$$u_t=\Delta u+u^\beta; \quad u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0, \quad x\in R^N; \quad \beta>1, \tag{1.10}$$

и было, в частности, показано, что в случае $\beta<1+2/N$ решение является неограниченным при любых начальных функциях $u_0\not\equiv 0$. Там же установлено, что при $\beta>1+2/N$ и достаточно малых $u_0(x)$ задача имеет глобальное решение. Исследование неограниченных решений задач Коши (1.10), а также полулинейных уравнений более общего вида (например, с произвольными источниками $Q(u)$) было продолжено в [46—52]. В частности, в работах [46, 49, 50] показано, что при «критическом» значении $\beta=1+2/N$ все решения задачи (1.10) с $u_0\not\equiv 0$ являются неограниченными.

Другой подход к определению условий отсутствия глобальных решений краевых задач для нелинейных параболических уравнений в ограниченных областях основан на анализе известных интегральных соотношений («законов сохранения»), содержащих один и тот же функционал от решения [53—57]. С помощью модификации этого метода (в терминологии [35] — метода вогнутости) в [53] изучалась абстрактная задача Коши в гильбертовом пространстве

$$Pu_t=-Au+\mathscr{F}(u), \quad t\in[0, T); \quad u(0)=u_0. \tag{1.11}$$

Здесь P и A — симметричные линейные операторы, причем P положительный; $\mathscr{F}$ — нелинейный оператор — является градиентом некоторого функционала. Задача (1.11) включает в себя как частный случай краевые задачи для уравнений (1.7), (1.10), а также полулинейных уравнений и систем параболического типа более общего вида. В [53] получены достаточные условия (на операторы P, A, $\mathscr{F}$ и начальное значение u_0) неразрешимости задачи (1.11) при любых $T>0$, что в ряде случаев эквивалентно неограниченности решения соответствующего параболического уравнения.

В [58] метод вогнутости применялся для аналогичного исследования абстрактных задач вида

$$Pu_t=A^*F(Au)+\mathscr{F}(u), \quad t\in[0, T); \quad u(0)=u_0, \tag{1.12}$$

где F — нелинейный и A^* — линейный оператор, сопряженный с A. Частным случаем (1.12) является краевая задача для квазилинейного параболического уравнения

$$u_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^\sigma\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+u^\beta, \quad t>0, \quad x\in\Omega; \tag{1.13}$$

$$u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0; \quad x\in\Omega; \quad u(t, x)=0, \quad t\geqslant 0, \quad x\in\partial\Omega \tag{1.14}$$

(здесь $\sigma>0$, $\beta>1$ — постоянные). В работах [59—61] на основе этого метода изучались неограниченные решения краевых задач для параболических уравнений и систем с нелинейными граничными условиями. Кроме того, методом вогнутости исследовались полулинейные псевдогиперболические уравнения [54, 57, 62—65]

$$Pu_{tt}=-Au+\mathcal{F}(u), \tag{1.15}$$

а также более сложные нелинейные «гиперболические» уравнения [65—68] (например, уравнение вида $Pu_{tt}=A^*F(Au)+\mathcal{F}(u)$ [58], нелинейные уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу [65, 66], уравнения теории упругости [67]).

В работе [69] указанный подход применялся к квазилинейным уравнениям

$$Pu_t=A^*AF(u)+\mathcal{F}(u). \tag{1.16}$$

Частным случаем (1.16) являются параболические уравнения и системы уравнений типа (1.9).

Краевая задача (1.13), (1.14) была подробно изучена в [70] (в более общей постановке она затем рассматривалась в работах [71—73]). Было, в частности, показано, что при $\beta<\sigma+1$ задача имеет глобальное решение, а при $\beta>\sigma+1$ ее разрешимость или неразрешимость в целом зависит от величины начальной функции u_0.

Другие подходы к исследованию неограниченных решений параболических уравнений применялись в [20, 44, 74]. Например, в [20, 44] это исследование основывалось на условиях критичности и ψ-критичности решения квазилинейного уравнения типа (1.9), которые ранее применялись в теории сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений [75—77] (в [74] в случае полулинейного уравнения использовалась похожая техника). В свою очередь доказанные в [75—77] теоремы сравнения использовались для анализа неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений (см. [9]).

Новые свойства неограниченных решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений типа (1.9) со степенными нелинейностями

$$u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta;\quad \sigma>0,\quad \beta>1, \tag{1.17}$$

изучались в серии работ [2—8, 12, 14, 16, 18, 20—23] (в этих же работах различными методами получены также достаточные условия неограниченности решений). Было показано, что при $\beta\geqslant\sigma+1$ неограниченные решения задачи являются *локализованными*. Это означает, что решение возрастает до бесконечности в области конечных размеров*). Свойство локализации наглядно демонстрирует автомодельное обобщенное решение уравнения (1.17) при $\beta=\sigma+1$ в одномерном ($N=1$) случае [2, 3]

$$u(t,\ x)=\begin{cases}(T-t)^{-1/\sigma}\{[2(\sigma+1)/(\sigma+2)\sigma]\cos^2(\pi x/L)\}^{1/\sigma}, & |x|<L/2\\ 0,\quad |x|\geqslant L/2; & 0<t<T,\end{cases}$$

где $L=2\pi(\sigma+1)^{1/2}/\sigma$ (L называется фундаментальной длиной). Отметим, что здесь возмущения из области локализации $|x|<L/2$ вообще не выходят, хотя $u(t,\ x)\to+\infty$ при $t\to T^-$ во всех ее внутренних точках. В случае $\beta>\sigma+1$ неограниченное решение обращается в бесконечность на множестве нулевой меры (например, в одной точке). При $\beta<\sigma+1$ локализация отсутствует и $u(t,\ x)\to+\infty$ при $t\to T^-<+\infty$ (T — время существования решения) всюду в $\mathbb{R}^1$.

Локализованные неограниченные решения рассматриваемой задачи являются диссипативными структурами. Условия возникновения таких структур (так называемые условия резонансного возбуждения), возможные виды автомодельных структур и законы их взаимодействия

*) Локализация тепловых возмущений, имеющая иную физическую природу и связанная с наличием в уравнении не источников, а стоков тепла (чему соответствует $Q(u)<0$ при $u>0$ в (1.9)), изучалась в работах [78—83] и др.

изучались в [4, 6—8, 12—16] (см. также [84], где аналитически и численно построены многомерные радиально несимметричные структуры).

Исследование эффекта локализации стимулируется возможностями его применения в ряде прикладных задач [5—8, 11, 25, 85]. Отметим, что этот эффект проявляется также при воздействии на теплопроводную среду режимов с обострением (см. по этому поводу [28] и приведенную там библиографию *)).

