

105



Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша,  
Академии Наук СССР

ПРЕПР.  
Ω-25

В.М. Головинин, И.Е. Краюшкин, М.А. Рязанов,  
А.А. Самарский



ДВУМЕРНЫЕ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ  
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ  
С РАЗНЕСЕННЫМИ СКОРОСТЯМИ

Преприят № 105 за 1985 г.

Москва

## А Н Н О Т А Ц И Я

УДК 517.9:533.7

Предложен новый класс явных частично трехслойных полностью консервативных разностных схем газовой динамики для расчета двумерных течений в эйлеровых переменных. Отличительной чертой этих схем является отсутствие в их первом дифференциальном приближении членов, соответствующих сдвиговой вязкости, что играет важную роль при моделировании течений, характеризующихся переходом от ламинарного режима к турбулентному.

Приведены примеры расчетов.

В работах [9-14] предложены общие подходы к построению разностных схем г.д. в эйлеровых и смешанных эйлерово-лагранжевых (с.э.л.) переменных с консервативной аппроксимацией конвективного переноса полной, внутренней и кинетической энергии, массы и импульса. Такие схемы названы "полностью консервативными" [9] или схемами "со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков" [13,14]. Класс схем с указанными свойствами достаточно широк и включает в себя как схемы с произвольным наперед заданным порядком аппроксимации на достаточно гладких решениях, так и схемы с аппроксимацией конвективных производных "вверх по потоку" [13,14].

Одной из основных отличительных черт полностью консервативных разностных схем (п.к.р.с.) является отсутствие в их первом дифференциальном приближении [15] членов, соответствующих сдвиговой вязкости. Аппроксимационная вязкость в таких схемах представляется только объемной составляющей. Ясно, что это обстоятельство должно играть важную роль при расчетах многомерных течений, в особенности тех из них, которые характеризуются переходом от ламинарного режима к турбулентному.

Возможности достаточно полного теоретического анализа нелинейных разностных схем сильно ограничены, поэтому основой изучения свойств п.к.р.с. является, в настоящее время, эмпирическое или полуэмпирическое исследование их особенностей на решении одно- и двумерных тестовых задач.

В настоящей работе рассмотрен новый класс частично трехслойных полностью консервативных разностных схем газовой динамики с односторонней аппроксимацией конвективных потоков для расчета двумерных течений в эйлеровых переменных. Для исследования влияния на результаты численного решения сдвиговой вязкости последняя включена в разностные схемы в явном виде.

Некоторые из свойств предложенных разностных схем иллюстрируются на ряде тестовых расчетов.

## п. I УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

Уравнения газовой динамики с учетом тензора вязких напряжений в случае двух пространственных измерений могут быть записаны в виде:

$$x^{l-1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial x^{l-1} \rho u}{\partial x} + \frac{\partial x^{l-1} \rho v}{\partial y} = 0 \quad (I)$$

$$x^{\ell-1} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial x^{\ell-1} \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} \rho u v}{\partial y} = -x^{\ell-1} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \mathcal{F}^{(x)} \quad (2)$$

$$x^{\ell-1} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial x^{\ell-1} \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} \rho v v}{\partial y} = -x^{\ell-1} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \mathcal{F}^{(y)} \quad (3)$$

$$x^{\ell-1} \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial x^{\ell-1} \rho \epsilon u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} \rho \epsilon v}{\partial y} = -P^* \left( \frac{\partial x^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} v}{\partial y} \right) + R \quad (4)$$

$$P = \mathcal{P}(\rho, \epsilon) \quad (5)$$

где

$$\mathcal{F}^{(x)} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( x^{\ell-1} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ x^{\ell-1} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (6)$$

$$\mathcal{F}^{(y)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^{\ell-1} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( x^{\ell-1} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$P^* = P - \left( \xi - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{x^{\ell-1}} \left( \frac{\partial x^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} v}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$R = \mu x^{\ell-1} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Здесь  $\rho$  - плотность,  $\epsilon$  - удельная внутренняя энергия,  $P$  - давление;  $u$ ,  $v$  - компоненты вектора скорости по осям  $x$  и  $y$  соответственно,  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости,  $\xi$  - коэффициент объемной вязкости,  $\ell$  - целочисленный параметр, равный единице в случае плоской симметрии и двойке - в осесимметричном случае,  $R$  - диссипативная функция.

Уравнения (1) - (3) представляют собой законы сохранения массы и импульса; отношение (4) - уравнение баланса внутренней энергии.

## п.2 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

Умножая (1) на  $-(u^2 + v^2)/2$ , (2) и (3) на  $u$  и  $v$  соответственно и складывая результаты приходим к уравнению баланса кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
 X^{\ell-1} \frac{\partial \rho E^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial X^{\ell-1} \rho E^{(k)} u}{\partial x} + \frac{\partial X^{\ell-1} \rho E^{(k)} v}{\partial y} = \\
 = -X^{\ell-1} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial x} u + \frac{\partial \rho^*}{\partial y} v \right) + \mathcal{F} u + \mathcal{F} v
 \end{aligned} \quad (10)$$

где  $E^{(k)} = (u^2 + v^2) / 2$

Уравнение баланса внутренней энергии (4) совместно с (10) приводит к закону сохранения полной энергии

$$\begin{aligned}
 X^{\ell-1} \frac{\partial \rho E^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial X^{\ell-1} \rho E^{(n)} u}{\partial x} + \frac{\partial X^{\ell-1} \rho E^{(n)} v}{\partial y} = - \left( \frac{\partial \rho^* X^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial \rho^* X^{\ell-1} v}{\partial y} \right) + \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ X^{\ell-1} \mu \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial x} + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ X^{\ell-1} \mu \left[ 2v \frac{\partial v}{\partial y} + u \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (11)$$

Систему разностных уравнений, аппроксимирующую (I)-(4), будем называть полностью консервативной [9], если разностные аналоги конвективных производных в левых частях этих уравнений и выражений  $\mathcal{F}^{(x)}$  и  $\mathcal{F}^{(y)}$  будут дивергентными и если из аппроксимаций уравнений (I)-(4) посредством алгебраических преобразований можно получить разностный аналог закона сохранения полной энергии (II), также представимый в дивергентном виде.

### п.3 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

На плоскости  $(x, y)$  рассмотрим прямоугольную разностную сетку, со сторонами  $h_x = \text{const}$  и  $h_y = \text{const}$ , параллельными соответствующим координатным осям (рис. I). Значения всех термодинамических величин, таких как  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $P$  и  $c$ , где  $c$  - адиабатическая скорость звука, будем относить к центрам рассматриваемой сетки, отмечаемым двумя дробными индексами (например  $\rho_{i+1/2, j+1/2}$ ,  $P_{i+1/2, j+1/2}$  и т.д.). Вектора скорости сплошной среды будем представлять разнесенными компонентами, каждая из которых относится к середине соответствующей стороны разностной ячейки (рис. I.)

Принятая дискретизация физических величин представляется весьма естественной и позволяет рассчитывать задачи аэродинамики в ступенчатых областях без выделения угловых точек (рис.1).



Рис.1

#### п.4 АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Закон сохранения массы (I) удобно аппроксимировать разностной схемой, записанной в потоковой форме:

$$\frac{(\hat{m}-m)_{i+1/2, j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho u)]_{i+1/2, j+1/2} - [F(\rho u)]_{i, j+1/2} + [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1} - [F(\rho v)]_{i+1/2, j} = 0 \quad (I')$$

здесь и далее  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$  - шаг по времени,  
 $f = f(t_n)$ ,  $\hat{f} = f(t_{n+1})$ ,  $\check{f} = f(t_{n-1})$ ,  $\tilde{f}^{(\sigma)} = \sigma \hat{f} + (1-\sigma)f$ ,  
 $\check{f}^{(\sigma)} = \sigma f + (1-\sigma)\hat{f}$ , где  $f$  - произвольная сеточная функция,  
 $m_{i+1/2, j+1/2} = V_{i+1/2, j+1/2} \cdot \rho_{i+1/2, j+1/2}$  - масса разностной ячейки,  
 $V_{i+1/2, j+1/2} = (x_i + x_{i+1})^{t-1} h_x h_y / 2$  - объем этой ячейки,  $[F(\rho u)]$  и  $[F(\rho v)]$  - потоки массы через соответствующие грани (рис.2), определяемые выражениями:

$$\left. \begin{aligned} [F(\rho u)]_{i+1, j+1/2} &= x_{i+1}^{t-1} h_y \rho_{i+1, j+1/2}^* \\ [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1} &= (x_i + x_{i+1})^{t-1} \cdot h_x \rho_{i+1/2, j+1}^* \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

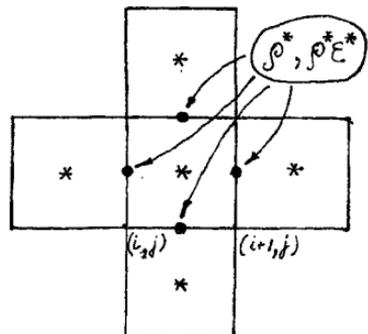


Рис.2

Таким образом свободным параметром в классе схем, задаваемых соотношением (I') является вид оператора проектирования множества сеточных функций, заданных в центрах разностных ячеек на множество функций, определенных в серединах их граней.

Определим этот оператор следующим образом:

$$\rho_{i+1, j+1/2}^* = \alpha \rho_{i+1, j+1/2}^{(II)} + (1-\alpha) \rho_{i+1, j+1/2}^{(I)}$$

$$\rho_{i+1/2, j+1}^* = \alpha \rho_{i+1/2, j+1}^{(II)} + (1-\alpha) \rho_{i+1/2, j+1}^{(I)}$$

$$\rho_{i+1, j+1/2}^{(II)} = (\rho_{i+3/2, j+1/2} + \rho_{i+1/2, j+1/2}) / 2$$

$$\rho_{i+1/2, j+1}^{(II)} = (\rho_{i+1/2, j+3/2} + \rho_{i+1/2, j+1/2}) / 2$$

$$\rho_{i+1, j+1/2}^{(I)} = \rho_{i+3/2, j+1/2} + \Theta(U_{i+1, j+1/2})(\rho_{i+1/2, j+1/2} - \rho_{i+3/2, j+1/2})$$

$$\rho_{i+1/2, j+1}^{(I)} = \rho_{i+1/2, j+3/2} + \Theta(V_{i+1/2, j+1})(\rho_{i+1/2, j+1/2} - \rho_{i+1/2, j+3/2})$$

где  $\Theta(x)$  - функция Хевисайда,  $\alpha > 0$  - параметр, оптимальная величина которого находится либо экспериментально, либо из анализа дисперсионных свойств линеаризованной системы разностных уравнений. При  $\alpha \neq 1$  выражение (I') аппроксимирует исходное уравнение (I) с порядком  $o(\tau, h_x, h_y)$ , при  $\alpha = 1$  - с порядком  $o(\tau, h_x^2, h_y^2)$ . Случай  $\alpha = 0$  соответствует методу "донорных ячеек" [16].

