ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 23 Июль 1983 Август № 4

УДК 519.633.8

О РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.II

ГАЛАКТИОНОВ В. А., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

Исследуются свойства неявных разностных схем для квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с источником. Определены достаточные условия глобальной разрешимости и единственности решения разностной задачи. Показано, что в результате предельного перехода глобальное разностное решение сходится к обобщенному решению исходной дифференциальной задачи.

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Ниже рассматриваются разностные решения следующей краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения нелинейной теплопроводности с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^{\sigma+1})+u^\beta, \qquad t>0, \quad x\in(0,l), \tag{1}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\geqslant 0, \quad 0<x<l, \qquad u_0\in C([0,l]), \tag{2}$$

$$u(t,0)=u(t,l)=0, \qquad t\geqslant 0, \tag{3}$$

$\sigma>0$ и $\beta>1$ — фиксированные постоянные.

Задаче (1)—(3) ставится в соответствие неявная (нелинейная) разностная схема [2]

$$\frac{\hat u-u}{\tau}=(\hat u^{\sigma+1})_{\bar x x}+\hat u^\beta, \qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\omega_h, \tag{4}$$

$$u^0=u_{0h}, \quad x\in\omega_h, \qquad \hat u\in H_h, \quad t\in\omega_\tau. \tag{5}$$

Здесь и далее используются обозначения, принятые в [1], [2].

В [1] изучались условия разрешимости схемы (4), (5) на фиксированном временном слое, а также показано, что при $\beta\geqslant\sigma+1$ разностное решение может не существовать, быть неединственным и неограниченно возрастать в течение конечного времени.

Ниже будут получены достаточные условия глобальной разрешимости и единственности решения задачи (4), (5), а также показано, что при τ, $h\to 0$ разностное решение сходится к обобщенному решению исходной дифференциальной задачи (1)—(3).

§ 5. Глобальная разрешимость разностной задачи и предельный переход при $\beta\leqslant\sigma+1$

В этом параграфе получены условия глобальной разрешимости задачи (4), (5) при $\beta\leqslant\sigma+1$. (Здесь и в § 6 сетка ω_τ считается равномерной.)

Теорема 6. *Пусть $\beta<\sigma+1$. Тогда при достаточно малых τ разностная задача имеет глобальное решение (т. е. при любых $T>0$), причем оно единственно.*

Если $\beta=\sigma+1$, *то аналогичное утверждение справедливо при дополнительном предположении*

$$\lambda_1^h=\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi h}{2l}\right)>1. \tag{5.1}$$

Затем на основе теоремы 6 устанавливается сходимость разностной схемы (4), (5) при τ, $h\to 0$ и одновременно доказывается

Теорема 7. *Пусть начальная функция* $u_0(x)$ *в* (2) *такова, что* $u_0^{\sigma+1}\in H_0^1(0, l)$. *Тогда при* $\beta<\sigma+1$ *дифференциальная задача* (1)—(3) *имеет решение, удовлетворяющее включениям*

$$u\in L^\infty(0, T;\ L^{\sigma+2}(0, l)),\qquad u^{\sigma+1}\in L^\infty(0, T;\ H_0^1(0, l)), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T;H^{-1}(0,l)),\qquad \frac{\partial}{\partial t}u^{1+\sigma/2}\in L^2(0,T;L^2(0,l)). \tag{5.3}$$

Если $\beta=\sigma+1$, *то аналогичное утверждение справедливо при дополнительном предположении*

$$\lambda_1^0=(\pi/l)^2>1. \tag{5.4}$$

При доказательстве сформулированных теорем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *При всех* $\xi, \eta\in\mathbf{R}_+^1$ *выполнено неравенство*

$$(\xi^{\sigma+1}-\eta^{\sigma+1})\xi^\beta\leqslant\frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1}(\xi^{\beta+\sigma+1}-\eta^{\beta+\sigma+1})+ \tag{5.5}$$

$$+C_1[\max\{\xi,\eta\}]^{\beta-1}(\xi^{1+\sigma/2}-\eta^{1+\sigma/2})^2,$$

где $C_1=C_1(\sigma,\ \beta)>0$ — *постоянная.*

Лемма 3. *Для любой сеточной функции* $v_h\in H_h$

$$|v_h|_C\leqslant A_3\|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^{1/(\sigma+1)},\qquad A_3=l^{1/2(\sigma+1)}. \tag{5.6}$$

Если функция $v(x)\geqslant 0$ *такова, что* $v^{\sigma+1}\in H_0^1(0, l)$, *то оценка* (5.6) *выполняется при* $h=0$.