Выводы, сформулированные в [2—8, 12, 14, 16, 18, 20—23], во многом опирались на анализ неограниченных автомодельных решений $u_A(t, x)=(T-t)^{-1/(\beta-1)}f_A(\xi)$, $\xi=\|x\|/(T-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}$ уравнения (1.17), построенных при $N=1$ в [4, 6—8, 86]. Функция $f_A(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, получающегося после подстановки u_A в (1.17). При этом важную роль играли результаты численного решения рассматриваемых задач с помощью неявных разностных схем, указанных в [87]. Проведенное в [88, 89] теоретическое исследование неявных (нелинейных) разностных схем для уравнения (1.17) показывает, что разностное решение может быть неограниченным на неравномерной сетке по времени, а также не существовать «в малом», когда схема неразрешима на фиксированном временном слое, и быть неединственным. Все эти эффекты в первую очередь связаны с возможной глобальной неразрешимостью разностной задачи, т. е. ростом решения в режиме с обострением. В [89] определены условия глобальной разрешимости разностной задачи. В некоторых случаях это накладывает специальные ограничения на начальную функцию (она должна принадлежать так называемому разностному множеству устойчивости). Анализ неограниченных решений явных (линейных) схем для полулинейных уравнений типа (1.9), $k\equiv 1$ проводился в [91, 92].

Групповая классификация уравнения (1.9) общего вида выполнена в работах [93—96] (в [95] рассматривался случай анизотропной теплопроводности), где выделены все виды частных решений (в том числе неограниченных), инвариантных относительно локальной группы Ли преобразований. Свойства некоторых из них исследовались в [97].

Условия разрешимости или неразрешимости в целом задачи Коши для (1.17) получены в [18] с помощью построения верхних и нижних решений. В частности, показано, что при $\beta<\sigma+1+2/N$ все решения, отвечающие $u_0(x)\not\equiv 0$, являются неограниченными; при $\beta>\sigma+1+2/N$ в случае достаточно малых u_0 возможны глобальные решения (эти результаты совпадают с качественными выводами [6—8, 26], а при $\sigma=0$ — с утверждениями работы [32]).

Краевая задача для уравнения (1.17) с условиями (1.14) рассматривалась в [43], где показано, что при $\beta<\sigma+1$ задача разрешима в целом, при $\beta=\sigma+1$ ее глобальная разрешимость зависит от пространственной структуры (в частности, размера) области Ω, а при $\beta>\sigma+1$ — от величины начальной функции $u_0(x)$.

Задача Коши для уравнения

$$u_t=\Delta u+(1+u)\ln^\beta(1+u),\quad \beta>1, \tag{1.18}$$

которое в принципе не допускает (при $\beta\neq 0$ или 1) никаких подходящих инвариантных решений [93], рассматривалась в [9, 21]. Было показано, что здесь условия неограниченности и локализации можно получить с помощью построения приближенных автомодельных решений (п.а.р.)

$$u_a(t, x)=\exp\{(T-t)^{-1/(\beta-1)}\Theta_a(\xi)\}-1,\quad \xi=\|x\|/(T-t)^{(\beta-2)/2(\beta-1)},$$

которые удовлетворяют уравнению первого порядка

*) Популярное изложение вопросов теории локализации тепла в краевых задачах можно найти в брошюре [90].

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{(\nabla u_a)^2}{1+u_a} + (1+u_a)\ln^\beta(1+u_a) \qquad (1.19)$$

и к которым неограниченные решения исходной задачи асимптотически сходятся (обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Theta_a(\xi)$ получается после подстановки u_a в (1.19)). Пространственно-временная структура п.а.р. указывает, что при $\beta \geqslant 2$ решения (1.18) локализованы, а при $\beta < 2$ локализация отсутствует.

Условия локализации неограниченных решений уравнений (1.9) при произвольных коэффициентах $k(u)$, $Q(u)$ получены в [20, 23] (см. также [18]) на основе анализа семейства стационарных решений рассматриваемого уравнения (аналогичная техника используется в § 5 данной работы).

Неограниченные решения (и, в частности, условия их локализации) более сложных квазилинейных уравнений и систем параболического типа изучались в [10, 13, 15, 17, 19, 24].

3.2. Первые исследования неограниченных решений полулинейных *уравнений Шредингера* $iu_t = \Delta u + Q(u)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ $(i = \sqrt{-1})$ выполнены в [98—100] (см. также [56, 101, 102]). Дальнейшее изучение подобных уравнений и систем уравнений продолжено в [103—107]. В частности, было показано, что в случае $Q(u) = |u|^{\beta-1}u$, $1 < \beta < 1 + 4/N$, решение всегда является глобальным [105], а при $\beta > 1 + 4/N$ возможны как глобальные [104], так и неограниченные решения [105]. Отметим, что неограниченное возрастание решения сопровождается концентрацией «энергии» на множестве меры нуль [56, 98—102], т. е. решение в определенном смысле является локализованным. Интересный результат о соотношении между стационарными и неограниченными решениями уравнения Шредингера получен в [108] (там же проведено аналогичное исследование одного полулинейного гиперболического уравнения; отметим, что подобный результат является естественным и в случае квазилинейных параболических уравнений).

3.3. Условия неограниченности решений полулинейных *гиперболических* уравнений (1.8) и нелинейных *уравнений Эйлера — Пуассона — Дарбу* были получены в [109] с помощью теоремы сравнения по краевым данным (см. также [110, 111]). Среди других работ, не упоминавшихся выше, отметим [110—115], где получены условия глобальной разрешимости уравнений при других краевых данных, допускающих неограниченные решения. Кроме того, укажем на работы [116—118], посвященные исследованию задачи Коши для уравнения (1.8) с $Q(u) = |u|^\beta$, $\beta > 1$. В [118], например, показано, что при $N \leqslant 3$ и $1 < \beta < [N+1+(N^2+10N-7)^{1/2}]/2(N-1)$ ($\beta \in (1, +\infty)$ при $N=1$) «почти» любое «неотрицательное» решение является неограниченным (в случае $N=3$ этот результат ранее получен в [116]). Если же $\beta > [N+1+(N^2+10N-7)^{1/2}]/2(N-1)$, то при достаточно малых начальных функциях задача Коши имеет глобальное решение [117, 118].

Отметим, что неограниченные решения полулинейных гиперболических уравнений также могут проявлять свойство локализации (см. [119, 120] и библиографию в [120]).

3.4. Достаточные условия отсутствия решений нелинейных *эллиптических* (стационарных) задач различными методами получены в [121—130] (о более ранних работах см. в [121, 122]). Одним из самых красивых здесь результатов является следующий [124]: краевая задача $\Delta u + |u|^{\beta-1}u = 0$, $x \in \Omega$; $u|_{\partial\Omega} = 0$ в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N \geqslant 3$, звездной относительно некоторой точки, при любом $\beta \geqslant (N+2)/(N-2)$ не имеет ненулевого решения *) (для области Ω, например, кольцеобразной формы $0 < a < |x| < b$ нетривиальные ре-

*) Этот результат, а также техника его доказательства широко используются в различных целях при исследовании нелинейных эллиптических задач (см., например, [132—134]).

шения существуют [127]). В то же время, если $1 \leqslant \beta < (N+2)/(N-2)$ ($N \geqslant 3$), то существует счетное число различных решений ([130], см. также библиографию в [131]). Отметим, что при $\beta \geqslant (N+2)/(N-2)$ отсутствует компактное вложение $W_2^1(\Omega)$ в $L^{\beta+1}(\Omega)$ — функциональных пространств, отвечающих различным членам уравнения [56]. Для квазилинейных эллиптических уравнений высших порядков аналогичные результаты получены в [126]. Интересно отметить, что при $\beta \geqslant \geqslant (N+2)/(N-2)$, $N \geqslant 3$, уравнение $\Delta u + |u|^{\beta-1}u = 0$ имеет ограниченное положительное решение в $\mathbf{R}^N$ такое, что $u(x) \to 0$ при $\|x\| \to \infty$ [135, 136] (в случае $\beta < (N+2)/(N-2)$ решений в $\mathbf{R}^N$ не существует). При $\beta = (N+2)/(N-2)$ семейство таких решений представимо в явном виде [136] $u(x) = \left\{ \frac{[N(N-2)\lambda^2]^{1/2}}{(\lambda^2 + \|x\|^2)} \right\}^{(N-2)/2}$, $x \in \mathbf{R}^N$, где $\lambda > 0$ — произвольная постоянная.

