УДК 517.956

Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III

Галактионов В. А., Самарский А. А.

Настоящая работа, в которой продолжается исследование, начатое в [1], [2], посвящена изучению асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений типа нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Функция $k(u)$ определена при всех $u \geqslant 0$, $k(u) > 0$ при $u > 0$, $k \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$. Для (1) будут рассматриваться краевые задачи с начальным условием $u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0$, $x > 0$, и с одним из граничных режимов

$$u(t, 0) = \varkappa_+(t) > 0, \quad t > 0; \tag{2}$$

$$u(t, 0) = \varkappa_-(t) > 0, \quad t \in (0, 1), \tag{2'}$$

где достаточно гладкие монотонно возрастающие функции $\varkappa_\pm$ таковы, что $\varkappa_+(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\varkappa_-(t) \to +\infty$ при $t \to 1^-$ (в последнем случае $\varkappa_-(t)$ изменяется в режиме с обострением).

Исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых задач проводится с помощью построения приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения (1), которые ему не удовлетворяют, но тем не менее правильно описывают эволюцию решения при $t \to +\infty$ или $t \to 1^-$. Особо подчеркнем, что такие п. а. р. удается построить при достаточно произвольных коэффициентах $k(u)$ и граничных режимах $\varkappa_\pm(t)$.

В работе [1] построены полные системы п. а. р. уравнения (1) с коэффициентами k, удовлетворяющими условию

$$[k(u)/k'(u)]' \to \frac{1}{\sigma}, \quad u \to +\infty; \quad \sigma = \mathrm{const} \in (0, +\infty).$$

В [2] то же самое сделано для случая

$$[k(u)/k'(u)]' \to +\infty, \quad u \to +\infty.$$

В данной работе построены новые по сравнению с [1], [2] классы п. а. р. уравнения (1) в том случае, когда

$$[k(u)/k'(u)]' \to 0, \quad u \to +\infty.$$

Этому условию удовлетворяют, например, коэффициенты $k(u) = \exp[\ln^\alpha(1+u)]$, $\alpha > 1$; $k(u) = \exp u^\lambda$, $\lambda > 0$; $k(u) = \exp(\exp u)$ и т. д. В данной работе построение п. а. р. проводится способами, отличающимися от применяемых в [1], [2], и п. а. р. имеют другую пространственно-временную структуру. Для доказательства сходимости решений рассматриваемых задач к соответствующим п. а. р. привлекаются несколько иные методы.

В дальнейшем через $\|\cdot\|_1$ будет обозначаться норма в пространстве $L^1((0, x^*))$ $(0<x^*<+\infty$ — известная величина)

$$\|v(x)\|_1 = \int\limits_0^{x^*} |v(x)|\,dx.$$

§ 7. Полная система приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения с экспоненциальной нелинейностью

В этом параграфе будет рассматриваться уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\infty(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp u \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{7.1}$$

которое заменой $U = \exp u$ сводится к более удобному для нас виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{7.2}$$

(отметим, что для корректности обратного преобразования $u = \ln U$ необходимо, чтобы $U \geqslant 1$). Функция $U(t, x)$ удовлетворяет одному из краевых условий

$$U(t, 0) = \exp[\varkappa_+(t)] = \psi_+(t),\ t>0; \tag{7.3}$$

$$U(t, 0) = \exp[\varkappa_-(t)] = \psi_-(t),\ t\in(0, 1). \tag{7.3'}$$

Для построения полной системы п. а. р. уравнения (7.2) нам понадобятся следующие его точные инвариантные решения[12]:

I. $U_A(t, x) = \theta_a(\xi),\ \xi = \dfrac{x}{(1+t)^{1/2}},\quad t>0;$

II. $U_A(t, x) = (1+t)^m\,\theta_a(\xi),\ \xi = \dfrac{x}{(1+t)^{(1+m)/2}},\qquad t>0, m = \mathrm{const}>0;$

III. $U_A(t, x) = (1-t)^n\,\theta_a(\xi),\ \xi = \dfrac{x}{(1-t)^{(1+n)/2}},\quad t\in(0, 1),\ n = \mathrm{const}<0;$

IV. $U_A(t, x) = \exp t\theta_a(\xi),\ \xi = \dfrac{x}{\exp(t/2)},\quad t>0.$

Функции $\theta_a(\xi)$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые получаются после подстановки $u_A(t, x)$ в (7.2):

$$\text{I.}\quad \theta_a\theta_a'' + \frac{1}{2}\theta_a'\xi = 0, \tag{7.4}$$

$$\text{II.}\quad \theta_a\theta_a'' + \frac{1+m}{2}\theta_a'\xi - m\theta_a = 0, \tag{7.5}$$

$$\text{III.}\quad \theta_a\theta_a'' - \frac{1+n}{2}\theta_a'\xi + n\theta_a = 0, \tag{7.6}$$

$$\text{IV.}\quad \theta_a\theta_a'' + \frac{1}{2}\theta_a'\xi - \theta_a = 0,\quad 0<\xi<\xi^*, \tag{7.7}$$

а также краевым условиям

$$\theta_\alpha(0) = 1,\quad \theta_\alpha(\xi^*) = a^*. \tag{7.8}$$

Здесь $0<\xi^*<+\infty$ и $a^*\in(0, 1)$ — постоянные. Отметим, что ни одно из ука-

[12] Отметим, что функции I—IV вместе с $U_A(t, x) = \theta_A(t+x)$, $U_A(t, x) = (1-t)^{-1}\theta_A(x+\ln(1-t))$ исчерпывают весь набор подходящих нетривиальных решений уравнения (7.2) (или, что то же самое, (7.1)), инвариантных относительно локальной группы Ли точечных преобразований [3].

занных инвариантных решений $u_A=\ln U_A$ за исключением решения I (см. [4]) не может быть определено при всех $x\in R_+^1$ так, чтобы $u_A(t, +\infty)=0$. Поэтому для реализации этих решений необходимо дополнительное краевое условие на подвижной правой границе. Это выражается равенством $\theta_\alpha(\xi^*)=a^*>0$ в (7.8).

В дальнейшем будем считать, что решения уравнений (7.4)—(7.7), удовлетворяющие условиям (7.8), существуют, причем $\theta_\alpha'(\xi)<0$ при $\xi\in(0, \xi^*)$. Отметим, что заменой $\eta=\ln\xi$, $\theta_\alpha=\xi^2\varphi(\eta)$ эти уравнения сводятся к автономному виду. Поэтому возможен их анализ на фазовой плоскости.