Лемма 3 доказана в [2], [3], неравенство (5.5) проверяется непосредственно.

Доказательство теорем 6 и 7. Фиксируем произвольное $T>0$. Пусть $u_0^{\sigma+1}(x)\in H_0^1(0, l)$.

1. Рассмотрим сначала случай $\beta<\sigma+1$. В силу теоремы 1 (см. [1]), схема (4) для $\beta<\sigma+1$ разрешима при любых τ. Скалярно умножая обе части (4) на $\hat u^{\sigma+1}$ и используя при этом оценку [4]

$$(\xi-\eta)\xi^{\sigma+1}\geqslant\frac{1}{\sigma+2}(\xi^{\sigma+2}-\eta^{\sigma+2}),\qquad \xi,\eta\in\mathbf{R}_+^1,$$

получаем

$$\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}(|\hat u|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2}-|u|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2})+\|\hat u^{\sigma+1}\|_{h,2}^2\leqslant|\hat u|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}. \tag{5.7}$$

С помощью оценки [2]

$$|v_h|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}\leqslant A_0\|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+1)},\qquad v_h\in H_h,$$

$$A_0=l^{1+(\beta+\sigma+1)/2(\sigma+1)},$$

и неравенства Юнга [3] получим

$$(5.8)\qquad |\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}\leqslant\frac{1}{2}\|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}+A_4,$$

$$A_4=\frac{[(\sigma+1)-\beta]}{2(\beta+\sigma+1)}\left[\frac{\sigma+1}{A_0(\beta+\sigma+1)}\right]^{2(\sigma+1)/[\beta-(\sigma+1)]}.$$

С учетом (5.8) неравенство (5.7) принимает вид

$$(5.9)\qquad \frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}|\hat{u}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2}+\frac{1}{2}\|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}\leqslant$$

$$\leqslant A_4+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\sigma+2}|u|_{h,\sigma+2}.$$

Из (5.9) получаем оценку

$$(5.10)\qquad \max_{0\leqslant j\leqslant N}|u^{j+1}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2}\leqslant A_4T(\sigma+2)+|u_{0h}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2}\leqslant A_5$$

и в силу (5.6) — неравенство

$$(5.11)\qquad \max_{0\leqslant j\leqslant N}|u^{j+1}|_C\leqslant A_3\left[2A_4+\frac{2}{\tau}\frac{1}{(\sigma+2)}A_5\right]^{1/2(\sigma+1)}.$$

Для вывода других априорных оценок умножим скалярно (4) на $(\hat{u}^{\sigma+1}-u^{\sigma+1})/\tau$ и воспользуемся затем неравенством (5.5), а также неравенством $(\xi^{\sigma+1}-\eta^{\sigma+1})(\xi-\eta)\geqslant C_2(\xi^{1+\sigma/2}-\eta^{1+\sigma/2})^2$, справедливым при всех $\xi,\ \eta\in R_+^1$, где $C_2=C_2(\sigma)>0$ — постоянная [4]. В результате получим

$$(5.12)\qquad C_2\left|\frac{\hat{u}^{1+\sigma/2}-u^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|_{h,2}^{2}\leqslant-\frac{1}{2\tau}(\|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}-$$

$$-\|u^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2})+\frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1}\frac{1}{\tau}(|\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}-|u|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1})+$$

$$+C_1\tau[\max\{|\hat{u}|_C,|u|_C\}]^{\beta-1}\left|\frac{\hat{u}^{1+\sigma/2}-u^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|_{h,2}^{2}.$$

При выводе (5.12) использовалось также то, что $((\hat{u}^{\sigma+1})_{\bar{x}x},\ \hat{u}^{\sigma+1}-u^{\sigma+1})_h\geqslant$ $\geqslant-(\|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}-\|u^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2})/2$ в силу оценки $\xi(\xi-\eta)\geqslant-(\xi^2-\eta^2)/2$, $\xi,\ \eta\in\mathbf{R}_+^1$.