3.5. Неограниченные решения эволюционных уравнений с «обратным течением времени» (к ним относятся, например, уравнения (1.9) с коэффициентами $k(u) < 0$) рассматривались в работах [60, 136—141].

3.6. В заключение обзора мы хотим особо обратить внимание на новые свойства неограниченных решений эволюционных уравнений, которые связаны с эффектом локализации и не нашли достаточно подробного освещения в обзоре (как уже отмечалось выше, свойство локализации в той или иной степени присуще неограниченным решениям уравнений различных типов). Пространственная локализация неограниченных решений уравнения (1.17) есть результат «нелинейного взаимодействия» процессов диффузии тепла и энерговыделения. Устойчивые пространственно-неоднородные образования, возникающие под действием различных необратимых процессов, называются диссипативными структурами. В настоящее время они интенсивно изучаются в рамках синергетики и теории структур [142—146], причем основное внимание обычно уделяется исследованию стационарных диссипативных структур. Неограниченные локализованные решения, развивающиеся в режиме с обострением, следует рассматривать как новый класс существенно нестационарных диссипативных структур.

Естественно, возникает вопрос о способах описания эволюции таких нестационарных структур в пространстве и во времени. Это исследование привело к понятиям фундаментальной длины и собственных функций (с.ф.) горения нелинейной диссипативной среды [2—8]. Оказалось, что в рамках модели среды (1.17) единственно возможными структурно устойчивыми образованиями являются указанные выше неограниченные автомодельные решения $u_A(t, x)$ уравнения (1.17). При этом было показано, что при $\beta > \sigma + 1$ функция $\Theta_A(\xi)$ определяется, вообще говоря, неоднозначно, т. е. автомодельная задача имеет целое семейство различных решений, которые отличаются друг от друга своей пространственной структурой (в частности, числом точек максимума и минимума пространственного профиля, а также величиной и формой области локализации) [2—8]. Эти решения названы с.ф. среды. Из способа их построения следует, что горение среды в виде указанных с.ф. происходит с одним для всех типов структур темпом (моментом обострения). В процессе горения в соответствии с автомодельными закономерностями происходит изменение (при $\beta > \sigma + 1$ — сокращение) пространственных размеров структуры с одновременным нарастанием температуры внутри нее. В таком процессе сохраняется количество точек максимумов и минимумов в структуре, а их величины и взаимное расположение подчиняются автомодельным закономерностям. Было показано, что только с.ф. являются структурно устойчивыми в специальной норме в течение практически всего времени их существования. Все остальные первоначально заданные немонотонные распределения, как правило, неустойчивы и очень быстро «разваливаются» на конечное число независимо горящих одиночных структур. Таким образом, только с.ф. среды сохраняют в процессе эволюции качество (архитектуру) своей организации. Важно отметить, что горение среды в виде структур, соответствующих с.ф., происходит в одном темпе, с одним моментом обострения. Принято говорить, что такие структуры сосуществуют в одном «темпо-мире». Конкретный вид с.ф. позволяет сформулировать конструктивные законы объединения простых структур в более сложные [7, 8], использующие, в частности, понятие фундаментальной длины нелинейной среды как эффективного радиуса взаимодействия элементарных возмущений определенной амплитуды. При этом фундаментальные длины определяют размеры областей локализации для каждого из типов структур, свойственных данной среде. Сложные структуры возникают при определенном характере «перекрытия» фундаментальных длин простых структур, осуществленном в соответствии с архитектурой старших собственных функций.

Важно отметить, что, как показано в работах [2—8], свойства нелинейной среды (например, конкретный вид показателей σ и β коэффициентов k и Q в уравнении (1.7)) однозначно определяют всю совокупность структур (и их архитектуру) как образований, которые могут устойчиво в ней эволюционировать. Эти выводы смыкаются с представлениями философов Древнего Востока и Эллады о «потенциальности» и предопределенности типов организаций, возникающих и устойчиво существующих в среде («едином начале»).

Для того чтобы создать в среде устойчивую организацию, необходимо возбудить ее в соответствии с с.ф., задавая возмущения, которые достаточно близко передают их архитектуру. Таким образом, появляется возможность резонансного (в ряде случаев порогового) возбуждения структур в среде, т. е. своеобразного управления происходящими в ней нелинейными процессами. Любопытно, что в силу автомодельного характера развития процесса горения среды в виде структур для управляющего воздействия на ранней стадии процесса необходима очень небольшая порция энергии. Определяющую роль при этом играет характер распределения энергии в пространстве (можно производить своеобразные управляющие «уколы»).

Нетрудно показать, что для одного параболического уравнения в силу принципа максимума невозможен самопроизвольный переход (эволюционная перестройка решения в процессе горения) от младших с.ф. к старшим, содержащим большее число точек максимумов. Представляют огромный интерес построение и анализ таких нелинейных моделей среды, которые позволили бы осуществить такой процесс самоорганизации наиболее адекватно процессу морфогенеза в активных биологических средах. В настоящее время подобные процессы изучаются в рамках систем нелинейных уравнений диффузии (см. [142—145]). С нашей точки зрения, основным новым требованием [7, 8] к таким системам может служить условие наличия в системе как режима, обеспечивающего локализацию с.ф. в LS-режиме (при одном классе начальных данных), так и процесса морфогенеза, который осуществлял бы переход от младших с.ф. к старшим в своеобразном HS-режиме (при других начальных данных). При наличии в среде определенного спектра хаотических флуктуаций эти процессы могли бы носить циклический характер, в результате чего возникала бы систематическая смена LS- и HS-режимов, и в среде самоподдерживался бы достаточно сложный уровень организации.

Таким образом, в отличие от обычных (и традиционных) подходов к проблеме морфогенеза [142—145] в данном случае ставится задача предварительного определения всех возможных типов с.ф. среды с последующим осуществлением процесса перехода от младших с.ф. к старшим и наоборот. Этот подход более близок к процессу морфогенеза, реально наблюдаемому в биологических объектах, и его реализация на моделях нелинейных сред представляет большой научный интерес.

§ 2. ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРИ $p<1+\mu$, $q<1+\nu$

В этом параграфе будет показано, что в случае $1\leqslant p<1+\mu$, $1\leqslant q<1+\nu$ существуют глобальные априорные оценки обобщенного (неотрицательного) решения задачи (1.1)—(1.4) при произвольных начальных функциях. При этом будем считать, что обобщенное решение задачи подчиняется («слабому») принципу максимума, так что если $u_0\geqslant 0$, $v_0\geqslant 0$ почти всюду (п.в.) в Ω, то $u(t, x)\geqslant 0$, $v(t, x)\geqslant 0$ п.в. в Ω при любых фиксированных $t\geqslant 0$. Возможность такого допущения обосновывается ниже.