## п.5 ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ

Система разностных уравнений, аппроксимирующая (I) - (4) будет полностью консервативной лишь в том случае, если аппроксимации выражений  $\mathcal{F}^{(x)}$ ,  $\mathcal{F}^{(y)}$  и  $R$  будут в определенном смысле взаимосогласованными. В явном виде условие такой согласованности будет выписано в п.8.

Наличие связи между указанными аппроксимациями говорит о том, что не все они могут выбираться независимо. Ниже будет пока-

зано, что разностные аналоги выражений  $\mathcal{F}^{(x)}$  и  $\mathcal{F}^{(y)}$  полностью определяются способом аппроксимации диссипативной функции  $R$ . Аппроксимируем  $R$  разностным выражением:

$$R_{i+1/2, j+1/2}^{(h)} = 0,5 (X_i^{l-1} + X_{i+1}^{l-1}) M_{i+1/2, j+1/2} \left\{ \mathcal{F}_{i+1/2, j+1/2} + \right. \\ \left. + 0,25 [(\check{Z} Z)_{i,j} + (\check{Z} Z)_{i+1, j} + (\check{Z} Z)_{i+1, j+1} + (\check{Z} Z)_{i, j+1}] \right\} \quad (14)$$

где

$$Q_{i+1/2, j+1/2} = 2 \left[ (\check{U}_{i+1, j+1/2} - \check{U}_{i, j+1/2}) (U_{i+1, j+1/2} - U_{i, j+1/2}) / h_x^2 + \right. \\ \left. + (\check{V}_{i+1/2, j+1} - \check{V}_{i+1/2, j}) (V_{i+1/2, j+1} - V_{i+1/2, j}) / h_y^2 \right];$$

$$Z_{i,j} = (U_{i, j+1/2} - U_{i, j-1/2}) / h_y + (V_{i+1/2, j} - V_{i-1/2, j}) / h_x$$

#### п.6 АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

Разностный аналог уравнения (4) запишем в виде:

$$\frac{(\hat{m}\hat{E} - mE)_{i+1/2, j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho\epsilon U)]_{i+1/2, j+1/2} - [F(\rho\epsilon U)]_{i, j+1/2} + \\ + [F(\rho\epsilon V)]_{i+1/2, j+1} - [F(\rho\epsilon V)]_{i+1/2, j} = - (A_{i+1/2, j+1/2} - R_{i+1/2, j+1/2}^{(h)}) h_x h_y \quad (4')$$

где:

$$A_{i+1/2, j+1/2} = P_{i+1/2, j+1/2}^* [D(U, V)]_{i+1/2, j+1/2} (X_{i+1}^{l-1} + X_i^{l-1}) / 2 \quad (15)$$

$$[D(U, V)]_{i+1/2, j+1/2} = \frac{2}{(X_{i+1}^{l-1} + X_i^{l-1})} \left[ \frac{X_{i+1}^{l-1} U_{i+1, j+1/2} - X_i^{l-1} U_{i, j+1/2}}{h_x} + \right. \\ \left. + 0,5 (X_i^{l-1} + X_{i+1}^{l-1}) \left( \frac{V_{i+1/2, j+1} - V_{i+1/2, j}}{h_y} \right) \right] \quad (16)$$

$$P_{i+1/2, j+1/2}^* = \mathcal{P}(\rho_{i+1/2, j+1/2}, \epsilon_{i+1/2, j+1/2}) - \left\{ \left( \xi - \frac{2}{3} M \right) [D(U, V)] \right\}_{i+1/2, j+1/2} \quad (17)$$

Потоки внутренней энергии через границы разностной ячейки определим выражениями:

$$\left. \begin{aligned} [F(\rho \epsilon u)]_{i+1, j+1/2} &= \chi_{i+1}^{\epsilon-1} h_y (\rho \epsilon)_{i+1, j+1/2}^* \\ [F(\rho \epsilon v)]_{i+1/2, j+1} &= 0,5 (\chi_{i+1}^{\epsilon-1} + \chi_i^{\epsilon-1}) h_x (\rho \epsilon)_{i+1/2, j+1}^* \end{aligned} \right\} (18)$$

Здесь, как и при аппроксимации уравнения неразрывности, свободным параметром является вид оператора проектирования одного множества сеточных функций на другое (Рис.2). Как и в п.4 определим этот оператор соотношениями (13), в которых, в данном случае, идентификатор  $\rho$  следует заменить на  $(\rho \epsilon)$ .

При  $\alpha \neq 1$  выражение (4') аппроксимирует исходное уравнение (4) с порядком  $o(\tau, h_x, h_y)$  при  $\alpha = 1$  - с порядком  $o(\tau, h_x^2, h_y^2)$ .

#### п.7 РАЗНОСТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

На рис.3 и рис.4 изображены шаблоны, на которых аппроксимируются динамические уравнения (2) и (3) соответственно. Контуры ABCD, на обоих рисунках, обозначают контрольные объемы, по которым происходит осреднение составляющих импульса и в серединах сторон которых определяются соответствующие конвективные потоки.

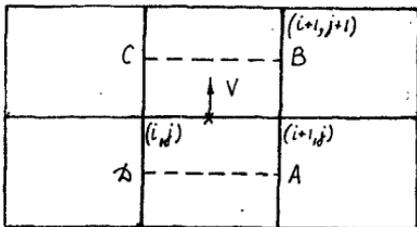


Рис.4

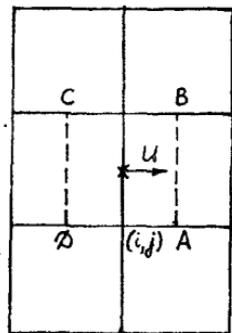


Рис.3

Аппроксимируем уравнения (2), (3) разностными выражениями:

$$\begin{aligned} & \frac{(\hat{W}^{(x)} - W^{(x)})_{i,j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho uu)]_{i+1/2,j+1/2} - [F(\rho uu)]_{i-1/2,j+1/2} + \\ & + [F(\rho uv)]_{i,j+1} - [F(\rho uv)]_{i,j} = -X_i^{l-1} h_y (P_{i+1/2,j+1/2}^* - P_{i-1/2,j+1/2}^*) + \\ & + [F^{(x)}]_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (2')$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\hat{W}^{(y)} - W^{(y)})_{i+1/2,j}}{\tau_n} + [F(\rho vv)]_{i+1/2,j+1/2} - [F(\rho vv)]_{i+1/2,j-1/2} + \\ & + [F(\rho vu)]_{i+1,j} - [F(\rho vu)]_{i,j} = -0,5 (X_{i+1}^{l-1} + X_i^{l-1}) \cdot \\ & \cdot (P_{i+1/2,j+1/2}^* - P_{i+1/2,j-1/2}^*) + [F^{(y)}]_{i+1/2,j} \end{aligned} \quad (3')$$

Здесь

$$\hat{W}_{i,j+1/2}^{(x)} = (\hat{M}U^{(0,5)})_{i,j+1/2}; \quad \hat{W}_{i+1/2,j}^{(y)} = (\hat{M}V^{(0,5)})_{i+1/2,j}; \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_{i,j+1/2} &= 0,5 (\hat{m}_{i+1/2,j+1/2} + \hat{m}_{i-1/2,j+1/2}) \\ M_{i+1/2,j} &= 0,5 (\hat{m}_{i+1/2,j+1/2} + \hat{m}_{i+1/2,j-1/2}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$[F^{(x)}]_{i,j+1/2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial U_{i,j+1/2}}; \quad [F^{(y)}]_{i+1/2,j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial V_{i+1/2,j}} \quad (21)$$

$$\Phi = \sum_{i,j \in \omega} R_{i+1/2,j+1/2}^{(h)}; \quad (22)$$

$\omega$  - множество левых нижних узлов всех ячеек разностной сетки.

Конвективные потоки составляющих импульса, входящие в (2'), (3') будут определены позднее.

Следует отметить, что в отличие от (1') и (4') уравнения

(2'), (3') оказываются частично трехслойными, поскольку помимо величин, определенных на  $(n+1)$ -ом и  $n$ -ом слоях в них входят скорости с  $(n-1)$ -го временного слоя.

#### п.8 УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ КОНСЕРВАТИВНОСТИ

Система разностных уравнений (1') - (4'), совместно с равенствами (12) - (22), определяющими входящие в (1') - (4') величины, окажется замкнутой, если каким либо образом задать выражения для конвективных потоков импульса в уравнениях (2'), (3'). При этом, в силу потоковой формы записи уравнений (1') - (4'), разностные аналоги всех конвективных производных, стоящих в левых частях (1') - (4') в любом случае останутся дивергентными. Кроме того можно относительно легко показать, что выражения  $[F^{(x)}]_{i,j+1/2}$  и  $[F^{(y)}]_{i+1/2,j}$  также дивергентны.

Таким образом, исходя из определения, приведенного в п.2, можно сказать, что разностные уравнения (1') - (4') будут полностью консервативными, если из них алгебраическими преобразованиями можно получить разностный аналог закона сохранения полной энергии (II), представимый в дивергентном виде.

Для того, чтобы уравнения (1') - (4') обладали свойством полной консервативности, достаточно выполнения следующих условий:

а) выражения

$$\begin{aligned} [L(u, \check{u}, v, \check{v})]_{i+1/2, j+1/2} &= R_{i+1/2, j+1/2}^{(k)} + 0,5 \{ (u[F^{(x)}])_{i, j+1/2} + \\ &+ (u[F^{(x)}])_{i+1, j+1/2} + (v[F^{(y)}])_{i+1/2, j} + (v[F^{(y)}])_{i+1/2, j+1} \} \end{aligned} \quad (23)$$

должны быть дивергентными;

б) конвективные потоки импульса в (2'), (3') должны быть связаны с конвективными потоками массы соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} [F(\rho u u)]_{i+1/2, j+1/2} &= \{ ([F(\rho u)]_{i+1, j+1/2} + [F(\rho u)]_{i, j+1/2}) \cdot \\ &\cdot (u_{i+1, j+1/2} + u_{i, j+1/2}) \} / 4 \\ [F(\rho u v)]_{i, j} &= \{ ([F(\rho v)]_{i+1/2, j} + [F(\rho v)]_{i-1/2, j}) \cdot \\ &\cdot (u_{i, j+1/2} + u_{i, j-1/2}) \} / 4 \end{aligned} \right\} (24)$$

$$\left. \begin{aligned} [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1/2} &= \{ [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1} + [F(\rho v)]_{i+1/2, j} \} \cdot \\ &\quad (V_{i+1/2, j+1} + V_{i+1/2, j}) / 4 \\ [F(\rho v)]_{i, j} &= \{ [F(\rho v)]_{i, j+1/2} + [F(\rho v)]_{i, j-1/2} \} \cdot \\ &\quad (V_{i+1/2, j} + V_{i-1/2, j}) / 4 \end{aligned} \right\} (25)$$

Докажем это утверждение.