Выберем теперь N столь большим, чтобы $C_1\tau[\max\{|\hat{u}|_C,\ |u|_C\}]^{\beta-1}\leqslant C_2/2$ при всех $0\leqslant j\leqslant N$, т. е. (см. (5.11))

$$(5.13)\qquad \tau\left[2A_4+\frac{2}{\tau}\frac{1}{(\sigma+2)}A_5\right]^{(\beta-1)/2(\sigma+1)}\leqslant\frac{C_2}{2C_1}A_3^{1-\beta}.$$

Нетрудно видеть, что при $\beta<\sigma+1$ это всегда возможно. Тогда, суммируя равенства (5.12) по всем j от 0 до N и применяя неравенство Юнга (см., например, [3]), получаем

$$\frac{C_2}{2}\sum_{j=0}^{N}\tau\left|\frac{\hat{u}^{1+\sigma/2}-u^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|_{h,2}^{2}+\frac{1}{2}\|(u^{N+1})^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1}|u^{N+1}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}+\frac{1}{2}\|u_{0h}^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}-$$

$$-\frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1}|u_{0h}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}\leqslant\frac{1}{4}\|(u^{N+1})^{\sigma+1}\|_{h,2}^{2}+A_6.$$

Отсюда вытекают оценки

$$(5.14)\qquad \sum_{j=0}^{N} \tau \left| \frac{\hat{u}^{1+\sigma/2}-u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^{2} \leqslant A_7,$$

$$(5.15)\qquad \max_{0\leqslant j\leqslant N} \| (u^{j+1})^{\sigma+1} \|_{h,2}^{2} \leqslant A_8.$$

Таким образом, ограничение (5.13) на величину шага по времени τ обеспечивает глобальную разрешимость разностной задачи (4), (5). Заметим, что из (5.15) в силу (5.6) следует оценка

$$(5.16)\qquad \max_{0\leqslant j\leqslant N} |u^{j+1}|_C \leqslant A_9.$$

Покажем, что при достаточно малых τ решение является единственным. Пусть существуют два решения, $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$, и пусть величина τ такова, что выполняется неравенство (5.13) и условие

$$(5.17)\qquad \tau < \frac{1}{\beta} A_9^{1-\beta}.$$

Из (4) следует, что $\hat{u}_1-\hat{u}_2=\tau(\hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1})_{\bar{x}x}+\tau(\hat{u}_1^{\beta}-\hat{u}_2^{\beta})$. Скалярно умножая это равенство на $\hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1}$, получаем

$$(\hat{u}_1-\hat{u}_2, \hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1})_h = -\tau \| \hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1} \|_{h,2}^{2} +$$

$$+\tau(\hat{u}_1^{\beta}-\hat{u}_2^{\beta}, \hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1})_h \leqslant$$

$$\leqslant \tau\beta[\max\{|\hat{u}_1|_C, |\hat{u}_2|_C\}]^{\beta-1}(\hat{u}_1-\hat{u}_2, \hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1})_h.$$

Отсюда, в силу (5.16), (5.17), заключаем, что $(\hat{u}_1-\hat{u}_2, \hat{u}_1^{\sigma+1}-\hat{u}_2^{\sigma+1})_h=0$, т. е. $\hat{u}_1\equiv\hat{u}_2$.

Для доказательства законности предельного перехода нам понадобится еще одна оценка. Из (4) имеем

$$\left\| \frac{\hat{u}-u}{\tau} \right\|_{h,2}^{*} \leqslant \| (\hat{u}^{\sigma+1})_{\bar{x}x} \|_{h,2}^{*} + \| \hat{u}^{\beta} \|_{h,2}^{*}.$$

Отсюда, поскольку

$$\| (\hat{u}^{\sigma+1})_{\bar{x}x} \|_{h,2}^{*} = \| \hat{u}^{\sigma+1} \|_{h,2}, \qquad \| \hat{u}^{\beta} \|_{h,2}^{*} \leqslant (\lambda_1^h)^{-1/2} | \hat{u} |_{h,\beta}^{\beta},$$

с помощью (5.15) получаем

$$(5.18)\qquad \max_{0\leqslant j\leqslant N} \left\| \frac{u^{j+1}-u^{j}}{\tau} \right\|_{h,2}^{*} \leqslant A_{11}.$$

Введем для простоты обозначение

$$\nabla_\tau q_\tau v_{\tau,h} = \frac{v_h^{j+1}-v_h^{j}}{\tau}, \qquad j\tau \leqslant t \leqslant (j+1)\tau.$$

Из (5.10), (5.14), (5.15), (5.18) с помощью результатов работы [4] получаем следующие оценки:

(5.19a) $q_\tau p_h(u^j)^{\sigma+1}$ ограничены в $L^\infty(0, T; H_0^1(0, l))$,

$q_\tau p_h(u^j)^{\sigma+1}$ — в $L^\infty(0, T; L^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}(0, l))$,

(5.19б) $\quad q_\tau q_h(u^j)^{\sigma+1}$ — в $L^\infty(0, T; L^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}(0, l))$,
$q_\tau q_h(u^j)^{1+\sigma/2}$ — в $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$,

(5.19в) $\quad \nabla_\tau q_\tau q_h(u^j)^{1+\sigma/2}$ — в $L^2(0, T; L^2(0, l))$,
$q_\tau p_h u^j$ — в $L^\infty(0, T; L^{\sigma+2}(0, l))$,

(5.19г) $\quad \nabla_\tau q_\tau p_h u^j$ — в $L^\infty(0, T; H^{-1}(0, l))$,
$[q_\tau p_h(u^j)^{\sigma+1}]_{\bar{x}x}$ — в $L^\infty(0, T; H^{-1}(0, l))$,

(5.19д) $\quad q_\tau q_h(u^j)^\beta$ — в $L^\infty(0, T; L^{(\sigma+2)/\beta}(0, l))$, $\quad q_h(u^{N+1})$ — в $L^{\sigma+2}(0, l)$.

Оценок (5.19) достаточно для совершения на основе теоремы компактности [5] предельного перехода при τ, $h\to 0$ (см. [4], [6], [7]), в результате которого получаем существование глобального решения задачи (1)—(3), удовлетворяющего включениям (5.2), (5.3).

2. Рассмотрим теперь случай $\beta=\sigma+1$. Применяя для оценки члена, стоящего в правой части (5.7), неравенство [2]

$$|v_h|^{2(\sigma+1)}_{h,2(\sigma+1)}\leqslant\frac{1}{\lambda_1^h}\|v_h^{\sigma+1}\|^2_{h,2},\qquad v_h\in H_h,$$

получаем

$$\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}|\hat{u}|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}+\left(1-\frac{1}{\lambda_1^h}\right)\|\hat{u}^{\sigma+1}\|^2_{h,2}\leqslant\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}|u|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}.$$

Отсюда (см. (5.1)) вытекает справедливость оценки (5.10) при $A_4=0$ и неравенства

$$\|\hat{u}^{\sigma+1}\|^2_{h,2}\leqslant\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}\frac{\lambda_1^h}{\lambda_1^h-1}|u_{0h}|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}\leqslant\frac{A_{10}}{\tau}.$$

Выберем величину τ столь малой, чтобы (см. (5.13))

$$\tau^{(\sigma+2)/2(\sigma+1)}\leqslant\frac{C_2}{2C_1}A_3^{-\sigma}A_{10}^{-\sigma/2(\sigma+1)}.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\frac{C_2}{2}\sum_{j=0}^{N}\tau\left|\frac{\hat{u}^{1+\sigma/2}-u^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|^2_{h,2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1^h}\right)\|(u^{N+1})^{\sigma+1}\|^2_{h,2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(\|u_{0h}^{\sigma+1}\|^2_{h,2}-|u_{0h}|^{2(\sigma+1)}_{h,2(\sigma+1)}),$$

из которого вытекают оценки (5.14), (5.15), (5.16). Последующий анализ проводится так же, как в случае $\beta<\sigma+1$.

§ 6. Разностное множество устойчивости и предельный переход при $\beta>\sigma+1$

В этом параграфе получены достаточные условия глобального существования решения разностной задачи (4), (5) при $\beta>\sigma+1$, сходящегося при τ, $h\to 0$ к обобщенному решению задачи (1)—(3).

1. Определим для всех $v_h\in H_h$ функционал

(6.1) $$J_h(v_h)=\frac{1}{2}a_h(v_h)-\frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1}b_h(v_h),$$

где $\quad a_h(v_h)=\|v_h^{\sigma+1}\|^2_{h,2},\quad b_h(v_h)=|v_h|^{\beta+\sigma+1}_{h,\beta+\sigma+1}.$

Лемма 4. *Пусть* $\beta>\sigma+1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$d_h=\inf_{\substack{v_h\in H_h\\ v_h\neq 0}}\sup_{\lambda>0} J_h(\lambda v_h)>\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)}\,l^{-[\beta+3(\sigma+1)]/[\beta-(\sigma+1)]}>0. \tag{6.2}$$

Лемма 4 доказывается так же, как аналогичное утверждение в [8].