Введем обозначение $S_T=(0, T)\times\Omega$, где $0<T<+\infty$ — произвольная постоянная.

1. Слабые априорные оценки. Пусть $p<1+\mu$, $q<1+\nu$. Для вывода глобальных априорных оценок решения скалярно умножим обе части уравнений (1.1) и (1.2) на $u^{1+\nu}$ и $v^{1+\mu}$ соответственно, а затем получившиеся выражения проинтегрируем по t. Тогда, учитывая, что $u_0\in L^{\nu+2}(\Omega)$, $v_0\in L^{\mu+2}(\Omega)$, получим тождества

$$\frac{1}{\nu+2}\|u(t)\|_{\nu+2}^{\nu+2}+\int_0^t\|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^2\,ds=$$
$$=\frac{1}{\nu+2}\|u_0\|_{\nu+2}^{\nu+2}+\int_0^t(v^p(s),\ u^{\nu+1}(s))\,ds, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\mu+2}\|v(t)\|_{\mu+2}^{\mu+2}+\int_0^t\|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2\,ds=$$
$$=\frac{1}{\mu+2}\|v_0\|_{\mu+2}^{\mu+2}+\int_0^t(u^q(s),\ v^{\mu+1}(s))\,ds. \tag{2.2}$$

Складывая эти тождества, имеем

$$\frac{1}{\nu+2}\|u(t)\|_{\nu+2}^{\nu+2}+\frac{1}{\mu+2}\|v(t)\|_{\mu+2}^{\mu+2}+\int_0^t\|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^2\,ds+$$
$$+\int_0^t\|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2\,ds\leqslant c+\int_0^t(v^p(s),\ u^{\nu+1}(s))\,ds+$$
$$+\int_0^t(u^q(s),\ v^{\mu+1}(s))\,ds \tag{2.3}$$

(здесь и далее символом c обозначаются различные положительные постоянные).

Используя неравенство Коши — Буняковского и ε-неравенство (см. [34]), получаем

$$\int_0^t(v^p(s),\ u^{\nu+1}(s))\,ds\leqslant\int_0^t\|v^p(s)\|_2\,\|u^{\nu+1}(s)\|_2\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1\int_0^t\|v^p(s)\|_2^2\,ds+\frac{1}{4\varepsilon_1}\int_0^t\|u^{\nu+1}(s)\|_2^2\,ds, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon_1>0$ — произвольная постоянная. Применяя теперь неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_0^t\|v^p(s)\|_2^2\,ds\leqslant(\operatorname{mes}\Omega)^{(\mu+1-p)/(\mu+1)}\int_0^t\|v^{\mu+1}(s)\|_2^{2p/(\mu+1)}\,ds. \tag{2.5}$$

Для любой функции $Y(x) \in H_0^1(\Omega)$ справедлива оценка [34]

$$\|Y\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla Y\|_2^2, \tag{2.6}$$

где $\lambda_1 > 0$ — первое (наименьшее) собственное значение задачи

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \ x \in \Omega; \ w_j \in H_0^1(\Omega), \ j = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Применяя к правой части (2.4) неравенства (2.5), (2.6), получим

$$\int_0^t (v^p(s), \ u^{\nu+1}(s))\, ds \leqslant \varepsilon_1 \lambda_1^{-p/(\mu+1)} (\operatorname{mes}\Omega)^{(\mu+1-p)/(\mu+1)} \times$$
$$\times \int_0^t \|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^{2p/(\mu+1)} ds + \frac{1}{4\varepsilon_1\lambda_1} \int_0^t \|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^2 ds. \tag{2.8}$$

Аналогичным образом выводим другое неравенство

$$\int_0^t (u^q(s), \ v^{\mu+1}(s))\, ds \leqslant \varepsilon_2 \lambda_1^{-q/(\nu+1)} (\operatorname{mes}\Omega)^{(\nu+1-q)/(\nu+1)} \times$$
$$\times \int_0^t \|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^{2q/(\nu+1)} ds + \frac{1}{4\varepsilon_2\lambda_1} \int_0^t \|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2 ds. \tag{2.9}$$

Применяя неравенство Юнга (см. [34]) и полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/\lambda_1$, получаем

$$\int_0^t (v^p(s), \ u^{\nu+1}(s))\, ds \leqslant c + \frac{1}{4} \int_0^t \|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2 ds +$$
$$+ \frac{1}{4} \int_0^t \|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^2 ds, \tag{2.10}$$

$$\int_0^t (u^q(s), \ v^{\mu+1}(s))\, ds \leqslant c + \frac{1}{4} \int_0^t \|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^2 ds +$$
$$+ \frac{1}{4} \int_0^t \|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2 ds. \tag{2.11}$$

С помощью оценок (2.10), (2.11) из (2.3) выводим неравенство $\frac{1}{\nu+2} \| u(t) \|_{\nu+2}^{\nu+2} + \frac{1}{\mu+2} \| v(t) \|_{\mu+2}^{\mu+2} + \frac{1}{2} \int_0^t \| \nabla u^{\nu+1}(s) \|_2^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2 ds \leqslant c$. Отсюда непосредственно следует, что при любых $T < +\infty$ справедливы включения $u(t) \in L^\infty(0, T; L^{\nu+2}(\Omega))$, $v(t) \in L^\infty(0, T; L^{\mu+2}(\Omega))$, $u^{\nu+1}(t) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $v^{\mu+1}(t) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Эти оценки свидетельствуют о том, что при $p < 1 + \mu$, $q < 1 + \nu$ задача имеет глобальное решение.

Замечание. Если $p = 1 + \mu$, $q < 1 + \nu$ (случай $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$ рассматривается в следующем параграфе), то, как следует из (2.8), (2.9), при выполнении условий

$$1/4\lambda_1\varepsilon_2 < 1, \ 1/4\lambda_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2/\lambda_1 < 1 \tag{2.12}$$

существуют указанные выше глобальные оценки решения. Нетрудно убедиться, что система неравенств (2.12) всегда разрешима относительно ε_1, ε_2, если $\lambda_1 > 1/2$.

2. Сильные априорные оценки. Такие оценки выводятся при дополнительных ограничениях

$$p < (\mu + 1)\frac{\nu + 2}{2(\nu + 1)}, \quad q < (\nu + 1)\frac{\mu + 2}{2(\mu + 1)}. \tag{2.13}$$

Умножим скалярно обе части уравнений (1.1) и (1.2) на $\partial u^{\nu+1}/\partial t$ и $\partial v^{\mu+1}/\partial t$, а затем проинтегрируем получившиеся выражения по t. В результате получим тождества

$$\frac{4(\nu+1)}{(\nu+2)^2}\int_0^t \|\{u^{1+\nu/2}(s)\}'\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\|\nabla u^{\nu+1}(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0^{\nu+1}\|_2^2 + \int_0^t (v^p(s), \{u^{\nu+1}(s)\}')\,ds, \tag{2.14}$$

$$\frac{4(\mu+1)}{(\mu+2)^2}\int_0^t \|\{v^{1+\mu/2}(s)\}'\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\|\nabla v^{\mu+1}(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\nabla v_0^{\mu+1}\|_2^2 + \int_0^t (u^q(s), \{v^{\mu+1}(s)\}')\,ds, \tag{2.15}$$