П. а. р. уравнения (7.2) будем искать в следующем виде:

$$U_a(t, x)=\psi_\pm(t)\,\theta_a(\xi),\quad \xi=\frac{x}{\varphi(t)}, \tag{7.9}$$

где положительные функции $\theta_\alpha(\xi)\in C^2([0, \xi^*])$ и $\varphi(t)\in C^1$ являются неизвестными и подлежат в дальнейшем определению. Потребуем, чтобы $\theta_\alpha(0)=1$, $\theta_\alpha(\xi^*)=\alpha^*\in(0, 1)$; $\theta_\alpha'(\xi)\leqslant 0$, $\xi\in(0, \xi^*)$. Тогда п. а. р. (7.9) будет удовлетворять условию (7.3) или (7.3′), а также одному из краевых условий на подвижной правой границе

$$U(t, x^*(t))=a^*\psi_+(t),\quad t>0; \tag{7.10}$$

$$U(t, x^*(t))=a^*\psi_-(t),\quad t\in(0, 1), \tag{7.10′}$$

где $x^*(t)=\xi^*\varphi(t)$. Нетрудно убедиться, что функции (7.9) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=\psi_\pm'(t)\,\theta_a-\left(\psi_\pm\frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t)\,\frac{d\theta_a}{d\xi}\,\xi, \tag{7.11}$$

которое легко привести к такому виду:

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=\left(\frac{\psi_\pm'}{\psi_\pm}\right)(t)\,U_a-\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t)\,\frac{\partial U_a}{\partial x}\,x. \tag{7.11′}$$

Итак, рассмотрим краевые задачи (7.2), (7.3), (7.10) и (7.2), (7.3′), (7.10′). Без ограничения общности в дальнейшем будем полагать

$$U(0, x)\equiv U_a(0, x)=\psi_\pm(0)\,\theta_a\left(\frac{x}{\varphi(0)}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant a^*\varphi(0).$$

Кроме того, будем считать, что $\psi_\pm(0)a^*\geqslant 1$. Тогда, как нетрудно убедиться, всюду выполнены неравенства $U_a(t, x)\geqslant 1$, $U(t, x)\geqslant 1$. Поэтому определено (неотрицательное) п. а. р. исходного уравнения (7.1)

$$u_a(t, x)=\ln U_a=\ln[\psi_\pm(t)\,\theta_a(\xi)], \tag{7.12}$$

а также автомодельное представление решения $u(t, x)$ — функция

$$\theta(t,\xi)=\frac{1}{\psi_\pm(t)}\,U(t, \xi\varphi(t))=\exp[u(t, \xi\varphi(t))-\varkappa_\pm(t)]. \tag{7.13}$$

Будет показано, что при специальном выборе функции $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ автомодельное представление $\theta(t, \xi)$ асимптотически (т. е. при $t\to+\infty$ или $t\to 1^-$) сходится к $\theta_a(\xi)$, что обеспечивает «близость» решения рассматриваемых задач к п. а. р. (7.9).

Построение полной системы п. а. р. распадается на три случая.

1. Приближенные автомодельные решения типа I.

Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (7.2), (7.3), (7.10) с краевыми условиями, определенными при всех $t>0$.

Теорема 7.1. *Пусть функция* ψ_+ *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi'_+}\right]'(t)\to+\infty,\quad t\to+\infty. \tag{7.14}$$

Тогда

$$\varphi(t)=\left[\varphi_0+\int_0^t\psi_+(\tau)\,d\tau\right]^{1/2},\quad t>0, \tag{7.15}$$

где $\varphi_0>0$ *—произвольная постоянная, функция* $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.4), (7.8), *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_1= \\ =O\left\{\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t\left(\frac{\psi'_+\varphi}{\psi_+}\right)(\tau)\,d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0. \tag{7.16}$$

Замечание. В силу (7.4) имеет место равенство $\theta'_a(\xi)\xi=-2\theta_a(\xi)\theta''_a(\xi)$, подставляя которое в (7.11), убеждаемся, что в условиях теоремы п. а. р. (7.9) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=U_a\frac{\partial^2U_a}{\partial x^2}+\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t)U_a. \tag{7.17}$$

Отметим, что для п. а. р. (7.12) здесь получается уравнение

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\mathbf{B}(t,u)=\mathbf{C}_\infty(u)+\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t), \tag{7.17'}$$

которое отличается от исходного (7.1) дополнительным членом в правой части.

Доказательство. Сопоставляя (7.17) с (7.2), убеждаемся, что U_a является верхним решением уравнения (7.2), и поэтому $w(t,x)=U_a(t,x)-U(t,x)\geqslant0$ всюду в $\mathbf{R}_+^1\times(0,x^*(t))$. Поделим обе части уравнений (7.2) и (7.17) на U и U_a соответственно, а затем вычтем первое из второго. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{U_a}{U}=w_{xx}+\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t).$$

Интегрируя обе части этого равенства по x от 0 до $x^*(t)=\xi^*\varphi(t)$, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}\left\|\ln\frac{U_a(t,x)}{U(t,x)}\right\|_1=w_x|_0^{x^*(t)}+\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t)\xi^*\varphi(t). \tag{7.18}$$

Поскольку $w(t,x)\geqslant0$ при $x\in(0,x^*(t))$ и $w(t,0)=w(t,x^*(t))=0$ при любых $t\geqslant0$, $w_x|_0^{x^*(t)}\leqslant0$. Поэтому из (7.18) получаем

$$\left\|\ln\frac{U_a(t,x)}{U(t,x)}\right\|_1\leqslant\xi^*\int_0^t\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\varphi\right)(\tau)\,d\tau. \tag{7.19}$$

Таблица 10

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$\ln^\alpha \ln(\gamma+t),\ \ \alpha>0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} \ln t$
$\ln^\alpha(\gamma+t),\ \ \alpha>0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} t$
$\exp[\ln^\alpha(\gamma+t)],\ \ 0<\alpha<1$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\ln^\alpha t\right]$
$\ln(\gamma+t)\exp[\ln^\alpha(\gamma+t)],\ 0<\alpha<1$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} t \exp\left[\frac{1}{2}\ln^\alpha t\right]$
$\exp\left[\frac{\ln(\gamma+t)}{\ln^\alpha \ln(\gamma+t)}\right],\ \ \alpha>0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{\ln t}{\ln^\alpha \ln t}\right]$