Определим разностное множество устойчивости $\mathscr{W}_h$ по формуле

$$\mathscr{W}_h=\{v_h\,|\,v_h\in H_h,\ 0\leqslant J_h(\lambda v_h)<d_h,\ \lambda\in[0,1]\}. \tag{6.3}$$

В силу (6.2), $\mathscr{W}_h$ не является пустым множеством.

Из способа построения $\mathscr{W}_h$ вытекает

Лемма 5. *Пусть* $\beta>\sigma+1$. *Тогда* $\mathscr{W}_h=\mathscr{W}_h^*\cup\{0\}$, *где*

$$\mathscr{W}_h^*=\{v_h\,|\,v_h\in H_h,\ a_h(v_h)-b_h(v_h)>0,\ J_h(v_h)<d_h\}. \tag{6.4}$$

Замечание 1. Если в (6.1)–(6.4) функции $v(x)\geqslant 0$ таковы, что $v^{\sigma+1}\in H_0^1(0,l)$, то леммы 4 и 5 остаются справедливыми при $h=0$ (см. [8], а также аналогичные утверждения в [9], [10]). В этом случае вместо J_h, $\mathscr{W}_h$, $\mathscr{W}_h^*\ldots$ будем писать J_0, $\mathscr{W}_0$, $\mathscr{W}_0^*\ldots$.

2. Теорема 8. *Пусть* $\beta>\sigma+1$ *и функция* u_{0h} *в* (5) *такова, что* $u_{0h}\in\mathscr{W}_h$. *Тогда при достаточно малых* τ *разностная задача* (4), (5) *имеет глобальное решение, принадлежащее* $\mathscr{W}_h$ *для всех* $t\in\omega_\tau$, *причем такое решение единственно.*

Замечание 2. В условиях теоремы 8 никакое уменьшение шага τ не приводит к неограниченности разностного решения. Таким образом, как следует из теоремы 5 (см. [1]), неравенство (4.4) не может быть выполнено, если $u_{0h}\in\mathscr{W}_h$, т. е. $1-\lambda_1^h(u_{0h},\psi_h)_h^{(\sigma+1)-\beta}\leqslant 0$, $u_{0h}\in\mathscr{W}_h$. Это неравенство является дополнительной характеристикой разностного множества устойчивости.

Из теоремы 8 предельным переходом τ, $h\to 0$ выводится

Теорема 9. *Пусть* $\beta>\sigma+1$ *и функция* u_0 *в* (2) *такова, что* $u_0\in\mathscr{W}_0$. *Тогда дифференциальная задача* (1)–(3) *имеет глобальное решение, принадлежащее* $\overline{\mathscr{W}}_0$ *при всех* $t\in(0,T)$, *причем оно удовлетворяет включениям* (5.2), (5.3).

Здесь $\overline{\mathscr{W}}_0$ — замыкание $\mathscr{W}_0$ на множестве $\{u\,|\,u(x)\geqslant 0,\ u^{\sigma+1}\in H_0^1(0,l)\}$.

Замечание 3. Как показано в [8], выполнение условия $J_0(u_0)<0$, в определенном смысле противоположного включению $u_0\in\mathscr{W}_0$ (см. (6.3)), влечет за собой неограниченность решения задачи (1)–(3) и для времени существования решения справедлива оценка

$$T_0<\frac{\beta+\sigma+1}{(\beta-1)[\beta-(\sigma+1)]}\,l^{(\beta-1)/(\sigma+2)}\|u_0\|^{1-\beta}_{L^{\sigma+2}(0,l)}<+\infty.$$

Доказательство теорем 8 и 9. Фиксируем произвольное $T>0$. Пусть задана произвольная функция $u_0(x)\in\mathscr{W}_0$, $u_0\neq 0$. Тогда $u_{0h}\in\mathscr{W}_h$ при достаточно малых h. Отсюда в силу леммы 5 получаем

$$\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)}\,a_h(u_{0h})\leqslant J_h(u_{0h}),$$

и поэтому (см. лемму 3)

$$|u_{0h}|_C\leqslant A_3\left[\frac{2(\beta+\sigma+1)J_h(u_{0h})}{\beta-(\sigma+1)}\right]^{1/2(\sigma+1)}\leqslant A_{11}.$$

Покажем, что ограничение

$$\tau \leqslant \frac{\min\{1, C_2/2C_1\}}{(1+A_{11})^{\beta}+2h^{-2}(1+A_{11})^{\sigma+1}} \tag{6.5}$$

обеспечивает на каждом шаге разрешимость схемы (4).