складывая которые, приходим к оценке

$$\frac{4(\nu+1)}{(\nu+2)^2}\int_0^t \|\{u^{1+\frac{\nu}{2}}\}'\|_2^2 ds + \frac{4(\mu+1)}{(\mu+2)^2}\int_0^t \|\{v^{1+\frac{\mu}{2}}\}'\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\|\nabla u^{\nu+1}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v^{\mu+1}\|_2^2 \leqslant c + \int_0^t (v^p, \{u^{\nu+1}\}')\,ds + \int_0^t (u^q, \{v^{\mu+1}\}')\,ds. \tag{2.16}$$

Рассмотрим правую часть (2.16). Применяя для оценки второго члена неравенство Гёльдера, получим

$$\int_0^t (v^p, \{u^{\nu+1}\}')\,ds = \frac{2(\nu+1)}{(\nu+2)}\int_0^t \left(v^p, u^{\frac{\nu}{2}}\{u^{1+\frac{\nu}{2}}\}'\right) ds \leqslant \frac{2(\nu+1)}{(\nu+2)}\int_0^t \|\{u^{1+\nu/2}\}'\|_2 \|u^{\nu/2}\|_{4(\nu+1)/\nu}\|v^p\|_m ds = \frac{2(\nu+1)}{(\nu+2)}\int_0^t \|\{u^{1+\nu/2}\}'\|_2 \|u^{\nu+1}\|_2^{\nu/2(\nu+1)}\|v^p\|_m ds, \tag{2.17}$$

где $1/2 + \nu/4(\nu+1) + 1/m = 1$, т. е. $m = 4(\nu+1)/(\nu+2) > 1$. Правую часть (2.17) с помощью ε-неравенства можно оценить через $\frac{2(\nu+1)}{(\nu+2)^2} \times \int_0^t \|\{u^{1+\nu/2}\}'\|_2^2 ds + c\int_0^t \|u^{\nu+1}\|_2^{\nu/(\nu+1)}\|v^p\|_m^2 ds$. Наконец, применяя неравенство Юнга, имеем $\|u^{\nu+1}\|_2^{\nu/(\nu+1)}\,\|v^p\|_m^2 \leqslant \frac{\lambda_1}{4}\|u^{\nu+1}\|_2^2 + c\,\|v^p\|_m^{4(\nu+1)/(\nu+2)}$. Однако ввиду (2.13)

$$\|v^p\|_m^{4(\nu+1)/(\nu+2)} = \int\limits_\Omega v^{4p(\nu+1)/(\nu+2)}\,dx \leqslant c\,\|v^{\mu+1}\|_2^{2p(\nu+1)/(\nu+2)(\mu+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1}{4}\|v^{\mu+1}\|_2^2 + c.$$

Отсюда с помощью оценки (2.6) получим

$$\int\limits_0^t (v^p,\ \{u^{\nu+1}\}')\,ds \leqslant \frac{2(\nu+1)}{(\nu+2)^2}\int\limits_0^t \|\{u^{1+\nu/2}\}'\|_2^2 ds + \frac{1}{4}\int\limits_0^t \|\nabla u^{\nu+1}\|_2^2 ds + \frac{1}{4}\int\limits_0^t \|\nabla v^{\mu+1}\|_2^2 ds + c. \tag{2.18}$$

Аналогичным образом с учетом второго условия (2.6) выводится неравенство

$$\int\limits_0^t (u^q,\ \{v^{\mu+1}\}')\,ds \leqslant \frac{2(\mu+1)}{(\mu+2)^2}\int\limits_0^t \|\{v^{1+\frac{\mu}{2}}\}'\|_2^2 ds + \frac{1}{4}\int\limits_0^t \|\nabla u^{\nu+1}\|_2^2 ds + \frac{1}{4}\int\limits_0^t \|\nabla v^{\mu+1}\|_2^2 ds + c. \tag{2.19}$$

Оценивая с помощью (2.18), (2.19) правую часть (2.16), получим

$$\frac{2(\nu+1)}{(\nu+2)^2}\int\limits_0^t \|\{u^{1+\nu/2}\}'\|_2^2 ds + \frac{2(\mu+1)}{(\mu+2)^2}\int\limits_0^t \|\{v^{1+\mu/2}\}'\|_2^2 ds + \frac{1}{2}[\|\nabla u^{\nu+1}\|_2^2 + \|\nabla v^{\mu+1}\|_2^2] \leqslant c + \frac{1}{2}\int\limits_0^t [\|\nabla u^{\nu+1}(s)\|_2^2 + \|\nabla v^{\mu+1}(s)\|_2^2]\,ds. \tag{2.20}$$

Отсюда непосредственно следует, что при любых $T < +\infty$ справедливы включения

$$\{u^{1+\nu/2}\}'(t),\ \{v^{1+\mu/2}\}'(t) \in L^2(S_T),\qquad u^{\nu+1}(t),\ v^{\mu+1}(t) \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \tag{2.21}$$

которые свидетельствуют о глобальной разрешимости задачи.

3. **Существование решения (предельный переход).** Оценок (2.21) в принципе достаточно для предельного перехода при построении решения методом Галеркина. При этом сначала решается краевая задача для уравнений

$$u_t = \Delta(|u|^\nu u) + \varphi(v), \tag{1.1'}$$

$$v_t = \Delta(|v|^\mu v) + \psi(u), \tag{1.2'}$$

где $\varphi(v) = \{v^p$, если $v \geqslant 0$; 0, если $v < 0\}$, $\psi(u) = \{u^q$, если $u \geqslant 0$; 0, если $u < 0\}$, а затем доказывается неотрицательность решения, в силу чего u, v удовлетворяют исходным уравнениям (1.1), (1.2).

Итак, пусть выполняются условия (2.13). Приближенное решение краевой задачи для уравнений (1.1), (1.2) при каждом $m = 1, 2, \ldots$ ищется в виде

$$\begin{gathered} u_m(t) = \Big|\sum_{j=1}^{m} f_{jm}(t)\, w_j\Big|^{-\nu/(\nu+1)} \sum_{j=1}^{m} f_{jm}(t)\, w_j, \\ v_m(t) = \Big|\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j\Big|^{-\mu/(\mu+1)} \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Здесь $\{w_j\}$ — «базис» в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, составленный из собственных функций задачи (2.7). Функции $f_{jm}, g_{jm} \in C^1([0, T])$ определяются из системы уравнений

$$(u_m', w_j) + (\nabla(|u_m|^\nu u_m), \nabla w_j) = (\varphi(v_m), w_j), \tag{2.23}$$

$$(v_m', w_j) + (\nabla(|v_m|^\mu v_m), \nabla w_j) = (\psi(u_m), w_j); \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{2.24}$$

и начальных условий

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad v_m(0) = v_{0m}, \tag{2.25}$$

где $|u_{0m}|^\nu u_{0m} \to |u_0|^\nu u_0$, $|v_{0m}|^\mu v_{0m} \to |v_0|^\mu v_0$ в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Локальная разрешимость задачи (2.23) — (2.25) на некотором отрезке $[0, t_m]$ вытекает из общих результатов о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что в силу линейной независимости функций $w_1, \ldots, w_m$ выполняются неравенства $\det\| |u_m|^{-\nu/(\nu+1)} w_i w_j\| \neq 0$, $\det\| |v_m|^{-\mu/(\mu+1)} w_i w_j\| \neq 0$, и поэтому уравнения (2.23), (2.24) всегда можно разрешить относительно производных f_{jm}', g_{jm}' (отметим, что в то же время $|(|u_m|^{-\nu/(\nu+1)} w_i, w_j)| < \infty$, $|(|v_m|^{-\mu/(\mu+1)} w_i, w_j)| < \infty$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$).