Учитывая, что $U_a \geqslant U$, имеем

$$\ln\frac{U_a}{U} = (U_a - U)\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho U_a + (1-\rho)U} \geqslant \frac{|U_a - U|}{\psi_+(t)}.$$

С помощью этого неравенства, а также тождества [13] $\|U_a - U\|_1 = \psi_+(t)\varphi(t)\|\theta(t,\xi) - \theta_a(\xi)\|_1$, из (7.19) выводим оценку

$$\|\theta(t,\xi) - \theta_a(\xi)\|_1 \leqslant \frac{\xi^*}{\varphi(t)}\int_0^t \left(\frac{\psi_+'\varphi}{\psi_+}\right)(\tau)\,d\tau, \tag{7.20}$$

которая при больших t совпадает с (7.16). Покажем, что правая часть (7.20) стремится к нулю при $t\to+\infty$. Последовательно раскрывая возникающие неопределенности, с учетом (7.15) получаем следующую цепочку соотношений:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t\left(\frac{\psi_+'\varphi}{\psi_+}\right)(\tau)\,d\tau = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\psi_+'\varphi}{\psi_+\varphi'}\right)(t) =$$

$$= 2\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\psi_+'}{\psi_+^2}\right)(t)\int_0^t \psi_+(\tau)\,d\tau = 2\left\{1 + \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right)(t)\right\}^{-1}.$$

Отсюда в силу (7.14) заключаем, что $\|\theta - \theta_a\|_1 \to 0$ при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

В таблице 10 анализируются некоторые конкретные случаи применения теоремы 7.1. Постоянную $\gamma>0$ при этом следует выбирать достаточно большой так, чтобы $\psi_+(0)a^* \geqslant 1$. Отметим, что при выполнении условия (7.14) функция $\varphi(t)$ в (7.15) может быть оценена по формуле

$$\varphi(t) \cong t^{1/2}\varphi_+^{1/2}(t), \quad t\to+\infty.$$

[13] Здесь

$$\|\theta(t,\xi) - \theta_a(\xi)\|_1 = \int_0^{\xi^*} |\theta(t,\xi) - \theta_a(\xi)|\,d\xi.$$

Действительно, имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^{1/2}\psi_+^{1/2}(t)}{\varphi(t)}\right]^2=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\psi_+(t)}{\int\limits_0^t\psi_+(\tau)\,d\tau}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[1+t\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)}\right]=1+\lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right)'(t)\right]^{-1}=1.$$

2. Приближенные автомодельные решения типа II и III.

2.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (7.2), (7.3), (7.10).

Теорема 7.2. *Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\to\frac{1}{m},\quad t\to+\infty;\quad m=\mathrm{const}>0. \tag{7.21}$$

Тогда

$$\varphi(t)=\left[m\frac{\psi_+^2(t)}{\psi_+'(t)}\right]^{1/2},\quad t>0, \tag{7.22}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.5), (7.8) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_1=$$

$$=O\left\{\frac{1}{\varphi(t)}\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,|G_+(\tau)|\,d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0, \tag{7.23}$$

где $G_+(t)=[\ln(\psi_+^l/\varphi)]'(t)$, $l=(1+m)/2m$.

Замечание. Из (7.5) следует, что $\theta_a=\frac{1}{m}\theta_a\theta_a''+\frac{1+m}{2m}\theta_a'\xi$. Подставляя это равенство в (7.11), для п. а. р. (7.9) получаем уравнение

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=U_a\frac{\partial^2U_a}{\partial x^2}+G_+(t)\frac{\partial U_a}{\partial x}x. \tag{7.24}$$

Отметим, что из (7.5) вытекает также равенство $\theta_a'\xi=-\frac{2}{1+m}\theta_a\theta_a''+$ $+\frac{2m}{1+m}\theta_a$, подставляя которое в (7.11), получаем

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=\frac{2}{1+m}\left(\frac{\varphi\varphi'}{\psi_+}\right)(t)\,U_a\frac{\partial^2U_a}{\partial x^2}+\frac{2m}{1+m}G_+(t)\,U_a. \tag{7.24$'$}$$

Если функцию $\varphi(t)$ определить по асимптотически эквивалентной (7.22) формуле

$$\varphi(t)=\left[\varphi_0+(1+m)\int\limits_0^t\psi_+(\tau)\,d\tau\right]^{1/2},\quad\varphi_0=\mathrm{const}>0.$$

то (7.24′) примет более простой вид

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=U_a\frac{\partial^2U_a}{\partial x^2}+\frac{2m}{1+m}G_+(t)\,U_a.$$

Теорема 7.2 доказывается так же, как предыдущая. При этом без ограничения общности функцию $G_+(t)$ можно считать знакопостоянной (в

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$(\gamma+t)^m \ln^\alpha \ln(\gamma+t)$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} \ln t$
$(\gamma+t)^m \ln^\alpha(\gamma+t)$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} t$
$(\gamma+t)^m \exp[\ln^\alpha(\gamma+t)],\quad 0<\alpha<1$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\ln^\alpha t\right]$
$(\gamma+t)^m \exp\left[\frac{\ln(\gamma+t)}{\ln^\alpha \ln(\gamma+t)}\right],\ \alpha>0$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{\ln t}{\ln^\alpha \ln t}\right]$

противном случае она мажорируется сверху и снизу знакопостоянными функциями). Тогда, как следует из (7.24), в случае $G_+\leqslant 0$ функция U_a будет верхним решением уравнения (7.2) (т. е. $U_a\geqslant U$), а при $G_+\geqslant 0$— нижним решением (т. е. $U_a\leqslant U$). Некоторые конкретные случаи применения теоремы 7.2 указаны в таблице 11.

2.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача (7.2), (7.3′), (7.10′).

Теорема 7.3. *Пусть функция* ψ_- *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t)\to\frac{1}{n},\quad t\to 1^-;\quad n=\mathrm{const}<0. \tag{7.25}$$

Положим

$$\varphi(t)=\left[(-n)\frac{\psi_-^2(t)}{\psi_-'(t)}\right]^{1/2},\quad t\in(0,1). \tag{7.26}$$

Пусть

$$\varphi(t)\to+\infty,\quad t\to+\infty. \tag{7.27}$$

Тогда функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.6), (7.8) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_1=$$
$$=O\left\{\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t\varphi(\tau)\,|G_-(\tau)|\,d\tau\right\}\underset{t\to 1^-}{\to}0, \tag{7.28}$$

где $G_-(t)=[\ln(\psi_-^l/\varphi)]'(t)$, $l=(1+n)/2n$.