Сделаем первый шаг. Из теоремы 2 (см. условие (2.9) в [1] при $C_0=1$) следует, что при ограничении (6.5) схема (4) разрешима. Тогда из (5.12) с учетом того, что

$$\tau[\max\{|u^1|_C, |u^0|_C\}]^{\beta-1} \leqslant \frac{C_2}{2C_1}$$

(отметим, что, в силу (6.5), $|u^1|_C \leqslant |u^0|_C+1$, см. теорему 2), получаем

$$\frac{C_2}{2}\left|\frac{(u^1)^{1+\sigma/2}-(u^0)^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|_{h,2}^2 \leqslant \frac{1}{\tau}[J_h(u^0)-J_h(u^1)]. \tag{6.6}$$

Докажем, что $u^1 \in \mathscr{W}_h$. Действительно, пусть $u^1 \overline{\in} \mathscr{W}_h$. Тогда, поскольку $u^1 \to u^0$ при $\tau \to 0$ и $u^0 \in \mathscr{W}_h$, всегда можно найти такое τ, удовлетворяющее условию (6.5), что $u^1 \in \partial\mathscr{W}_h$. В силу (6.3), это означает, что $J_h(u^1)=d_h$. Отсюда получаем противоречие с (6.6), поскольку по предположению $J_h(u^0)<d_h$.

Итак, $u^1 \in \mathscr{W}_h$. Тогда из леммы 5 получаем, что $a_h(u^1)>b_h(u^1)$. Оценивая с помощью этого неравенства правую часть (6.6), имеем

$$\frac{C_2}{2}\left|\frac{(u^1)^{1+\sigma/2}-(u^0)^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|_{h,2}^2 + \frac{1}{\tau}\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)}\|(u^1)^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\tau}J_h(u^0).$$

Отсюда

$$\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)}\|(u^1)^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leqslant J_h(u^0)$$

и, следовательно, $|u^1|_C \leqslant A_{11}$. Последняя оценка обеспечивает законность совершения следующего шага по времени с ограничением (6.5) на величину τ, и т. д.

Заметим, что для глобальной разрешимости задачи в разностном множестве устойчивости $\mathscr{W}_h$ достаточно, чтобы $\tau=o(h^2)$, $h \ll 1$.

Таким образом, при выполнении условия (6.5) разностная задача имеет глобальное решение, причем $\hat{u} \in \mathscr{W}_h$, $|\hat{u}|_C \leqslant A_{11}$ при всех $0 \leqslant j \leqslant N$ и, кроме того,

$$\frac{C_2}{2}\sum_{j=0}^{N}\tau\left|\frac{\hat{u}^{1+\sigma/2}-u^{1+\sigma/2}}{\tau}\right|_{h,2}^2 + \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)}\|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leqslant J_h(u_{0h}).$$

Единственность при достаточно малых τ равномерно ограниченного разностного решения доказывается так же, как в теореме 6.

Построенное разностное решение удовлетворяет оценкам (5.19), которые позволяют произвести предельный переход τ, $h \to 0$. В результате устанавливается существование глобального решения задачи (1)–(3) при $\beta>\sigma+1$, причем $u \in \overline{\mathscr{W}}_0$ для любых $t>0$ в силу условия $u_h \in \mathscr{W}_h$ при $t \in \omega_\tau$.

Литература

1. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* О разностных решениях одного класса квазилинейных параболических уравнений. I.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 3, с. 646–659.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
4. *Raviart P. A.* Sur la résolution de certaines equations paraboliques non linéaires.– J. Functional Analysis, 1970, v. 5, p. 299–328.
5. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях.– Матем. сб., 1965, т. 67(109), № 4, с. 609–642.
6. *Raviart P. A.* Sur la résolution et l'approximation de certaines équations paraboliques non linéaires dégénérées.– Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1967, v. 25, p. 64–80.
7. *Масловская Л. В.* О сходимости разностных методов для некоторых вырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 6, с. 1444–1455.
8. *Галактионов В. А.* Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t=\Delta u^{\sigma+1}+u^{\beta}$.– Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 5, с. 836–842.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
10. *Tsutsumi M.* Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations.– Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1972/73, v. 8, p. 211–229.

Поступила в редакцию 18.VI.1982