Для вывода глобальных оценок приближенного решения, которые обеспечивают разрешимость в целом задачи (2.23) — (2.25), скалярно умножим каждое уравнение (2.23) и (2.24) на f_{jm}' и g_{jm}' соответственно, просуммируем каждую группу равенств по всем j от 1 до m, а затем получившиеся выражения проинтегрируем по t. В результате получим, что функции u_m и v_m удовлетворяют тождествам (2.14) и (2.15), из которых при выполнении условий (2.13) выводится оценка (2.20) (все указанные выражения без труда можно приспособить к знаконеопределенным функциям u_m, v_m). Отсюда непосредственно будет следовать, что

$$\{|u_m|^{\frac{\nu}{2}} u_m\}', \quad \{|v_m|^{\frac{\mu}{2}} v_m\}' \text{ ограничены в } L^2(S_T), \tag{2.26}$$

$$|u_m|^\nu u_m, \quad |v_m|^\mu v_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)) \tag{2.27}$$

(и поэтому, в частности, $t_m = T$). Из (2.27) заключаем, что $|u_m|^{\nu/2} u_m$, $|v_m|^{\mu/2} v_m$ ограничены в $L^2(S_T)$. Эта оценка вместе с (2.26) означает, что $|u_m|^{\nu/2} u_m$, $|v_m|^{\mu/2} v_m$ ограничены в $H^1(S_T)$. Отсюда вытекает существование таких подпоследовательностей u_{m_1}, v_{m_1} и функций u и v, что $|u_{m_1}|^{\nu/2} u_{m_1} \to |u|^{\nu/2} u$, $|v_{m_1}|^{\mu/2} v_{m_1} \to |v|^{\mu/2} v$ сильно в $L^2(S_T)$ и почти всюду (см. [1]). В силу (2.27) это, в частности, означает, что $\varphi(v_{m_1}) \to \varphi(v)$, $\psi(u_{m_1}) \to \psi(u)$ слабо в $L^2(S_T)$. Нетрудно убедиться, что в силу (2.27) $\Delta(|u_m|^\nu u_m)$, $\Delta(|v_m|^\mu v_m)$ ограничены в $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Поэтому можно заключить, что $\Delta(|u_{m_1}|^\nu u_{m_1}) \to \xi$, $\Delta(|v_{m_1}|^\mu v_{m_1}) \to \eta$ $*$-слабо в $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Доказательство того, что $\xi = \Delta(|u|^\nu u)$, $\eta = \Delta(|v|^\mu v)$, проводится точно так же, как и в [1]. При этом используются тождества (2.1), (2.2), которым удовлетворяют функции u_m, v_m. Для их вывода достаточно умножить каждое уравнение (2.23) и (2.24) на f_{jm} и g_{jm} соответственно, просуммировать каждую группу равенств по j от 1 до m и получившиеся выражения проинтегрировать по t. Производя теперь предельный переход (см. [1]), получаем, что функции u, v являются решением задачи и удовлетворяют включениям (2.21).

4. **«Слабый» принцип максимума.** Пусть $u_0(x) \geqslant 0$, $v_0(x) \geqslant 0$ п. в. в Ω. Положим $U(t) = \sup\{u(t), 0\}$, $V(t) = \sup\{v(t), 0\}$. Из (2.23), (2.24) непосредственно следует, что при любых функциях $X, Y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ справедливы тождества

$$\begin{gathered}\int_0^t (u'(s), X(s))\,ds + \int_0^t (\nabla(|u(s)|^\nu u(s)),\\ \nabla X(s))\,ds = \int_0^t (\varphi(v(s)), X(s))\,ds,\\ \int_0^t (v'(s), Y(s))\,ds + \int_0^t (\nabla(|v(s)|^\mu v(s)),\\ \nabla Y(s))\,ds = \int_0^t (\psi(u(s)), Y(s))\,ds.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Положим $X = |u|^\nu u - |U|^\nu U$, $Y = |v|^\mu v - |V|^\mu V$ (условия $X, Y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ будут в этом случае выполнены; см. (2.21)). Тогда по определению функций U, V имеем $\int_0^t (\varphi(v), |u|^\nu u - |U|^\nu U)\,ds = 0$, $\int_0^t (\psi(u), |v|^\mu v - |V|^\mu V)\,ds = 0$. Кроме того, нетрудно убедиться, что $\int_0^t (\nabla(|U|^\nu U), |u|^\nu u - |U|^\nu U)\,ds = 0$, $\int_0^t (\nabla(|V|^\mu V), |v|^\mu v - |V|^\mu V)\,ds = 0$. С помощью этих равенств из (2.28) получаем $\int_0^t (u', |u|^\nu u - |U|^\nu U)\,ds + \int_0^t \|\nabla(|u|^\nu u - |U|^\nu U)\|_2^2 ds = 0$, $\int_0^t (v', |v|^\mu v - |V|^\mu V)\,ds + \int_0^t \|\nabla(|v|^\mu v - |V|^\mu V)\|_2^2 ds = 0$. Отсюда непосредственно вытекают неравенства: $\int_0^t (u', |u|^\nu u - |U|^\nu U)\,ds \leqslant 0$, $\int_0^t (v', |v|^\mu v - |V|^\mu V)\,ds \leqslant 0$, которые означают, что $\operatorname{mes}\{x \mid u(t, x) \leqslant 0\} = \operatorname{mes}\{x \mid v(t, x) \leqslant 0\} = 0$, т. е. $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ п. в. в Ω при всех $t \geqslant 0$.

§ 3. УСЛОВИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРИ $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$

Утверждение. *Пусть $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$ и начальные функции таковы, что $u_0^{\nu+1}$, $v_0^{\mu+1} \in H_0^1(\Omega)$. Пусть, кроме того, область Ω такова, что первое собственное значение λ_1 задачи (2.7) удовлетворяет условию*

$$\lambda_1 > 1. \tag{3.1}$$

Тогда существует глобальное неотрицательное п. в. в Ω обобщенное решение задачи (1.1)—(1.4), удовлетворяющее включениям (2.21).