Спроектируем уравнение неразрывности (I') на боковые ребра разностных ячеек:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{M} - M)_{i, j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho u)]_{i+1/2, j+1/2} - [F(\rho u)]_{i-1/2, j+1/2} + \\ + [F(\rho v)]_{i, j+1} - [F(\rho v)]_{i, j} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{M} - M)_{i+1/2, j}}{\tau_n} + [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1/2} - [F(\rho v)]_{i+1/2, j-1/2} + \\ + [F(\rho u)]_{i+1, j} - [F(\rho u)]_{i, j} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} [F(\rho u)]_{i+1/2, j+1/2} &= 0,5 \{ [F(\rho u)]_{i+1, j+1/2} + [F(\rho u)]_{i, j+1/2} \} \\ [F(\rho v)]_{i, j} &= 0,5 \{ [F(\rho v)]_{i+1/2, j} + [F(\rho v)]_{i-1/2, j} \} \end{aligned} \right\} (26')$$

$$\left. \begin{aligned} [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1/2} &= 0,5 \{ [F(\rho v)]_{i+1/2, j+1} + [F(\rho v)]_{i+1/2, j} \} \\ [F(\rho u)]_{i, j} &= 0,5 \{ [F(\rho u)]_{i, j+1/2} + [F(\rho u)]_{i, j-1/2} \} \end{aligned} \right\} (27')$$

Умножая (26) на  $-(U_{i, j+1/2}^2) / 2$  и складывая результат с уравнением (26'), умноженным на  $U_{i, j+1/2}$ , с учетом (24) получаем:

$$\frac{(\hat{E}^{(u)} - E^{(u)})_{i,j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho u^2/2)]_{i+1/2,j+1/2} - [F(\rho u^2/2)]_{i-1/2,j+1/2} +$$

$$+ [F(\rho u^2 v/2)]_{i,j+1} - [F(\rho u^2 v/2)]_{i,j} = -u_{i,j+1/2} X_i^{\ell-1} \cdot$$

$$(P_{i+1/2,j+1/2}^* - P_{i-1/2,j+1/2}^*) \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_{i,j+1/2}^{(u)} &= (\hat{M} \hat{u} u)_{i,j+1/2} / 2 \\ [F(\rho u^2/2)]_{i+1/2,j+1/2} &= \{ [F(\rho u)]_{i+1,j+1/2} + [F(\rho u)]_{i,j+1/2} \} \cdot \\ &\quad \cdot u_{i+1,j+1/2} \cdot u_{i,j+1/2} / 4 \\ [F(\rho u^2 v/2)]_{i,j} &= \{ [F(\rho v)]_{i+1/2,j} + [F(\rho v)]_{i-1/2,j} \} \cdot \\ &\quad \cdot u_{i,j+1/2} \cdot u_{i,j-1/2} / 4 \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

Аналогично, умножая (27) на  $-[v_{i+1/2,j}]^2/2$  и складывая с (3'), предварительно умноженным на  $v_{i+1/2,j}$ , при учете (25) находим:

$$\frac{(\hat{E}^{(v)} - E^{(v)})_{i+1/2,j}}{\tau_n} + [F(\rho v^2 v/2)]_{i+1/2,j+1/2} - [F(\rho v^2 v/2)]_{i+1/2,j-1/2} +$$

$$+ [F(\rho v^2 u/2)]_{i+1,j} - [F(\rho v^2 u/2)]_{i,j} = -v_{i+1/2,j} (X_{i+1}^{\ell-1} + X_i^{\ell-1}) \cdot$$

$$(P_{i+1/2,j+1/2}^* - P_{i+1/2,j-1/2}^*) / 2 \quad (29)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_{i+1/2,j}^{(v)} &= (\hat{M} \hat{v} v)_{i+1/2,j} / 2 \\ [F(\rho v^2 v/2)]_{i+1/2,j+1/2} &= \{ [F(\rho v)]_{i+1/2,j+1} + [F(\rho v)]_{i+1/2,j} \} \cdot \\ &\quad \cdot v_{i+1/2,j+1} \cdot v_{i+1/2,j} / 4 \end{aligned} \right\} \quad (29')$$

$$[F(\rho v^2 u/2)]_{i,j} = \left\{ [F(\rho u)]_{i,j+1/2} + [F(\rho u)]_{i,j-1/2} \right\} \cdot V_{i+1/2,j} \cdot V_{i-1/2,j} \quad (29')$$

Проектируя (28), (29) со вторым порядком в центры разностных ячеек и складывая результаты, приходим к разностному аналогу уравнения баланса кинетической энергии (10) :

$$\frac{(\hat{E}^{(k)} - E^{(k)})_{i+1/2,j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho \varepsilon^{(k)} u)]_{i+1,j+1/2} - [F(\rho \varepsilon^{(k)} u)]_{i,j+1/2} + [F(\rho \varepsilon^{(k)} v)]_{i+1/2,j+1} - [F(\rho \varepsilon^{(k)} v)]_{i+1/2,j} = Q_{i+1/2,j+1/2} \quad (10')$$

где

$$\hat{E}_{i+1/2,j+1/2}^{(k)} = 0,5 [\hat{E}_{i+1,j+1/2}^{(u)} + \hat{E}_{i,j+1/2}^{(u)} + \hat{E}_{i+1/2,j+1}^{(v)} + \hat{E}_{i+1/2,j}^{(v)}] \quad (30)$$

$$[F(\rho \varepsilon^{(k)} u)]_{i,j+1/2} = 0,5 \{ [F(\rho u^2 u/2)]_{i+1/2,j+1/2} + [F(\rho u^2 u/2)]_{i-1/2,j+1/2} + [F(\rho v^2 u/2)]_{i,j} + [F(\rho v^2 u/2)]_{i,j+1} \} \quad (31)$$

$$[F(\rho \varepsilon^{(k)} v)]_{i+1/2,j} = 0,5 \{ [F(\rho v^2 v/2)]_{i+1/2,j+1/2} + [F(\rho v^2 v/2)]_{i+1/2,j-1/2} + [F(\rho u^2 v/2)]_{i+1,j} + [F(\rho u^2 v/2)]_{i,j} \} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{i+1/2, j+1/2} = & 0,5 \{ (U[F^{(k)}])_{i, j+1/2} + (U[F^{(k)}])_{i+1, j+1/2} + \\
 & + (V[F^{(q)}])_{i+1/2, j} + (V[F^{(q)}])_{i+1/2, j+1} \} - \frac{1}{2} \{ U_{i, j+1/2} X_i^{e-1} \cdot \\
 & \cdot (P_{i+1/2, j+1/2}^* - P_{i-1/2, j+1/2}^*) + U_{i+1, j+1/2} X_{i+1}^{e-1} (P_{i+3/2, j+1/2}^* - P_{i+1/2, j+1/2}^*) + \\
 & + 0,5 (X_{i+1}^{e-1} + X_i^{e-1}) [V_{i+1/2, j} (P_{i+1/2, j+1/2}^* - P_{i+1/2, j-1/2}^*) + \\
 & + V_{i+1/2, j+1} (P_{i+1/2, j+3/2}^* - P_{i+1/2, j+1/2}^*)] \} \quad (33)
 \end{aligned}$$

Равенства (10') и (4') приводят к дискретному аналогу закона сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned}
 \frac{(\hat{E}^{(n)} - E^{(n)})_{i+1/2, j+1/2}}{\tau_n} + [F(\rho \varepsilon^{(n)} u)]_{i+1, j+1/2} - [F(\rho \varepsilon^{(n)} u)]_{i, j+1/2} + \\
 + [F(\rho \varepsilon^{(n)} v)]_{i+1/2, j+1} - [F(\rho \varepsilon^{(n)} v)]_{i+1/2, j} = - \{ [F(x^{e-1} p^* u)]_{i+1, j+1/2} - \\
 - [F(x^{e-1} p^* u)]_{i, j+1/2} + [F(x^{e-1} p^* v)]_{i+1/2, j+1} - [F(x^{e-1} p^* v)]_{i+1/2, j} \} + \\
 + [L(u, \check{u}, v, \check{v})]_{i+1/2, j+1/2} \quad (II')
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_{i+1/2, j+1/2}^{(n)} &= (\hat{E}^{(k)} + \hat{m} \hat{E})_{i+1/2, j+1/2} \\
 [F(\rho \varepsilon^{(n)} u)]_{i, j+1/2} &= \{ [F(\rho \varepsilon u)] + [F(\rho \varepsilon^{(k)} u)] \}_{i, j+1/2} \\
 [F(\rho \varepsilon^{(n)} v)]_{i+1/2, j} &= \{ [F(\rho \varepsilon v)] + [F(\rho \varepsilon^{(k)} v)] \}_{i+1/2, j} \\
 [F(x^{e-1} p^* u)]_{i, j+1/2} &= [U_{i, j+1/2} X_i^{e-1} (P_{i+1/2, j+1/2}^* + P_{i-1/2, j+1/2}^*)] / 2 \\
 [F(x^{e-1} p^* v)]_{i+1/2, j} &= [V_{i+1/2, j} (X_{i+1}^{e-1} + X_i^{e-1}) (P_{i+1/2, j+1/2}^* + P_{i+1/2, j-1/2}^*)] / 4
 \end{aligned}$$

Таким образом, если выражение (23) дивергентно, то дивергентно и уравнение (II').

Учитывая соотношения (14), (21), (22), можно показать, что:

$$[\mathcal{L}(u, \check{u}, v, \check{v})]_{i+1/2, j+1/2} = \Psi_{i+1, j+1/2} - \Psi_{i, j+1/2} + \Psi_{i+1/2, j+1} - \Psi_{i+1/2, j} \quad (34)$$

где

$$\Psi_{i, j+1/2} = (A_{i+1/2, j+1/2}^{(x)} + A_{i-1/2, j+1/2}^{(x)} + B_{i+1/2, j+1/2}^{(x)} + B_{i-1/2, j+1/2}^{(x)})/2$$

$$\Psi_{i+1/2, j} = (A_{i+1/2, j+1/2}^{(y)} + A_{i+1/2, j-1/2}^{(y)} + B_{i+1/2, j+1/2}^{(y)} + B_{i+1/2, j-1/2}^{(y)})/2$$

$$A_{i+1/2, j+1/2}^{(x)} = 0,5 \mu_{i+1/2, j+1/2} (X_{i+1}^{e-1} + X_i^{e-1}) (U_{i+1, j+1/2} - U_{i, j+1/2}) \cdot (U_{i+1, j+1/2} - U_{i, j+1/2}) \cdot h_y/h_x$$

$$A_{i+1/2, j+1/2}^{(y)} = 0,5 \mu_{i+1/2, j+1/2} (X_{i+1}^{e-1} + X_i^{e-1}) (V_{i+1/2, j+1} - V_{i+1/2, j}) \cdot (V_{i+1/2, j+1} - V_{i+1/2, j}) \cdot h_x/h_y$$

$$B_{i+1/2, j+1/2}^{(x)} = 0,5 \mu_{i+1/2, j+1/2} (X_{i+1}^{e-1} + X_i^{e-1}) [V_{i+1/2, j+1} (\check{Z}_{i+1, j+1} + \check{Z}_{i, j+1})/2 + V_{i+1/2, j} (\check{Z}_{i+1, j} + \check{Z}_{i, j})/2] h_y/2$$

$$B_{i+1/2, j+1/2}^{(y)} = 0,5 \mu_{i+1/2, j+1/2} (X_{i+1}^{e-1} + X_i^{e-1}) [U_{i+1, j+1/2} (\check{Z}_{i, j} + \check{Z}_{i, j+1})/2 + U_{i+1, j+1/2} (\check{Z}_{i+1, j} + \check{Z}_{i+1, j+1})/2] h_x/2$$

## п.9 НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что система разностных уравнений (1') - (4'), совместно с равенствами (12) - (22) и (24), (25), определяющими входящие в (1') - (4') величины, обладает свойством полной консервативности и является замкнутой.