Замечание 1. Из (7.6) следует, что $\theta_a=-\frac{1}{n}\theta_a\theta_a''+\frac{1+n}{2n}\theta_a'\xi$. Подставив это равенство в (7.11), получим, что в условиях теоремы п. а. р. (7.9) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=U_a\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}+G_-(t)\frac{\partial U_a}{\partial x}x.$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что условие (7.27) будет заведомо выполнено, если $n<-1$. Если же $n>-1$ в (7.25), то (7.27) не имеет места (здесь $\varphi(1^-)=0$). Отметим, что именно отсутствие (7.27) не позволяет построить (точнее, доказать сходимость в L^1) п. а. р. типа I, отвечающие граничным режимам с обострением (см. предыдущий пункт).

Теорема 7.3 доказывается точно так же, как теорема 7.1. В таблице 12 даны асимптотические значения функций $\varphi(t)$ при некоторых

Таблица 12

$\psi_-(t)$	$\varphi(t)$
$[\gamma+(1-t)^n]\ln^\alpha\ln[\gamma+(1-t)^{-1}]$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n}{2}}\ln^{\frac{\alpha}{2}}\lvert\ln(1-t)\rvert$
$[\gamma+(1-t)^n]\ln^\alpha\ln[\gamma+(1-t)^{-1}]$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n}{2}}\lvert\ln(1-t)\rvert^{\frac{\alpha}{2}}$
$[\gamma+(1-t)^n]\exp\{\ln^\alpha[\gamma+(1-t)^{-1}]\},\ 0<\alpha<1$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n}{2}}\exp\left\{\frac{1}{2}\lvert\ln(1-t)\rvert^\alpha\right\}$
$[\gamma+(1-t)^n]\exp\left\{\frac{\ln[\gamma+(1-t)^{-1}]}{\ln^\alpha\ln[\gamma+(1-t)^{-1}]}\right\},\ \alpha>0$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n}{2}}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\lvert\ln(1-t)\rvert}{\ln^\alpha\lvert\ln(1-t)\rvert}\right\}$

граничных режимах с обострением, удовлетворяющих (7.25). Условие (7.27) здесь выполняется, если $n\leqslant-1$, причем в случае $n=-1$ параметр α в функциях, расположенных в первых двух строчках таблицы, необходимо выбирать положительным.

Рассмотрим более подробно граничный режим, указанный во второй строке таблицы 12, при $n=-1$

$$\psi_-(t)=[\gamma+(1-t)^{-1}]\ln^\alpha[\gamma+(1-t)^{-1}],\quad t\in(0,1). \tag{7.29}$$

Здесь $\alpha>0$ — постоянная. Ему отвечает п. а. р. (7.9), где

$$\varphi(t)\cong\ln^{\alpha/2}[(1-t)^{-1}],\quad t\to1^-, \tag{7.30}$$

и $\theta_a(\xi)=1+\left[\left(a^*-1+\frac{1}{2}\xi^*\right)/\xi^*\right]\xi-\frac{1}{2}\xi^2$, причем $\xi^*<2(1-a^*)$ (последнее условие обеспечивает монотонность функции θ_a).

Только в одном частном случае $\alpha=2$ оценка (7.30), характеризующая асимптотическое поведение решения, может быть получена на основе анализа точного инвариантного решения уравнения (7.2). Оно имеет вид

$$U_A(t,x)=(1-t)^{-1}\theta_A[x+\ln(1-t)]. \tag{7.31}$$

Подставив (7.31) в (7.2), для функции θ_A получим уравнение

$$\theta_A\theta_A''+\theta_A'-\theta_A=0,\ \xi\in\mathbf{R}^1.$$

Отсюда имеем $\theta_A(\xi)\cong\xi^2/2$ при $\xi\to+\infty$, и поэтому

$$U_A(t,0)=(1-t)^{-1}\theta_A[\ln(1-t)]\cong$$
$$\cong\frac{1}{2}(1-t)^{-1}\ln^2(1-t),\quad t\to1^-,$$

что по «порядку величины» совпадает с (7.29) при $\alpha=2$. Отметим, что в рассматриваемом случае функции $\theta_a(\xi)$ в (7.9) и $\theta_A(\xi)$ в (7.31) имеют похожие пространственные профили.

3. Приближенные автомодельные решения типа IV.

3.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (7.2), (7.3), (7.10). Следующее утверждение доказывается точно так же, как теорема 7.1.

Теорема 7.4. *Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\to0,\quad t\to+\infty. \tag{7.32}$$

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$(\gamma+t)^{\ln^{\alpha}\ln(\gamma+t)}$, $\alpha>0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{\alpha}{2}} \ln t \, t^{\frac{1}{2}\ln^{\alpha}\ln t}$
$(\gamma+t)^{\alpha}\exp(\gamma+t)$	$\cong t^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}t\right)$
$\exp[\ln^{\alpha}(\gamma+t)]$, $\alpha>1$	$\cong \alpha^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1-\alpha}{2}} t \exp\left[\frac{1}{2}\ln^{\alpha} t\right]$
$\exp[(\gamma+t)\ln^{\alpha}(\gamma+t)]$	$\cong \ln^{-\frac{\alpha}{2}} t \exp\left[\frac{1}{2} t \ln^{\alpha} t\right]$
$\exp[(\gamma+t)^{\alpha}]$, $\alpha>0$	$\cong \alpha^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1-\alpha}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}t^{\alpha}\right]$
$\exp[\exp(\gamma+t)]$	$\cong \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\exp\left[\frac{1}{2}\exp t\right]$
$\exp[(\gamma+t)^{(\gamma+t)}]$	$\cong (\ln t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{t}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}t^{t}\right]$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[\frac{\psi_+^2(t)}{\psi_+'(t)}\right]^{1/2}, \quad t>0, \tag{7.33}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.7), (7.8) *и справедлива оценка скорости сходимости* (7.23), *где* $G_+(t) = [\ln(\psi_+^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Из (7.7) имеем $\theta_a = \theta_a\theta_a'' + \frac{1}{2}\theta_a'\xi$. Подставив это равенство в (7.11), с учетом (7.33) получим, что п. а. р. (7.9) удовлетворяет уравнению (7.24), где $G_+(t) = [\ln(\psi_+^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Из (7.32) и (7.33) непосредственно следует, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (7.27), которое необходимо для доказательства сходимости. Отметим, что функцию φ в данном случае можно определить асимптотически эквивалентным образом

$$\varphi(t) = \left[\varphi_0 + \int_0^t \psi_+(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}, \quad \varphi_0 = \mathrm{const} > 0.$$

В таблице 13 рассмотрены некоторые конкретные применения теоремы 7.4.