Доказательство. Решение задачи, так же как и в § 2, строим методом Галеркина. Тогда функции u_m, v_m удовлетворяют тождествам (2.14), (2.15), складывая которые, получим (напомним, что $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$)

$$\frac{4(\nu+1)}{(\nu+2)^2}\int_0^t \|\{|u_m|^{\nu/2} u_m\}'\|_2^2 ds + \frac{4(\mu+1)}{(\mu+2)^2}\int_0^t \|\{|v_m|^{\mu/2} v_m\}'\|_2^2 ds +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\|\nabla(|u_m|^{\nu}u_m)\|_2^2+\|\nabla(|v_m|^{\mu}v_m)\|_2^2\right]\leqslant \tag{3.2}$$

$$\leqslant c+(|u_m|^{\nu}u_m,\ |v_m|^{\mu}v_m).$$

При выводе этого неравенства мы учли, что $\int\limits_0^t(|v_m|^{\mu}v_m,\ \{|u_m|^{\nu}u_m\}')\,ds+$ $+\int\limits_0^t(|u_m|^{\nu}u_m,\ \{|v_m|^{\mu}v_m\}')\,ds=(|u_m|^{\nu}u_m,\ |v_m|^{\mu}v_m)-(|u_{0m}|^{\nu}u_{0m},\ |v_{0m}|^{\mu}v_{0m})$. Последний член в (3.2) в силу неравенства Коши — Буняковского и оценки (2.6) не превосходит $\||u_m|^{\nu}u_m\|_2\||v_m|^{\mu}v_m\|_2\leqslant\frac{1}{2}\left[\||u_m|^{\nu}u_m\|_2^2+\||v_m|^{\mu}v_m\|_2^2\right]\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2\lambda_1}\left[\|\nabla(|u_m|^{\nu}u_m)\|_2^2+\|\nabla(|v_m|^{\mu}v_m)\|_2^2\right]$. Поэтому из (3.2) заключаем, что

$$\frac{4(\nu+1)}{(\nu+2)^2}\int\limits_0^t\|\{|u_m|^{\nu/2}u_m\}'\|_2^2ds+\frac{4(\mu+1)}{(\mu+2)^2}\int\limits_0^t\|\{|v_m|^{\mu/2}v_m\}'\|_2^2ds+$$

$$+\frac{(\lambda_1-1)}{2\lambda_1}\left[\|\nabla(|u_m|^{\nu}u_m)\|_2^2+\|\nabla(|v_m|^{\mu}v_m)\|_2^2\right]\leqslant c, \tag{3.3}$$

и, следовательно (см. (3.1)), справедливы оценки (2.26), (2.27). Завершается доказательство сформулированного утверждения так же, как и в § 2.

Замечание 1. Если $\lambda_1=1$, то, как следует из (3.3), приближенное решение удовлетворяет только оценкам (2.26), которые в принципе свидетельствуют о глобальной разрешимости задачи. Этих оценок, однако, недостаточно для предельного перехода.

Замечание 2. В следующем параграфе будет показано, что в случае областей Ω, для которых $\lambda_1<1$, задача (1.1)—(1.4) при $p=1+\mu$, $q=1+\nu$ не имеет глобального решения, коль скоро $u_0+v_0\neq0$ в Ω.

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.

2. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.

3. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением.— М., 1976.— 67 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 74).

4. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.

5. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—624.

6. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— М., 1977.— 80 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 106).

7. Курдюмов С. П.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.

8. Курдюмов С. П. Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением.— Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.

9. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.— М., 1979.— 30 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 161).

10. Галактионов В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Влияние выгорания на локализацию горения и образование структур в нелинейных средах.— М., 1979.— 37 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 27).

11. Самарский А. А., Курдюмов С. П.— Труды кафедры волновой и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, 1979, № 3, с. 18—28.

12. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А. и др.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836—839.
13. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587—591.
14. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Устойчивость собственных функций и эффекты переноса в неоднородной диссипативной среде.— М., 1980.— 27 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 16).
15. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Согласованные режимы горения в одной диссипативной среде с переносом.— М., 1980.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 125).
16. Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др.— В кн.: Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами.— М.: ИПМ АН СССР, 1980, с. 5—27.
17. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Некоторые эффекты самоорганизации в физике плазмы.— М., 1980.— 29 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 122).
18. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362—1364.
19. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 5, с. 1084—1088.
20. Галактионов В. А. Некоторые свойства решений квазилинейных параболических уравнений.— М., 1981.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 16).
21. Самарский А. А.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1981, т. 158, с. 153—162.
22. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdjumov S. P., Mikhailov A. P.— Tenth. European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Phys., Contr. Papes, vol. 1, p. F-15.— Moscow, 1981.
23. Галактионов В. А.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 5, с. 1035—1040.
24. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Нестационарные диссипативные структуры в двухкомпонентных средах.— М., 1981.— 27 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 19).
25. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте.— М., 1977.— 87 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 103).
26. Еленин Г. Г., Плохотников К. Э. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла.— М., 1977.— 29 с. (Препринт/ИПМ АН СССР: № 91).
27. Самарский А. А.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 11, с. 1925—1935.
28. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
29. Kaplan S.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1963, vol. 16, p. 305—330.
30. Friedman A.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1960, vol. 5, p. 238—248.
31. Friedman A.— Proc. Symp. in Appl. Math. 17, Amer. Math. Soc.— Providence, Rhode Island, 1965, p. 3—23.
32. Fujita H.— J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo. 1966, Sect. 1, vol. 13, p. 109—124.
33. Олейник О. А., Кружков С. Н.— УМН, 1961, т. 16, вып. 5, с. 115—155.
34. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.
35. Levine H. A.— Math. Ann., 1975, vol. 214, p. 205—220.
36. Харди Г., Литлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства.— М.: Изд-во Иностр. лит., 1948.
37. Pao C. V.— Pasific J. of Math., 1979, vol. 84, p. 191—197.
38. Pao C. V.— Appl. Anal., 1980, vol. 10, p. 5—13.
39. Pao C. V.— Appl. Anal. 1979, vol. 9, p. 107—109.
40. Pao C. V.— SIAM J. Math. Anal., 1980, vol. 11, p. 559—564.
41. Fujita H.— Proc. Symp. in Pure Math. 18, Amer. Math. Soc., 1969, p. 105—113.
42. Glassey R. T.— Math. Z., 1973, vol. 132, p. 182—203.
43. Галактионов В. А.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 5, с. 836—842.
44. Галактионов В. А.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 6, с. 1369—1385.
45. Itaya N.— Proc. Japan Acad., 1979, vol. 55, ser. A, p. 241—244.
46. Hayakawa K.— Proc. Japan Acad., 1973, vol. 49, ser. A, p. 503—505.
47. Sugitani S.— Osaka J. of Math., 1975, vol. 12, p. 45—51.
48. Portnoy S. L.— J. Math. Anal. and Appl., 1976, vol. 55, p. 291—294.
49. Kobayashi K., Sirao T., Tanaka H.— J. Mat. Soc. of Japan, 1977, vol. 29, p. 407—424.
50. Aronson D. G., Weinberger H. F.— Advances in Math., 1978, vol. 30, p. 33—76.
51. Weissler F. B.— Indiana Univ. Math. J., 1980, vol. 29, p. 79—102.
52. Kobayashi K.— Hiroshima Math. J., 1980, vol. 10, p. 189—227.
53. Levine H. A.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1973, vol. 51, p. 371—386.
54. Levine H. A., Payne L. E.— Rend. Math., 1975, vol. 8, p. 413—428.
55. Куксин С. Б.— Мат. сб., 1982, т. 117 (159), № 3, с. 359—378.
56. Похожаев С. И.— Труды Всесоюз. конф. по уравн. с частн. произв., посв. 75-летию акад. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 200—203.