Кроме системы разностных уравнений в постановку эволюционной

разностной задачи входят начальные данные и граничные условия.

Поскольку уравнения (I') - (4') частично трехслойные, в начальный момент  $t_0$  помимо величин  $\rho_{i+1/2, j+1/2}$ ,  $\epsilon_{i+1/2, j+1/2}$ ,  $U_{i, j+1/2}$ ,  $V_{i+1/2, j}$ ;  $(i, j) \in \omega$  следует каким либо образом задавать величины  $\check{U}_{i, j+1/2}$  и  $\check{V}_{i+1/2, j}$ . Тут можно поступить следующим образом: задавать величины  $U_{i, j+1/2}$ ,  $\check{V}_{i+1/2, j}$ ,  $\check{\rho}_{i+1/2, j+1/2}$  и  $\check{\epsilon}_{i+1/2, j+1/2}$  и сделать один шаг по времени, используя какую либо двухслойную консервативную разностную схему. После этого можно продолжать регулярные вычисления по схеме (I') - (4'). Однако, как показывает практика, подобная "стартовая" процедура с успехом может быть заменена на более простую. Результаты остаются практически неизменными, если при  $t_0$  положить  $\check{U}_{i, j+1/2} \equiv U_{i, j+1/2}$ ;  $\check{V}_{i+1/2, j} \equiv V_{i+1/2, j}$  и с самого начала вести расчеты по полностью консервативной разностной схеме (I') - (4').

Некоторые из возможных типов граничных условий для уравнений (I') - (4') рассмотрим на примере задачи об обтекании торца цилиндра однородным потоком вязкого газа. На рис.5 приведена ступенчатая область  $ABCGFE$ , прилегающая к части цилиндрического торца  $EFGD$  в которой ищется решение рассматриваемой задачи. Прямая  $AD$  является осью симметрии, переменная  $X$  играет роль радиуса.

Параметры невозмущенного набегающего потока: плотность, скорость и удельная внутренняя энергия - задаются на нижней границе  $AB$  рассматриваемой области. На отрезке оси симметрии  $AE$  следует задавать условия симметрии потока, на поверхности цилиндра условия прилипания, на границах  $BC$  и  $CG$  - условия свободного выхода потока за пределы области.

Для численной реализации указанных граничных условий удобно ввести множество вспомогательных (фиктивных) расчетных ячеек, окаймляющих соответствующие участки границ с наружной стороны области. На рис.5 эти ячейки нанесены пунктиром. Благодаря такому окаймлению реальные приграничные ячейки становятся внутренними, а вычислительный алгоритм - однородным. Граничные условия в этом случае определяются исключительно способом задания физических величин в фиктивных ячейках.

Рассмотрим различные типы граничных условий более подробно.

На неокаймленной границе  $AB$  задаются постоянные значения скоростей  $V_{i+1/2, 1}$ , а также потоки массы и внутренней энергии.

На границе  $AE$  (рис.6а) компоненты горизонтальной скорости полагаются равными нулю, а вертикальные компоненты скорости в фиктивных ячейках кладутся равными их значениям в соответствующих

ячейках внутреннего прилегающего слоя.

На другой вертикальной границе  $FG$  (рис.6,б), на которой задано условие прилипания, горизонтальные составляющие скорости также равны нулю, а вертикальные составляющие скорости в фиктивных ячейках берутся равными по модулю значениям соответствующих скоростей во внутренних прилегающих ячейках и противоположными им по знаку.

Более сложный тип граничных условий реализуется на открытой правой границе  $BC$  (рис.6,в) Здесь, помимо скоростей, в фиктивные ячейки следует заносить также величины плотностей и эффективных давлений  $\rho^*$ , которые можно полагать либо равными соответствующим величинам во внутренних прилегающих ячейках, либо находить посредством линейной экстраполяции по двум внутренним слоям. Горизонтальные составляющие скорости задаются такими, какими они получаются в результате вычислений по однородному алгоритму (при условии простого сноса этих компонент на правые грани фиктивных ячеек) если они направлены за пределы области, и полагаются равными нулю в противном случае. Последнее условие диктуется соображениями устойчивости.

Вертикальные составляющие скорости в фиктивных ячейках можно задавать равными соответствующим составляющим в прилегающих ячейках, однако такой простой снос приводит к возникновению значительной аппроксимационной вязкости вблизи границы  $BC$ . Этого нежелательного эффекта можно избежать, если, как это показано на рис.6 в) находить вертикальную составляющую скорости во вспомогательных ячейках линейной экстраполяцией в тех случаях, когда она приводит к увеличению скорости, и использовать простой снос, когда экстраполяция приводит к ее уменьшению.

На горизонтальной границе  $EF$  (рис.6 г) условие прилипания реализуется сносом в фиктивные ячейки горизонтальной составляющей скорости с противоположным знаком и обнулением вертикальных составляющих скоростей.

На горизонтальном участке  $CG$  открытой границы (рис.6г) граничные условия задаются способом, аналогичным описанному для участка границы  $BC$  с той, однако, разницей, что для определения горизонтальной составляющей скорости в фиктивных ячейках достаточно всегда использовать простой снос.

п.10 ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ. АНАЛИЗ АППРОКСИМАЦИОННОЙ  
ВЯЗКОСТИ

Для расчета ударных волн на реальных, т.е. достаточно грубых по сравнению с характерной длиной свободного пробега частиц рассматриваемого газа сетках, в разностные уравнения обычно вводят искусственную вязкость [1]. В нашем случае роль искусственной вязкости, при соответствующем выборе коэффициента  $\xi$ , будет играть входящая в уравнения (2') - (4') объемная, или, как еще ее иногда называют, "вторая вязкость" [16].

Величину  $\xi$  для каждой расчетной ячейки области определим выражением:

$$\xi_{i+1/2, j+1/2} = \frac{\alpha_0}{2} \frac{C_{i+1/2, j+1/2} \rho_{i+1/2, j+1/2} h_x h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \{1 - \text{SIGN}[\mathcal{D}(u, v)]\} \quad (35)$$

где  $C_{i+1/2, j+1/2} = \sqrt{\gamma(\gamma-1)} E_{i+1/2, j+1/2}$  - адиабатическая скорость звука,  $\alpha_0$  - безразмерная величина порядка единицы.

Практика расчетов показывает, что объемная вязкость с коэффициентом (35) при  $\alpha \in [0; 0,5]$  (см.п.4) и  $\alpha_0 \sim 1/2$  устраняет нефизические осцилляции газодинамических величин в окрестностях разрывов и приводит к размазыванию последних на более чем на 2+3 расчетные ячейки.

Рассмотрим Г-форму [15] первого дифференциального приближения (п.д.п.) уравнения (4') при  $u_{i, j+1/2} \geq 0$ ;  $v_{i+1/2, j} \geq 0$ ;

$$\xi_{i+1/2, j+1/2} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mu = 0 :$$

$$\begin{aligned} & X^{e-1} \frac{\partial pE}{\partial t} + \frac{\partial X^{e-1} pEu}{\partial x} + \frac{\partial X^{e-1} pEv}{\partial y} + p \left( \frac{\partial X^{e-1} u}{\partial x} + \frac{\partial X^{e-1} v}{\partial y} \right) = \\ & = - \frac{X^{e-1}}{2} \frac{\partial^2 pE}{\partial t^2} \tau + \frac{h_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( X^{e-1} u \frac{\partial pE}{\partial x} \right) + \frac{h_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( X^{e-1} v \frac{\partial pE}{\partial y} \right) + \\ & + o(h_x^2, h_y^2, \tau^2) \end{aligned} \quad (36)$$

Нашей целью будет выяснение наличия в  $\Pi$  - форме этого п.д.п. членов, эквивалентных диссипативной функции  $R$ , или хотя бы пропорциональных ее части, содержащей выражение  $(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2$ .

Дифференцируя (4) по времени, находим:

$$\begin{aligned}
 x^{\ell-1} \frac{\partial^2 \rho \epsilon}{\partial t^2} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x^{\ell-1} \rho \epsilon u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial x^{\ell-1} \rho \epsilon v}{\partial t} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{\partial x^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} v}{\partial y} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (37)$$

Вклад в недивергентную часть  $\Pi$ -формы п.д.п. может быть только последний член из правой части (37). Рассмотрим его более подробно.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{\partial x^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} v}{\partial y} \right) \right\} = & \frac{\partial \rho}{\partial t} \left( \frac{\partial x^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} v}{\partial y} \right) + \\
 & + \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( x^{\ell-1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( x^{\ell-1} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (38)$$

Из уравнений (I)-(4) с  $\mu \equiv \xi \equiv 0$  можно получить:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s \frac{d\rho}{dt} = -c^2 \rho \frac{1}{x^{\ell-1}} \left( \frac{\partial x^{\ell-1} u}{\partial x} + \frac{\partial x^{\ell-1} v}{\partial y} \right) \quad (39)$$

откуда определяем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c^2 \rho \operatorname{div} \vec{V} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} - v \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (40)$$

уравнения (2), (3), используя (I), легко привести к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (41)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (42)$$

Подставляя (40) - (42) в правую часть выражения (38), выпишем недивергентную его составляющую:

$$\begin{aligned}
 -c^2 \rho x^{\ell-1} (\operatorname{div} \vec{V})^2 + \frac{x^{\ell-1}}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 + 2\rho x^{\ell-1} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + 2\rho(\ell-1)u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \equiv ND
 \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом  $\Pi$  -форма п.д.п. уравнения (4') может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \chi^{\ell-1} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \chi^{\ell-1} \rho E U}{\partial x} + \frac{\partial \chi^{\ell-1} \rho E V}{\partial y} + \rho \chi^{\ell-1} \operatorname{div} \vec{V} = \\ = \tau_n N D / 2 + D + o(h_x^2, h_y^2, \tau_n^2) \end{aligned} \quad (44)$$

где  $D$  - множество выражений, порядка  $o(h_x, h_y, \tau_n)$ , представимых в дивергентном виде.