3.2. Г р а н и ч н ы й р е ж и м с о б о с т р е н и е м. Ниже построены п. а. р. задачи (7.2), (7.3′), (7.10′).

Т е о р е м а 7.5. *Пусть функция* ψ_- *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t) \to 0, \quad t\to+\infty. \tag{7.34}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[\frac{\psi_-^2(t)}{\psi_-'(t)}\right]^{1/2}, \quad t\in(0,1), \tag{7.35}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.7), (7.8) *и справедлива оценка скорости сходимости* (7.28), *где* $G_-(t) = [\ln(\psi_-^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

Таблица 14

$k(u)$	$k^{-1}(u)$	$\Phi_k(u)$
$\exp[\ln^{\alpha}(1+u)],\ \alpha>1$	$\cong \exp[\ln^{\frac{1}{\alpha}} u]$	>0
$\ln^{\alpha}(A+u)\exp(A+u)$	$\cong \ln u-\alpha\ln\ln\ln u$	$>0,\ \alpha>0$ $<0,\ \alpha<0$
$(A+u)^{\alpha}\exp(A+u)$	$\cong \ln u-\alpha\ln\ln u$	$>0,\ \alpha>0$ $<0,\ \alpha<0$
$\exp[(A+u)\ln^{\alpha}(A+u)]$	$\cong \ln u\ln^{-\alpha}\ln u$	$<0,\ \alpha>0$ $>0,\ \alpha<0$
$\exp(u^{\alpha}),\ \alpha>0$	$\ln^{\frac{1}{\alpha}} u$	$<0,\ \alpha>1$ $>0,\ \alpha<1$
$\exp(\exp u)$	$\ln\ln u$	<0
$\exp[(A+u)^{(A+u)}]$	$\cong \ln\ln u\ln^{-1}\ln\ln u$	<0

Конкретные примеры использования теоремы 7.5 легко построить с помощью таблицы 13 путем формальной замены $t\to(1-t)^{-1}$. Отметим, что при выполнении условия (7.34) функция $\varphi(t)$ неограниченно возрастает при $t\to 1^-$.

§ 8. Приближенные автомодельные решения уравнений с произвольными (неэкспоненциальными) нелинейностями

В этом параграфе на основе результатов, полученных в § 7, будут построены широкие классы п. а. р. уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathbf{A}(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{8.1}$$

с коэффициентами $k(u)$ произвольного (неэкспоненциального) вида.

В дальнейшем функцию $k(u)$ будем считать монотонно возрастающей, причем $k(0)=k_0\geqslant 0$, $k(+\infty)=+\infty$. Через k^{-1}: $[k_0, +\infty)\to[0, +\infty)$ обозначим функцию, обратную к k. Также будем считать выполненным следующее условие:

$$\Phi_k(u)=\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]'\to 0, \quad u\to+\infty. \tag{8.2}$$

Кроме того, потребуем, чтобы при любых $\xi\in(0, 1)$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{k'(k^{-1}(u))}{k'(k^{-1}(\xi u))}=\frac{1}{\xi}. \tag{8.3}$$

В дальнейшем (по мере надобности) на функцию $\Phi_k(u)$ будет накладываться дополнительное условие ее знакоопределенности при $u>0$.

Некоторые коэффициенты $k(u)$, удовлетворяющие условиям (8.2) и (8.3), приведены в таблице 14. Величина постоянной $A>0$ в некоторых из этих функций выбирается так, чтобы $k(u)$ были определены, положительны и строго монотонны при $u>0$, а также обладали знакопостоянными функциями Φ_k (знак Φ_k указан в третьей графе таблицы). Во второй графе приведены главные члены асимптотических разложений функций $k^{-1}(u)$ при больших u (в явном виде k^{-1} часто не вычисляются). Все эти данные понадобятся при построении п. а. р. в конкретных случаях

П. а. р. уравнения (8.1) будем искать в виде

$$u_a(t,x)=k^{-1}(\psi_\pm(t)\,\theta_a(\xi)),\quad \xi=\frac{x}{\varphi(t)}\,, \tag{8.4}$$

где функции $U_a(t, x)=\psi_\pm(t)\theta_a(\xi)$ являются п. а. р. уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,, \tag{8.5}$$

построенными в предыдущем параграфе. Отметим, что в случае $k(u)=\exp u$ выражение (8.4) совпадает с (7.12). Предполагается, что $\theta_a(0)=1$, $\theta_a(\xi^*)=a^*\in(0, 1)$, $\theta_a'(\xi)<0$ для всех $\xi\in(0, \xi^*)$, причем $\psi_\pm(0)a^*\geqslant k_0$. Поэтому п. а. р. (84) удовлетворяет одной из двух следующих пар краевых условий:

$$u(t,0)=k^{-1}(\psi_+(t)),\ t>0,$$
$$u(t,x^*(t))=k^{-1}(a^*\psi_+(t)),\ t>0, \tag{8.6}$$

или

$$u(t,0)=k^{-1}(\psi_-(t)),\ t\in(0,1),\ u(t,x^*(t))=k^{-1}(a^*\psi_-(t)),\ t\in(0,1), \tag{8.6$'$}$$

где $x^*(t)=\xi^*\varphi(t)$.

Обозначим через $\theta(t, \xi)$ автомодельное представление решения уравнения (8.1), определяемое пространственно-временной структурой соответствующего п. а. р. (8.4)

$$\theta(t,\xi)=\frac{1}{\psi_\pm(t)}k(u(t,\xi\varphi(t))),\quad \xi\in(0,\xi^*). \tag{8.7}$$

Будет показано, что при специальном выборе функций $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ имеет место сходимость

$$\|\theta(t,\ \xi)-\theta_a(\xi)\|_1\to 0 \tag{8.8}$$

при $t\to+\infty$ или $t\to 1^-$. Это обеспечивает асимптотическую «близость» решения рассматриваемой задачи и п. а. р. (8.4). В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что

$$u(0,x)=k^{-1}\left(\psi_\pm(0)\,\theta_a\left(\frac{x}{\varphi(0)}\right)\right),\qquad 0<x<\xi^*\varphi(0) \tag{8.9}$$

(напомним, что $\psi_\pm(0)a^*\geqslant k_0$, так что (8.9) имеет смысл).