57. Ball J. M.— Quart J. of Math., 1977, vol. 28, p. 473—486.
58. Levine H. A., Payne L. E.— J. Math. Anal. and Appl., 1976, vol. 55, p. 329—334.
59. Levine H. A., Payne L. E.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 46, p. 277—284.
60. Levine H. A., Payne L. E.— J. Differ. Equat., 1974, vol. 16, p. 319—334.
61. Pao C. V.— J. Differ. Equat., 1976, vol. 22, p. 145—163.
62. Levine H. A.— Trans. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 192, p. 1—21.
63. Levine H. A.— SIAM J. Math. Anal., 1974, vol. 5, p. 138—146.
64. Levine H. A.— SIAM J. Math. Anal., 1974, vol. 5, p. 644—648.
65. Straughan B.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 48, p. 381—390.
66. Levine H. A.— J. Math. Anal. and Appl., 1974, vol. 48, p. 646—651.
67. Knops R. J., Levine H. A., Payne L. E.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1974, vol. 55, p. 52—72.
68. Levine H. A.— J. Appl. Math. and Phys., 1975, vol. 26, p. 843—846.
69. Галактионов В. А.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 2, с. 322—338.
70. Tsutsumi M.— Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1972/73, vol. 8, p. 211—229.
71. Tsutsumi M.— Math. Japan., 1972, vol. 17, p. 173—193.
72. Ishii H.— J. Differ. Equat., 1977, vol. 26, p. 291—319.
73. Ôtani M.— J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. 1A, 1977, vol. 24, p. 575—605.
74. Sperb R. P.— Arch. for Ration Mech. and Anal., 1981, vol. 75, p. 127—145.
75. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.—Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 3, с. 586—589.
76. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1451—1461.
77. Галактионов В. А.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 832—835.
78. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 4, с. 1048—1054.
79. Калашников А. С.— ЖВМ и МФ, 1974, т. 14, № 4, с. 891—905.
80. Калашников А. С.— ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 3, с. 689—697.
81. Кершнер Р.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1978, vol. 32, N 3—4, p. 301—330.
82. Ewans L. C., Knerr B. F.— Illinois J. of Math., 1979, vol. 23, p. 153—156.
83. Knerr B. F. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, vol. 249, p. 409—424.
84. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б. Исследование многомерной архитектуры собственных функций нелинейной среды.— М., 1982.— 29 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 75).
85. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1977, № 1, с. 3—23.
86. Адьютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. Исследование автомодельных тепловых структур в нелинейной среде.— М., 1982.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 108).
87. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
88. Галактионов В. А., Самарский А. А.— ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 3, с. 646—659.
89. Галактионов В. А., Самарский А. А.— ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 4, с. 831—838.
90. Змитренко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла / Математика, кибернетика.— М.: Знание, 1982, № 12.— 63 с.
91. Nakagawa T.— Appl. Math. and Optimiz., 1976, vol. 2, p. 337—350.
92. Nakagawa T., Ushijima T.— Topics in Numer. Anal., 1977, vol. 3, p. 275—291.
93. Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком.— М., 1979.— 31 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 57).
94. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях.— М., 1982.— 24 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 79).
95. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения анизотропной теплопроводности с источником.— М., 1982.— 20 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 134).
96. Дородницын В. А.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 6, с. 1393—1400.
97. Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником.— М., 1980.— 24 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 31).
98. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Тез. докл. представл. на V Всесоюз. конф. по нелин. оптике.— М.: Изд-во МГУ, 1970.
99. Захаров В. Е.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 5, с. 1745—1759.
100. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1972, № 1, с. 92—97.
101. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е. Динамика ленгмюровского коллапса. — М., 1974.— 66 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 106).
102. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 1, с. 115—126.

103. Жибер А. В.— Труды Всесоюз. конф. по уравн. с частн. произв., посв. 75-летию акад. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 305—306.
104. Strauss W. A.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1974, vol. 55, p. 86—92.
105. Glassey R. T.— J. of Math. Phys., 1977, vol. 18, p. 1794—1797.
106. Насибов Ш. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 4, с. 661—670.
107. Cazenave T.— Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, 1979, Sect. A84, N 3—4, p. 327—346.
108. Berestycki H., Cazenave T.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, sér. 1, vol. 293, p. 489—492.
109. Keller J. B.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, p. 523—530.
110. Sattinger D. H.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1968, vol. 28, p. 226—244.
111. Пикулин В. П.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 9, с. 1659—1669.
112. Sattinger D. H.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1968, vol. 30, p. 148—172.
113. Nakao M., Ebihara Y., Nanbu T.— Pacific J. of Math., 1975, vol. 60, p. 63—70.
114. Ebihara Y.—J. Math. Anal. and Appl., 1978, vol. 64, p. 398—406.
115. Пикулин В. П.— Мат. заметки, 1980, т. 28, № 4, с. 555—563.
116. John F.— Manuscripta Math., 1979, vol. 28, p. 235—268.
117. Glassey R. T.— Math. Z., 1981, vol. 178, p. 233—261.
118. Glassey R. T.— Math. Z., 1981, vol. 177, p. 332—340.
119. Джорджадзе Г. П., Погребков В. К., Поливанов М. К.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 2, с. 318—320.
120. Филиппов А. Т.— Физ. элемент. частиц и атом. ядра, 1980, т. 11, вып. 3, с. 735—801.
121. Keller J. B.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, p. 503—510.
122. Гельфонд И. М.—УМН, 1959, т. 14, № 2, с. 87—158.
123. Похожаев С. И.— Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 2, с. 305—308.
124. Похожаев С. И.— Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 1, с. 36—39.
125. Fujita H.— Bull. of Amer. Math. Soc., 1969, vol. 75, p. 132—135.
126. Похожаев С. И.— Мат. сб., 1970, т. 82, № 2, с. 192—212.
127. Kazdan J. L., Warner F. W.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1975, vol. 28. p. 567—597.
128. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.— М.: Наука, 1975.
129. Levine H. A., Payne L. E.— SIAM J. Math. Anal., 1976, vol. 7, p. 337—343.
130. Похожаев С. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1327—1331.
131. Bahri A., Berestycki H.— Trans. of Amer. Math. Soc., 1981, vol. 267, p. 1—32.
132. Berestycki H., Lions P. L., Peletier L. A.—Indiana Univ. Math. J., 1981, vol. 30, p. 141—157.
133. Gidas B., Spruck J.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1981, vol. 34, p. 525—598.
134. De Figueiredo D. G., Lions P.-L., Nussbaum R. D.—J. Math. Pures et Appl., 1982, vol. 61, p. 41—63.
135. Joseph D. D., Lundgren T. S.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1973, vol. 49, p. 241—269.
136. Loewner C., Nirenberg L.— In: Contributions to Analysis. New York: Academic Press, 1974, p. 245—272.
137. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью.— М.: Мир, 1971.
138. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е.— ПММ, 1974, т. 38, № 6, с. 991—995.
139. Straughan B.—Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, 1975/76, Sect. A75, N 2, p. 165—170.
140. Яненко Н. Н.— В кн.: Численные методы решения задач переноса, ч. I. Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1979, с. 3—13.
141. Новиков В. А.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1311—1313.
142. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.
143. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.— М.: Мир, 1973.
144. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.— М.: Мир, 1979.
145. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах.— М.: Мир, 1979.
146. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы / Математика, кибернетика.— М.: Знание, 1983.— 64 с.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 25 апреля 1983 г.