Легко видеть, что первый член выражения (43) может быть истолкован как работа сил отрицательной объемной вязкости, и что ни один из оставшихся членов не содержит комбинации  $(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2$ .

Поскольку система (1')-(4') консервативна, то этим же свойством должны обладать и все ее дифференциальные приближения (д.п.) Другими словами при надлежащем выборе точек разложения, из д.п. уравнений (1')-(4') с помощью обычной процедуры, описанной в п.2 могут быть получены соответствующие д.п. уравнения изменения полной энергии (II'), представимые в дивергентном виде. И если уравнение (44) не содержит членов, отвечающих сдвиговой аппроксимационной вязкости, то в силу дивергентности п.д.п. уравнения (I'), аппроксимационная сдвиговая вязкость будет отсутствовать и в п.д.п. уравнений (2'), (3').

Фурье-анализ акустического приближения уравнений (1')-(4') в одномерном случае на фоне постоянного течения позволяет сделать вывод, что при  $\alpha_0 \in [0; 0,5]$ ,  $\alpha \in [0; 0,5]$  необходимое условие устойчивости этих уравнений практически эквивалентно условию Куранта [14].

## п. II ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Свойства полностью консервативных разностных схем (1') - (4') проверялись на ряде одномерных и двумерных тестовых задач.

Ниже приведены некоторые из этих расчетов.

Для иллюстрации качества схем (1') - (4') в одномерном приближении рассмотрим три задачи: задачу о распаде разрыва слабой интенсивности, задачу о распаде разрыва большой интенсивности и авторемодельную задачу о распространении ударной волны по холодному фону с экспоненциально нарастающей плотностью [19]. Все они соответствуют случаю плоской ( $\ell = 1$ ) симметрии. Параметры первых двух из этих задач взяты из работы [8].

Распад разрыва слабой интенсивности.

В момент  $t_0$ , в покоящейся среде с постоянной плотностью  $\rho = 1$  и показателем политропы  $\gamma = 1,4$ , в точке  $x_0$  задан разрыв поля давления  $P$ . Слева от точки  $x_0$ ,  $P_n = 2$ ; справа -  $P_n = 1$ . Состояние среды во все последующие моменты времени  $t > t_0$  описывается стационарными профилями всех газодинамических величин, рассматриваемых как функции автомодельной переменной  $\eta = (x - x_0)/(t - t_0)$

Автомодельные профили характеризуются несколькими основными параметрами: скоростью фронта ударной волны  $V_{ув}$ , распространяющейся вправо от точки  $x_0$ , скоростью контактного разрыва  $V_{кр}$ , и скоростями левой  $V_\lambda$  и правой -  $V_n$  границ веера волны разрежения. В рассматриваемом случае  $V_{ув} = 1,41$ ;  $V_{кр} = 0,35$ ;  $V_n = -1,26$ ;  $V_\lambda = -1,67$ . Автомодельное поле плотностей, изображенное сплошными линиями на рис.7, описывается величинами  $\rho_{n\eta}(\eta > V_{ув})$ ,  $\rho_{ув}(\eta < V_{ув})$ ;  $\rho_{n\eta}(\eta < V_\lambda < \eta < V_{кр})$  и  $\rho_\lambda(\eta \leq V_\lambda)$  принимающими следующие значения:  $\rho_n = \rho_\lambda = 1$ ;  $\rho_{ув} = 1,33$ ;  $\rho_{n\eta} = 0,81$ .

Задача о распаде разрыва большой интенсивности отличается от предыдущей только значениями начальных параметров:  $P_\lambda = 480$ ;  $\rho_\lambda = 8$ ;  $P_n = 1$ ;  $\rho_n = 1$ ;  $\gamma = 5/3$ . Начальные скорости по обе стороны разрыва также полагаются равными нулю.

Автомодельный профиль плотности, изображенный на рис.8 сплошными линиями, определяется величинами:  $V_{ув} = 11,24$ ;  $V_{кр} = 8,32$ ;  $V_n = 1,1$ ;  $V_\lambda = -10$ ;  $\rho_{ув} = 3,85$ ;  $\rho_{n\eta} = 3,01$ .

Распространение ударной волны по фону с экспоненциально нарастающей плотностью.

По холодному ( $\epsilon = 0$ ) фону с  $\gamma = 2$  и переменной плотностью распространяется разрыв газодинамических величин. При  $t_0$  распределения скорости, внутренней энергии и плотности задаются выражениями:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \geq x_0 \\ \Delta(1-\eta)/t_0, & \text{при } x < x_0 \end{cases}$$

$$E(x, t_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \geq x_0 \\ (\Delta/t_0)^2(1+2\eta)/2, & \text{при } x < x_0 \end{cases}$$

$$\rho(x, t_0) = \begin{cases} \rho_0 \exp[(x-x_0)/\Delta], & \text{при } x \geq x_0 \\ 3\rho_0(1+2\eta)^{-5/2}, & \text{при } x < x_0 \end{cases}$$

где  $\eta = (x_0 - x) / \Delta$ ,  $x_0$  - положение разрыва в момент  $t_0$ ,  $\rho_0$  - невозмущенная фоновая плотность при  $x_0$ ,  $\Delta$  - масштаб длины.

В каждый последующий момент времени  $t \geq t_0$  положение разрыва будет определяться формулой

$$x_F(t) = x_0 + (3/2) \Delta \ln(t/t_0)$$

а распределение плотности имеет вид:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 \exp[(x-x_0)/\Delta], & x \geq x_F(t) \\ 3\rho(x_F)[1+2(x_F-x)/\Delta]^{-5/3}, & x < x_F(t) \end{cases}$$

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ОДНОМЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

Задачи о распаде разрывов решались на разностной сетке с шагом  $h=1$ . На рис.7 изображены профили плотности, полученные на момент  $t = 25$  при численном решении первой задачи по различным алгоритмам: методу Годунова (рис.7 а), по программе SHASTX (рис.7 б) [18], методу Жмакина-Фурсенко (рис.7 в) и по частично трехслойным полностью консервативным разностным схемам (I') - (4') (рис.7г). В последнем случае расчет проводился с параметрами  $\alpha = 0,5$ ;  $\alpha_0 = 0,3$ ;  $\tau = 0,1$ .

Сравнение этих результатов показывает, что п.к.р.с. (I') - (4') оставляя профиль плотности "монотонным", практически точно передает веер слабой волны разрежения и размазывает фронт ударной волны и контактный разрыв меньше, чем схема Годунова.

На рис.8 приведены результаты аналогичных расчетов задачи о распаде разрыва большой интенсивности на момент  $t = 4$ . Вычисления по схеме (I') - (4') велись с шагом  $\tau = 0,02$ ;  $\alpha_0 = 0,3$  при различных величинах параметра  $\alpha$ . Штриховая линия (рис.8а) соответствует  $\alpha = 0$ , пунктир -  $\alpha = 0,5$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что метод (I') - (4') при  $\alpha = 0,5$  практически не уступает схеме Жмакина-Фурсенко (рис.7г, 8г) на ударных волнах и контактных разрывах и с большей точностью передает веер волны разрежения.

Следует также отметить, что метод (I') - (4') оказывается и наиболее экономичным из рассмотренных по затратам машинного времени, поскольку он одношаговый и не требует дополнительного анализа

..... физических величин и последующей коррекции потоков.

Пожалуй наиболее сильно эффект полной консервативности уравнений (1') - (4') проявился на задаче о распространении ударной волны по фону с нарастающей плотностью, внимание к которой было привлечено после выхода в свет работы [20], где было показано, что отсутствие определенной согласованности между аппроксимациями различных уравнений газовой динамики при численном решении этой задачи приводит к удручающе плохим результатам.

На рис.9 приведено сравнение аналитического решения последней задачи с результатами расчета по схеме (1')-(4') на моменты времени  $t = 2; 4; 8$ . Вычисления проводились при следующих параметрах:  $t_0 = 2$ ;  $X_0 = 6$ ;  $\rho_0 = 1$ ;  $\Delta = 4$ ;  $h = 0,1$ ;  $\epsilon = 0,01$ ,  $x_0 = 0,3$   $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0,5$ . Штриховая линия соответствует  $\alpha = 0$ , пунктир -  $\alpha = 0,5$ .

На графике хорошо видно, что разрыв размазывается только на одну ячейку и при  $\alpha = 0,5$  высота пика разностного решения отклоняется от точного значения на величину, определяемую в основном точностью проектирования аналитического решения на заданную разностную сетку. Сравнение этого результата с приведенными в [20, 22] говорит о важности свойства полной консервативности для аккуратного расчета течений с сильно неоднородным распределением параметров газодинамических величин.

Особенности п.к.р.с. (1') - (4'), появляющиеся при переходе к двум пространственным измерениям изучались на задаче об обтекании торца цилиндра однородным потоком вязкого газа, постановка которой, включающая подробное описание граничных условий, была рассмотрена в п.9.

Область ABCGFE (рис.5), в которой рассматривалось течение, имела параметры:  $R_{EF} = 1$ ,  $R_{AB} = 3$ ,  $L_{BC} = 6$ ,  $L_{FG} = 3$ , где  $R_{EF}$  - радиус цилиндра,  $R_{AB}$  - расстояние от оси симметрии области до наружной границы BC,  $L_{BC}$  - длина области вдоль оси  $Y$ ,  $L_{FG}$  - длина образующей цилиндра. Вертикальная составляющая скорости на границе AB всегда поддерживалась равной единице, плотность втекающего газа также задавалась единичной, величина удельной внутренней энергии на входе AB определялась по заданному числу Маха  $M$ , показатель политропы соответствовал воздуху ( $\gamma = 1,4$ ).

При выбранных масштабах величин, близких к рассматриваемым в [7], характерное время пролета газа через область ABCGFE (рис.5) вдоль осу  $Y$  составляет шесть единиц. Типичные расчеты проводи-

лись до времени  $t \sim 40$  при различных условиях на границах  $EF$  и  $FG$ , различных числах Маха, коэффициентах сдвиговой вязкости  $\mu \in [0, h_x]$  и числах Куранта.

Начальные условия полагались равными значениям соответствующих величин в набегающем невозмущенном потоке.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ДВУМЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

Основной целью двумерных расчетов было выяснение влияния величины коэффициента сдвиговой вязкости  $\mu$  на характер процесса обтекания цилиндра. Вычисления проводились на относительно "грубой" сетке с числом реальных узлов  $25 \times 37$ , так что на торец цилиндра приходилось 8 ячеек, а на всю его длину - 18.