Ниже приведено подробное доказательство сходимости в смысле (8.8) решения задачи (8.1), (8.6), (8.9) к п. а. р. (8.4) типа I (см. теорему 7.1). Доказательства аналогичных утверждений, относящиеся к п. а. р. других типов, легко восстанавливаются по указанной схеме с использованием теорем 7.2—7.5.

1. Приближенные автомодельные решения типа I. Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (8.1), (8.6), (8.9), где функция $\psi_+(t)$ в (8.6) удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\to+\infty,\quad t\to+\infty. \tag{8.10}$$

Тогда, как следует из теоремы 7.1,

$$\varphi(t)=\left[\varphi_0+\int_0^t\psi_+(\tau)\,d\tau\right]^{1/2},\quad t>0 \tag{8.11}$$

(здесь $\varphi_0>0$—произвольная постоянная), и $\theta_a(\xi)$ является решением задачи

$$\theta_a\theta_a'' + \frac{1}{2}\theta_a'\xi = 0,\ 0 < \xi < \xi^*, \quad \theta_a(0) = 1,\ \theta_a(\xi^*) = a^*. \tag{8.12}$$

При этом функция $U_a(t, x) = \psi_+(t)\theta_a(\xi)$ (п. а. р. уравнения (8.5)) удовлетворяет уравнению (см. (7.17))

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + \left(\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right)(t)U_a. \tag{8.13}$$

Полагая в (8.13) $U_a = k(u_a)$, для п. а. р. (8.4) получаем следующее параболическое уравнение:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{B}(t, u_a) = \mathbf{A}(u_a) -$$

$$- k'(u_a)\Phi_k(u_a)\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right)(t)\frac{k(u_a)}{k'(u_a)}, \tag{8.14}$$

которое отличается от исходного (8.1) двумя дополнительными членами в правой части.

Теперь мы можем перейти к доказательству основного утверждения этого параграфа.

Теорема 8.1. *Пусть выполняются условия* (8.2), (8.3) *и, кроме того,*

$$\Phi_k(u) = \left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]' \leqslant 0, \quad u > 0. \tag{8.15}$$

Пусть функция ψ_+ *в* (8.6) *удовлетворяет предположению* (8.10).

Тогда $\varphi(t)$ *вычисляется по формуле* (8.11), $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (8.12) *и при* $t \to +\infty$ *выполняется предельное равенство* (8.8).

Доказательство. Положим $z(t, x) = u_a(t, x) - u(t, x)$. Тогда, как следует из (8.1) и (8.14), функция z удовлетворяет в $\mathbf{R}_+^1 \times (0, x^*(t))$ уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = [\mathbf{A}(u_a) - \mathbf{A}(u)] - \tag{8.16}$$

$$- k'(u_a)\Phi_k(u_a)\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right)(t)\frac{k(u_a)}{k'(u_a)},$$

причем $z(0, x) \equiv 0$ и $z(t, 0) = z(t, x^*(t)) = 0$ при всех $t > 0$.

Сопоставляя уравнения (8.14) и (8.1), нетрудно убедиться, что в силу (8.15), а также условия $\psi_+' \geqslant 0$, u_a является верхним решением исходного уравнения. Поэтому

$$u_a(t, x) \geqslant u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R}_+^1 \times (0, x^*(t)). \tag{8.17}$$

Отсюда $|z| = z = u_a - u$.

Проинтегрируем обе части уравнения (8.16) по x от 0 до $x^*(t)$. В результате для функции

$$\|z(t, x)\|_1 = \int_0^{x^*(t)} |z(t, x)|\,dx$$

получим оценку

$$\frac{d}{dt}\|z(t,x)\|_1 \leqslant -\int_0^{x^*(t)} k'(u_a)\Phi_k(u_a)\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2 dx +$$

$$+\left(\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right)(t)\int_0^{x^*(t)} \frac{k(u_a)}{k'(u_a)}dx = I_1(t) + I_2(t). \quad (8.18)$$

При выводе (8.18) учитывается, что в силу (8.17)

$$\left\{k(u_a)\frac{\partial u_a}{\partial x} - k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\Big|_{x=0}^{x=x^*(t)} \leqslant 0. \quad (8.19)$$

Рассмотрим сначала выражение I_1 в (8.18). Полагая $k(u_a)=U_a=$ $=\psi_+(t)\theta_a(\xi)$, с учетом неравенства (8.15) получаем

$$I_1(t) = -\int_0^{x^*}\left[\frac{U_a}{k'(k^{-1}(U_a))}\right]'_{U_a}\frac{\partial U_a}{\partial x}\left(\frac{\psi_+}{\varphi}\right)(t)\frac{d\theta_a}{d\xi}dx \leqslant$$

$$\leqslant m_a\left(\frac{\psi_+}{\varphi}\right)(t)\int_0^{x^*}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U_a}{k'(k^{-1}(U_a))}\right]dx =$$

$$= m_a\left(\frac{\psi_+}{\varphi}\right)(t)\left[\frac{a^*\psi_+(t)}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+(t)))} - \frac{\psi_+(t)}{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}\right], \quad (8.20)$$

где

$$m_a = \max_{\xi\in[0,\xi^*]}\left|\frac{d\theta_a}{d\xi}(\xi)\right| < +\infty.$$

Используя (8.15), для $I_2(t)$ выводим такую оценку:

$$I_2(t) \leqslant \xi^*\left(\frac{\varphi\psi_+'}{\psi_+}\right)(t)\frac{a^*\psi_+(t)}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+(t)))}. \quad (8.21)$$

Из (8.18) следует, что

$$\|z(t,x)\|_1 \leqslant \int_0^t \{I_1(\tau) + I_2(\tau)\}d\tau, \quad t > 0. \quad (8.22)$$

Нетрудно видеть, что

$$|z(t,x)| = |k^{-1}(U_a) - k^{-1}(U)| =$$

$$= |U_a - U|\int_0^1 \frac{d\rho}{k'[k^{-1}(\rho U_a + (1-\rho)U)]}. \quad (8.23)$$

Неравенство (8.2) означает, что

$$\frac{k''(u)k(u)}{k'^2(u)} \to 1 \quad \text{при } u \to +\infty.$$

Отсюда получаем, что $k''(u)>0$ (т. е. функция $k'(u)$ является возрастающей) при всех достаточно больших $u>0$. Тогда из (8.23) при $t\to+\infty$ имеем

$$|z| \geqslant |U_a - U|\frac{1}{k'[k^{-1}(\psi_+(t))]}. \quad (8.23')$$

Отсюда в силу равенства

$$\|U_a(t,x) - U(t,x)\|_1 = \psi_+(t)\varphi(t)\|\theta_a(\xi) - \theta(t,\xi)\|_1$$