Расчеты показали, что при  $\mu = 0$ , при всех рассматриваемых числах Маха набегающего потока в интервале от 0,9 до 14,5 наблюдалось развитие неустойчивости. Неустойчивость развивалась не сразу, а по прошествии времени порядка нескольких характерных единиц и была локализована в местах больших скоростей сдвиговой деформации, т.е. на фронте формирующейся головной ударной волны или вблизи поверхности цилиндра. Любопытно отметить, что уменьшение временного шага в десятки раз не приводило к видимому изменению момента возникновения неустойчивости  $t^*$ .

При  $\mu = h_x/10$  указанная неустойчивость не наблюдалась, фронт головной ударной волны при  $M > 1,5$  размазывался на 1-2 расчетные ячейки и характер течения существенно зависел от граничных условий на цилиндре.

На рис. 10, 11, для случая  $M = 3$ , изображены графики линий уровня величин  $\rho$  и  $\epsilon$  на момент  $t = 48$ , соответствующие условиям непротекания на границах  $EF$  и  $FG$  (рис. 5). На рис. 12, 13 представлены графики тех же величин, полученные при условиях прилипания на поверхности цилиндра. Сравнение рис. 11 и рис. 13 показывает, что в последнем случае формируется хорошо различимый пограничный слой.

При условиях непротекания (рис. 11) зоны заметного торможения вблизи боковой поверхности цилиндра и связанного с этим увеличения внутренней энергии газа не наблюдается. Более того, не наблюдается также и тенденции к установлению процесса обтекания - за ударной волной постоянно формируются и сносятся по течению нестационарные вихревые движения.

На рис. 14 приведен график линий уровня удельной внутренней энергии  $\epsilon$  при  $\mu = h_x$ . Сравнение рис. 14 и рис. 13 показывает,

что при увеличении  $\mu$  толщина погранслоя ощутимо возрастает.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотренные в работе полностью консервативные разностные схемы газовой динамики в эйлеровых переменных:

- при расчете газодинамических течений не приводят к возникновению нефизических осцилляций вычисляемых величин;
- в окрестностях ударных волн и контактных разрывов практически не уступают по качеству схеме Жмакина-Фурсенко [8] и с большой точностью передают веер волн разрежения;
- существенно лучше других схем (см. например, [20], [21], [22]) воспроизводят решение автомодельной задачи о распространении ударной волны по холодному фону с экспоненциально нарастающей плотностью [19], что говорит о важности свойства полной консервативности для аккуратного решения задач с подобными особенностями;
- являются одними из наиболее экономичных по затратам машинного времени на один временной шаг и не требуют предварительной процедуры "настройки параметров" характерной для ряда других схем;
- не содержат аппроксимационной сдвиговой вязкости, что делает возможным численное моделирование аэродинамических режимов обтекания, характеризующихся переходом от ламинарного течения к турбулентному, на относительно "грубых" расчетных сетках.

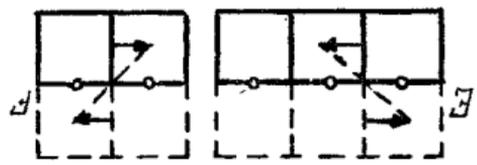
Условия полной консервативности, сформулированные в виде ограничений (24), (25) на выражения для конвективных потоков импульса, оставляют полную свободу в выборе аппроксимации конвективных потоков массы и внутренней энергии. Это, в частности, позволяет:

- обобщить схемы (1') - (4') на случай прямоугольных сеток с переменными шагами  $h_x$  и  $h_y$ ;
- для определения конвективных потоков массы и внутренней энергии использовать нелинейные аппроксимации третьего порядка точности [24] или различные модификации процедуры "коррекции потоков", [18, 23, 14].
- методом, аналогичным использованному в [25] для схемы FLIC [26] распространить описанный алгоритм на двумерные области с криволинейными границами.

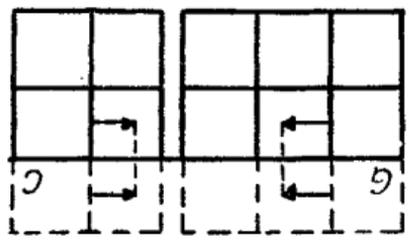
Авторы благодарны Чернову С.Ю. за помощь в машинной обработке приведенной в работе графической информации.

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., "Наука", 1980, 353 с.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. ДАН СССР, т.235, № 6, 1977, с.1285-1288.
3. Головизнин В.М., Коршунов В.К., Самарский А.А. ЖВМиМФ, т.22, № 4, 1982, с.926-942.
4. Lax P.D., Wendroff B. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 1966, vol. 13, pp. 217-237
5. Годунов С.К. Матем.об., 1959, 47 (89), 271-306.
6. Mac-Cormack R.W. *AIAA Paper*, pp. 69-356, 1969
7. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. ЖВМиМФ, т.11, 1971, №1, с.182-207.
8. Жмакин А.И., Фурсенко А.А. ЖВМиМФ, т.20, № 4, 1980, с.1021-1031.
9. Попов Ю.П., Самарский А.А. ЖВМиМФ, 1970, № 10, № 3, с.773-779.
10. Кузьмин А.В., Макаров В.Л., Меладзе Г.В. ЖВМиМФ, 1980, т.20, № 1, с.171-181.
11. Самарский А.А. и др. Препринт ИГМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 63, 1981.
12. Кузьмин А.В., Макаров В.Л. ЖВМиМФ, 1982, т.22, №1, с.123-133.
13. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Препринт ИГМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 19, 1982.
14. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Препринт ИАЭ им. И.В.Курчатова, ИАЭ-3747/16, 1983.
15. Шокин Ю.И. Первое дифференциальное приближение. Новосибирск, "Наука", 1979.
16. Роуз П. Вычислительная гидродинамика. М., "Мир", 1980, 616 с.
17. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., "Наука", 1978, 736с.
18. Boris J.P., Book D.L. *J. Comput. Phys.*, 1973, 11, N1, pp. 38-69
19. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., "Наука", 1966г.
20. Sclotvaut D.G., Garguez J.H. *J. Comput. Phys.* v.22, N3, pp. 389-395 (1976)
21. Staxton R.S., McCortу R.L. *J. Comput. Phys.*, v33, pp. 432-440 (1979)
22. Головизнин В.М., Жмакин А.И., Фурсенко А.А. Вильнюс, 1982, Дифф.уравн. и их применения". Выпуск 31, с.25-35.
23. Zalesak S.T. *J. Comput. Phys.*, v.31, pp. 335-362, 1979
24. Leonard B.P. *Computer methods in fluids*, London, 1980, pp. 159-195
25. Семушин С.А. Препринт ИГМ им.М.В.Келдыша АН СССР, № 61, 1980, с.17.
26. Gentry R.A., Martin R.E. *Daly B.J. J. Comput. Phys.*, 1, 1966, pp. 87-118.

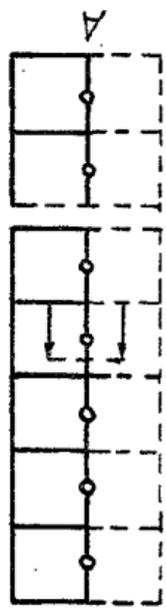
Рис. 6



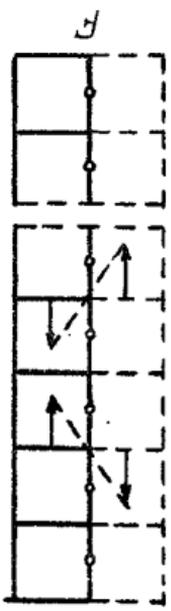
2)



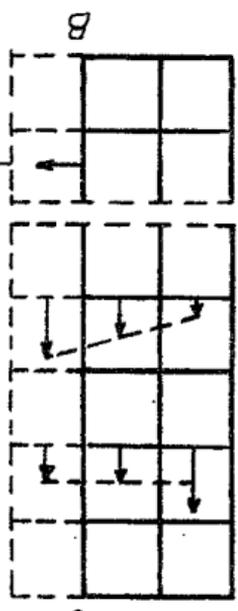
3)



4)



5)

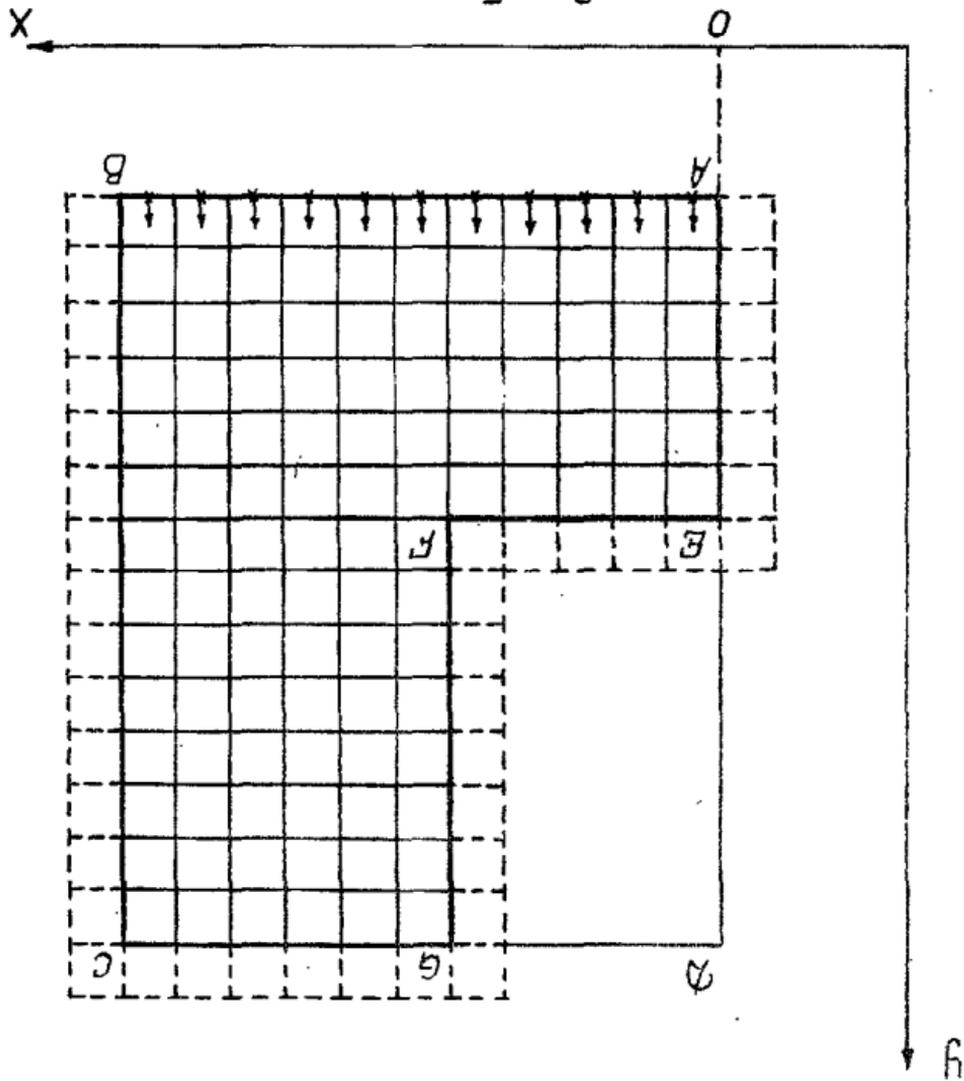


6)