заключаем, что при всех достаточно больших t

$$\|\theta_a(\xi)-\theta(t,\xi)\|_1\leqslant J_1(t)+J_2(t), \tag{8.24}$$

где

$$J_1(t)=m_a\frac{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}{\psi_+(t)}\frac{1}{\varphi(t)}\times$$
$$\times\int_0^t\frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)}\left[\frac{a^*\psi_+(\tau)}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+(\tau)))}-\frac{\psi_+(\tau)}{k'(k^{-1}(\psi_+(\tau)))}\right]d\tau,$$

$$J_2(t)=\xi^*a^*\frac{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}{\psi_+(t)}\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)\,\psi_+'(\tau)}{\psi_+(\tau)}\frac{\psi_+(\tau)}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+(\tau))]}d\tau.$$

Покажем, что $J_i(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, $i=1, 2$. Предварительно заметим, что в силу (8.10) справедливы следующие асимптотически точные равенства:

$$\varphi(t)\cong\psi_+^{1/2}(t)\,t^{1/2},\quad t\to+\infty, \tag{8.25}$$

$$\int_0^t\frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau\cong 2\psi_+^{1/2}(t)\,t^{1/2},\quad t\to+\infty. \tag{8.26}$$

Рассмотрим выражение $J_1(t)$. Покажем сначала, что при больших t

$$\int_0^t\frac{\psi_+}{\varphi}\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))}d\tau\cong\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))}\int_0^t\frac{\psi_+}{\varphi}d\tau. \tag{8.27}$$

Действительно, последовательно раскрывая с помощью (8.25) и (8.26) возникающие неопределенности, получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{\psi_+}{\varphi}\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))}d\tau\left(\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))}\int_0^t\frac{\psi_+}{\varphi}d\tau\right)^{-1}=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left\{1+2t\frac{\psi_+'}{\psi_+}\left[\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))}\right]_{\psi_+}'k'(k^{-1}(\psi_+))\right\}^{-1}=$$
$$=\left\{1+2\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(\psi_+/\psi_+')}\times\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]'\right\}^{-1}.$$

Однако в силу (8.10)

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(\psi_+/\psi_+')(t)}=\lim_{t\to+\infty}\left\{\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\right\}^{-1}=0,$$

что вместе с (8.2) обеспечивает справедливость (8.27). В силу (8.27) и такого же асимптотического равенства

$$\int_0^t\frac{\psi_+}{\varphi}\frac{a^*\psi_+}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+)]}d\tau\cong\frac{a^*\psi_+}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+)]}\int_0^t\frac{\psi_+}{\varphi}d\tau$$

выражение для J_1 принимает вид

$$J_1(t)\cong m_a a^*\left[\frac{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+(t)))}-\frac{1}{a^*}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t\frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau,\quad t\to+\infty. \tag{8.28}$$

Однако в силу (8.25) и (8.26)

$$\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t \frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)}\,d\tau \to 2$$

при $t \to +\infty$. Поэтому, как следует из (8.28), предположение (8.3) обеспечивает справедливость равенства $J_1(+\infty)=0$.

Перейдем теперь к анализу выражения $J_2(t)$. Предварительно покажем, что

$$\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\,\psi_+'(\tau)}{\psi_+(\tau)}\,d\tau \to 0, \quad t\to+\infty. \tag{8.29}$$

С учетом (8.10) и (8.11) имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varphi}\int_0^t \frac{\varphi\psi_+'}{\psi_+}\,d\tau = \lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi\psi_+'}{\varphi'\psi_+} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2\varphi^2\psi_+'}{2\varphi\varphi'\psi_+} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 2\frac{\psi_+'}{\psi_+^2}\int_0^t \psi_+ d\tau = 2\lim_{t\to+\infty}\left\{1+\left(\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right)'\right\}^{-1} = 0.$$

С помощью (8.29) нетрудно показать, что

$$\int_0^t \frac{\varphi\psi_+'}{\psi_+}\,\frac{\psi_+}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+)]}\,d\tau \cong \frac{\psi_+}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+)]}\int_0^t \frac{\varphi\psi_+'}{\psi_+}\,d\tau \tag{8.30}$$

при $t\to+\infty$ ((8.30) доказывается примерно так же, как (8.27)). Тогда выражение $J_2(t)$ при достаточно больших t принимает вид

$$J_2(t) \cong \xi^* a^* \frac{k'[k^{-1}(\psi_+(t))]}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+(t))]}\,\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\,\psi_+'(\tau)}{\psi_+(\tau)}\,d\tau.$$

Отсюда в силу (8.29) и условия (8.3) заключаем, что

$$J_2(t) \cong \xi^* \frac{1}{\varphi}\int_0^t \frac{\varphi\psi_+'}{\psi_+}\,d\tau \to 0 \quad \text{при } t\to+\infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. Оценка скорости сходимости, полученная при доказательстве теоремы, имеет вид

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_1 = O\left\{\left[\frac{k'[k^{-1}(\psi_+(t))]}{k'[k^{-1}(a^*\psi_+(t))]} - \frac{1}{a^*}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\,\psi_+'(\tau)}{\psi_+(\tau)}\,d\tau\right\} \to 0, \quad t\to+\infty.$$

Рассмотрим один конкретный случай применения теоремы 8.1.

Пример 10. Пусть $k(u)=(\alpha+u)^{-\alpha}\exp(\alpha+u)$, где $\alpha>0$ — фиксированная постоянная. Нетрудно видеть, что условия (8.2), (8.3) и (8.15) здесь выполнены. Пусть $\psi_+(t)=\ln(\gamma+t)$ ((8.10) также справедливо), т. е., как следует из (8.6),

$$u(t,\ 0)=k^{-1}(\psi_+(t))\cong\ln\ln t+\alpha\ln\ln\ln t,\quad t\to+\infty$$

(функция k^{-1} определена в таблице 14). Поэтому из доказанной теоремы получаем, что $\varphi(t)$ в п. а. р. (8.4) имеет вид

$$\varphi(t)\cong t^{1/2}\ln^{1/2}t,\quad t\to+\infty.$$

2. Приближенные автомодельные решения типа II и III.