28

←

Рис. 5



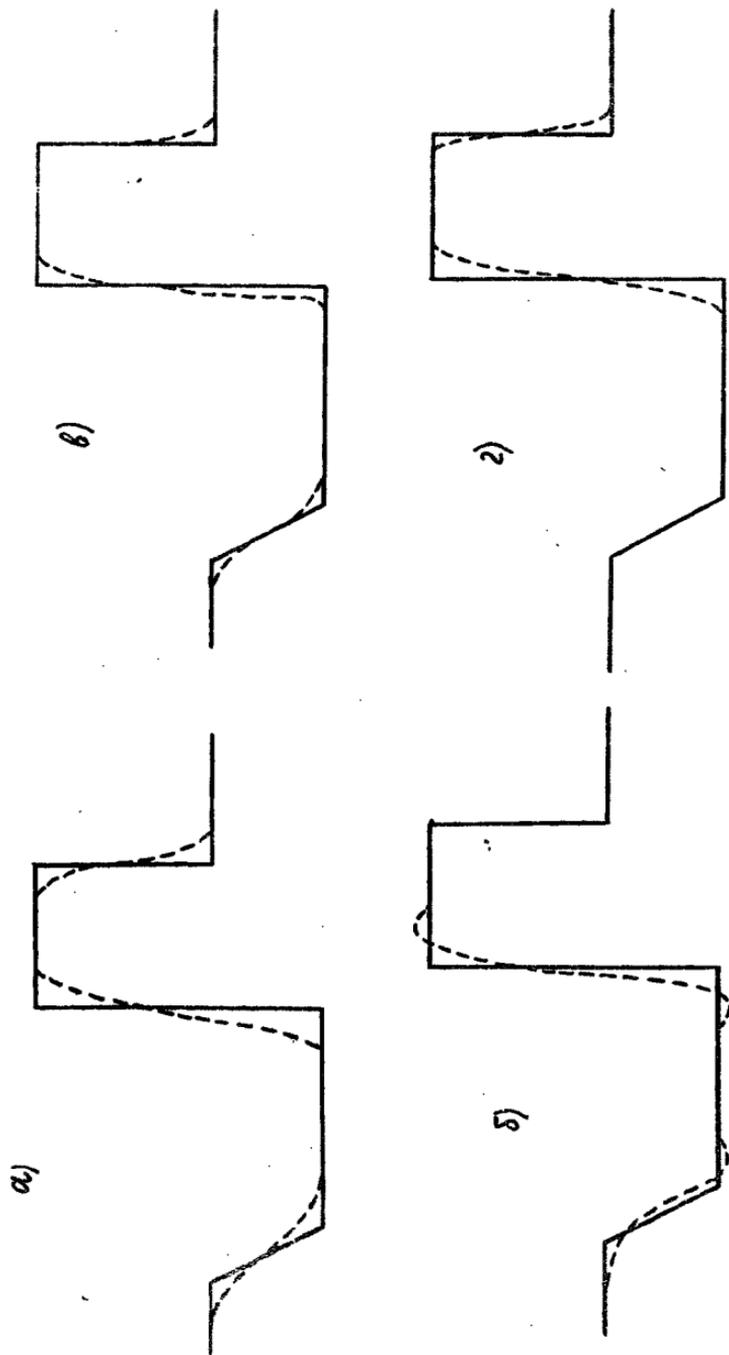


Рис. 7

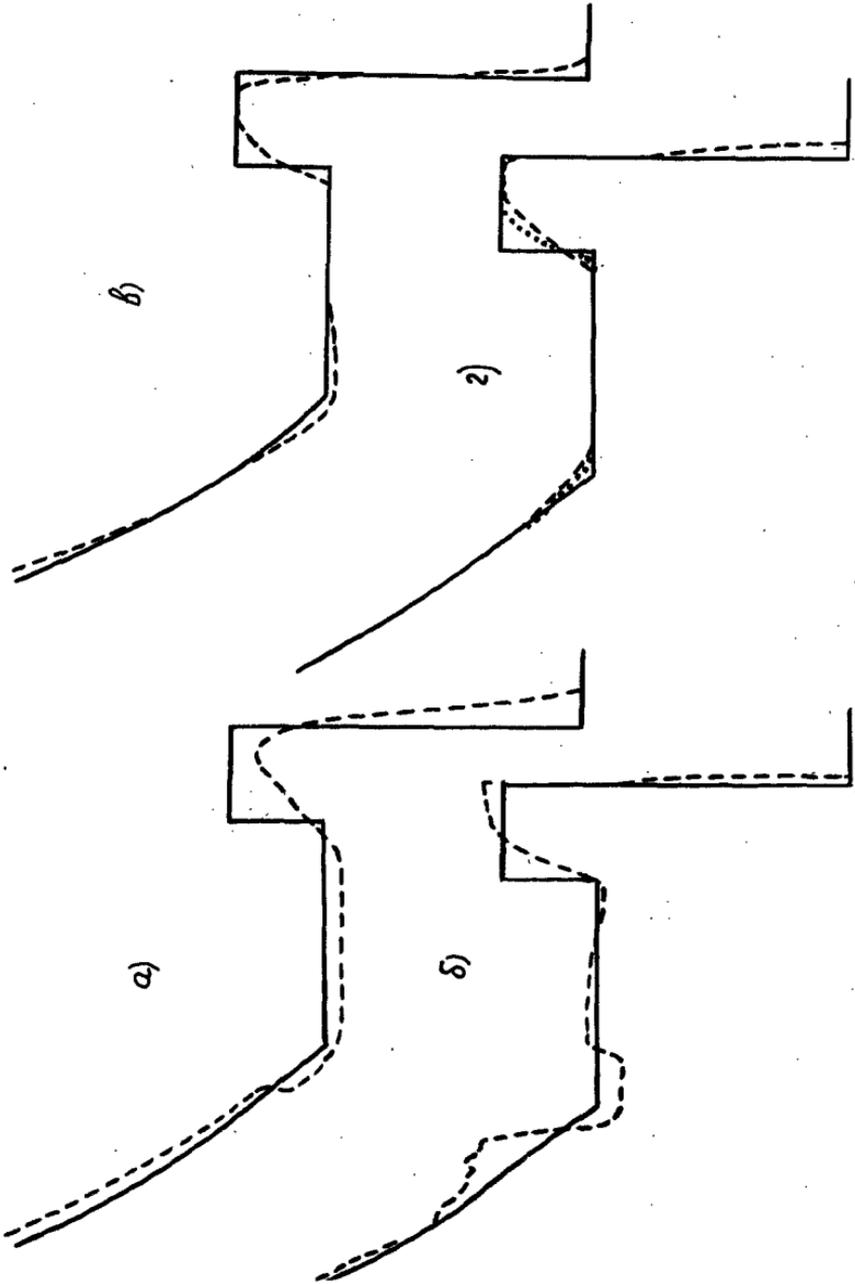


Рис. 8

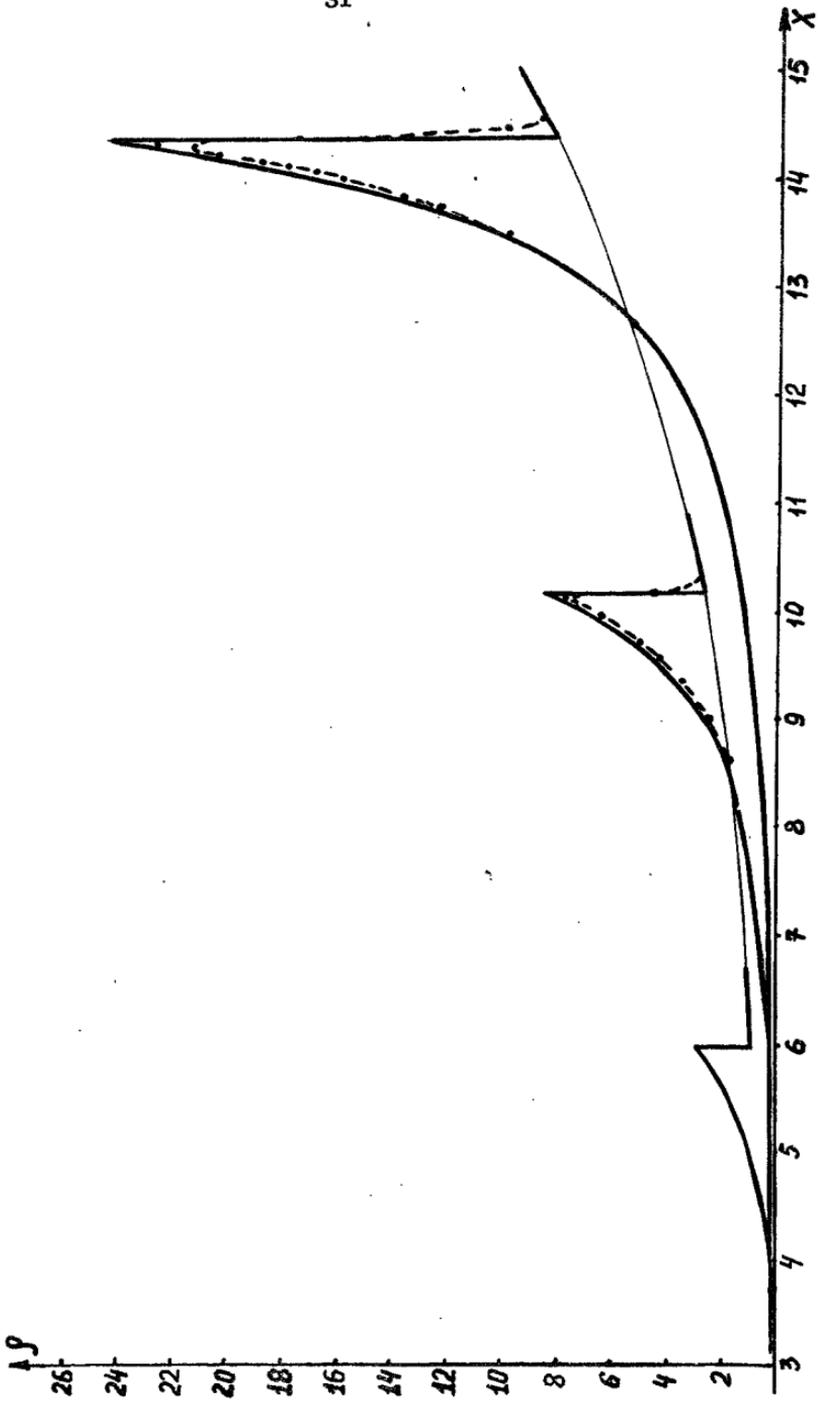
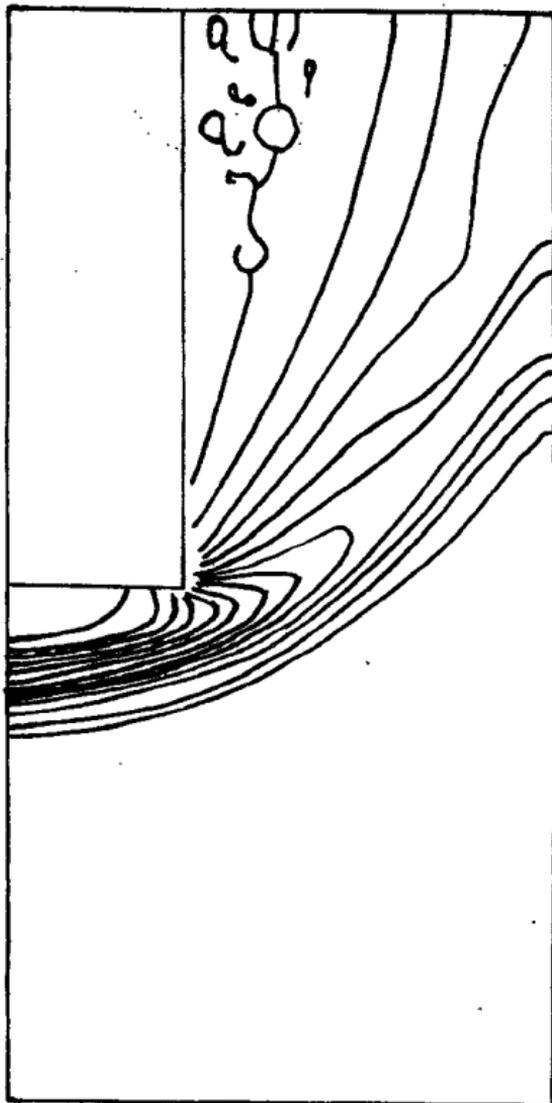


Рис. 9



$$T=48.$$

$$NSTOP=1000$$

$$M=3,0$$

$$\beta=1,4$$

$$\rho_{min}=0,368$$

$$\rho_{max}=4,0$$

$$n=24, m=36$$

$$COUR=0,5$$

$$\alpha=0$$

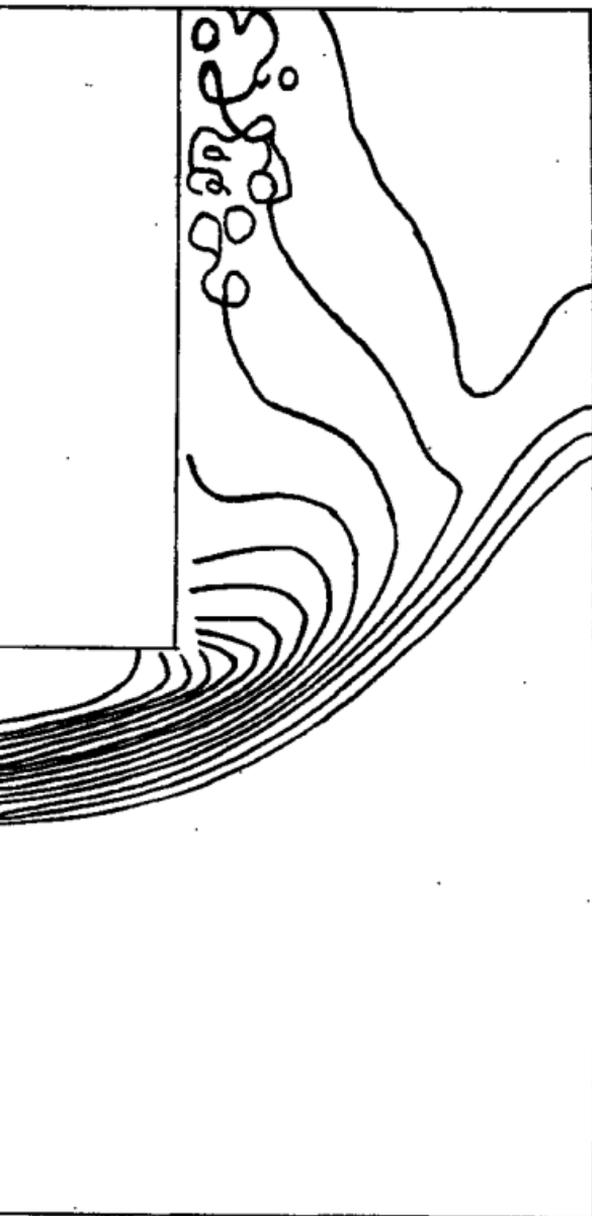
$$x_0=0,25$$

$$\mu = h_x/10$$

$$h_x=0,125$$

$$L=2$$

Рис.10



$$T=48$$

$$NSTOP=1000$$

$$M=3,0$$

$$\beta=1,4$$

$$\varepsilon_{min}=0,191$$

$$\varepsilon_{max}=0,553$$

$$n=24, m=36$$

$$COUR=0,5$$

$$\alpha=0$$

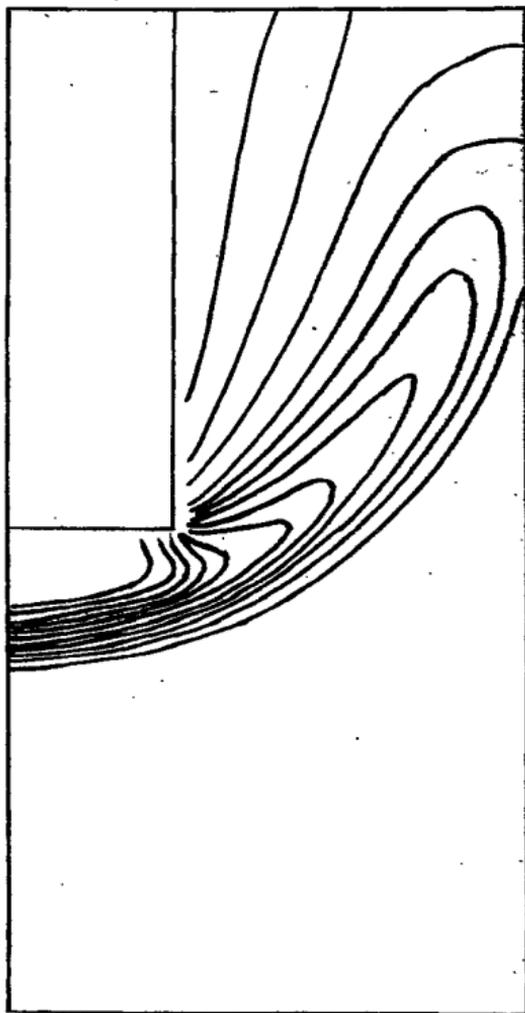
$$\alpha_0=0,25$$

$$\mu = h_x / \tau_c$$

$$h_x=0,125$$

$$L=2$$

Рис. 11



$$T = 55$$

$$NSTOP = 1600$$

$$M = 3,0$$

$$\gamma = 1,4$$

$$\rho_{min} = 0,367$$

$$\rho_{max} = 3,68$$

$$n = 24, m = 36$$

$$COUR = 0,5$$

$$\alpha = 0$$

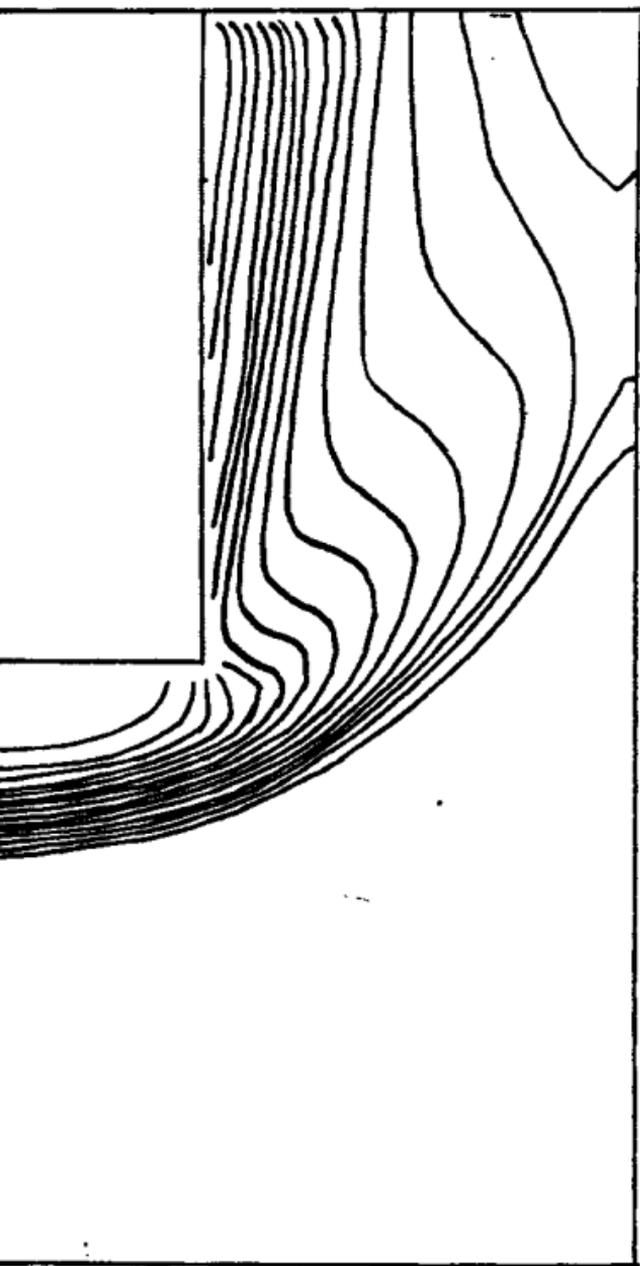
$$\alpha_0 = 0,25$$

$$\mu = h_x / 10$$

$$h_x = 0,125$$

$$L = 2$$

Рис. 12



$$T = 55$$

$$NSTOP = 1600$$

$$M = 3,0$$

$$\beta = 1,4$$

$$E_{min} = 0,198$$

$$E_{max} = 0,557$$

$$n = 24, m = 36$$

$$COUR = 0,5$$

33

$$\alpha = 0$$

$$\alpha_0 = 0,25$$

$$\mu = h_x/10$$

$$h_x = 0,125$$

$$L = 2$$

Рис. 13