2.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (8.1), (8.6), (8.9), где функция $\psi_+(t)$ в (8.6) удовлетворяет условию (7.21). Тогда, как показано в теореме 7.2, п. а.р. уравнения (8.5) — функция $U_a=\psi_+(t)\theta_a(\xi)$ — удовлетворяет следующему параболическому уравнению:

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=U_a\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}+G_+(t)\frac{\partial U_a}{\partial x}x. \tag{8.31}$$

Здесь

$$G_+(t)=\left\{\ln\left[\frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]\right\}'(t),\ t>0;\quad l=\frac{1+m}{2m}. \tag{8.32}$$

Нетрудно убедиться, подставляя в (8.32) функцию φ из (7.22), что

$$G_+(t)=\frac{1}{2}\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)}\left\{\frac{1}{m}-\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\right\},\quad t>0. \tag{8.32$'$}$$

Поскольку $U_a=k(u_a)$, из (8.31) получаем для п. а. р. (8.4) уравнение

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\mathbf{B}(t,u_a)=\mathbf{A}(u_a)-k'(u_a)\Phi_k(u_a)\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2+G_+(t)\frac{\partial u_a}{\partial x}x. \tag{8.33}$$

Теорема 8.2. *Пусть выполняются условия* (8.2), (8.3) *и пусть функция* ψ_+ *в* (8.6) *удовлетворяет предположению* (7.21). *Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих двух условий: или*

$$\Phi_k(u)\leqslant 0,\ u>0;\quad G_+(t)\leqslant 0,\ t>0, \tag{8.34}$$

или

$$\Phi_k(u)\geqslant 0,\ u>0;\quad G_+(t)\geqslant 0,\ t>0. \tag{8.35}$$

Тогда функция φ *вычисляется по формуле* (7.22), $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.5), (7.8) *и при* $t\to+\infty$ *выполняется предельное равенство* (8.8).

Сделаем несколько замечаний об особенностях доказательства этой теоремы. Сопоставление уравнений (8.33) и (8.1) показывает, что условия (8.34) или (8.35) обеспечивают соответственно выполнение неравенств $u_a\geqslant u$ (т. е. $|z|=u_a-u$) или $u_a\leqslant u$ (т. е. $|z|=u-u_a$) всюду в $\mathbf{R}_+^1\times(0,\ x^*(t))$ и тем самым предоставляют возможность проведения доказательства по указанной выше схеме. При этом необходимо учесть, что здесь выражение $I_2(t)$ в (8.18) принимает вид (ниже анализируется случай (8.34))

$$I_2(t)=-|G_+|\int\limits_0^{x^*}\frac{\partial u_a}{\partial x}x\,dx=-|G_+|\int\limits_0^{x^*}\frac{\partial U_a}{\partial x}x\frac{dx}{k'(k^{-1}(U_a))}\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{|G_+(t)|}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))}\int\limits_0^{x^*}\frac{\partial U_a}{\partial x}x\,dx=M_a|G_+|\varphi\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))},$$

$$M_a=\left|\int_0^{\xi^*}\theta_a'\xi d\xi\right|<+\infty.$$

Отсюда, используя асимптотические равенства типа (8.27) и (8.30), а также условия (8.3), (7.23), получаем

$$J_2(t)\leqslant\xi^*a^*M_a\frac{k'(k^{-1}(\psi_+))}{\varphi\psi_+}\int_0^t\frac{\varphi\psi_+|G_+|}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))}d\tau\cong$$

$$\cong M_a\frac{k'(k^{-1}(\psi_+))}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))}\frac{1}{\varphi}\int_0^t\varphi|G_+|d\tau\cong$$

$$\cong\frac{1}{a^*}M_a\frac{1}{\varphi}\int_0^t\varphi|G_+|d\tau\to 0,\quad t\to+\infty.$$

Пример 11. Рассмотрим уравнение (8.1) с коэффициентом $k(u)=\exp(u^\alpha)$, где $\alpha>1$ — постоянная. Условия (8.2), (8.3) при этом выполнены и

$$\Phi_k(u)=\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]'=\frac{(1-\alpha)}{\alpha}u^{2-\alpha}<0,\quad u>0.$$

Пусть $\psi_+(t)=(\gamma+t)/\ln(\gamma+t)$, $\gamma>1$ — постоянная, которая выбирается достаточно большой. Тогда

$$u(t,0)=k^{-1}(\psi_+(t))=\ln^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\frac{(\gamma+t)}{\ln(\gamma+t)}\right\},\quad t>0.$$

Функция $\psi_+(t)$ удовлетворяет условию (7.21) при $m=1$. Кроме того,

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)=1+\frac{\ln(\gamma+t)-2}{[\ln(\gamma+t)-1]^2}>\frac{1}{m}=1,\quad t>0,$$

и поэтому, как следует из (8.32′), $G_+(t)<0$ при всех $t>0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае выполняются условия (8.34). Тогда из теоремы 8.2 заключаем, что задача имеет п. а. р. (8.4), в котором (см. (7.22))

$$\varphi(t)\cong t\ln^{-1/2}t,\quad t\to+\infty.$$

2.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача (8.1), (8.6′), (8.9).

Теорема 8.3. *Пусть выполняются условия* (8.2), (8.3) *и все предположения теоремы* 7.3. *Пусть, кроме того, справедливо одно из следующих двух условий: или*

$$\Phi_k(u)\leqslant 0,\ u>0;\quad G_-(t)\leqslant 0,\ t\in(0,\ 1),\tag{8.36}$$

или

$$\Phi_k(u)\geqslant 0,\ u>0;\quad G_-(t)\geqslant 0,\ t\in(0,\ 1),\tag{8.37}$$

где

$$G_-(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\psi_-'}{\psi_-}\right](t)\left\{\frac{1}{n}-\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t)\right\},\quad t\in(0,1).\tag{8.38}$$

Тогда функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (7.6), (7.8) *и при* $t\to 1^-$ *выполняется предельное равенство* (8.8).

П р и м е р 12. *Пусть* $k(u)=\exp[\ln^\alpha(A+u)]$, где $\alpha>1$, $A\geqslant\exp(\alpha-1)$ — постоянные (см. таблицу 14). Тогда

$$\Phi_k(u)=\frac{1}{\alpha}\ln^{-\alpha}(A+u)[\ln(A+u)+(1-\alpha)]\geqslant 0.$$

Пусть $\psi_-(t)=[\gamma+(1-t)^{-2}]\exp\{-\ln^{1/2}[\gamma+(1-t)^{-1}]\}$, т. е.

$$u(t,0)\cong\exp\{[2|\ln(1-t)|-|\ln(1-t)|^{1/2}]^{1/\alpha}\},\ t\to 1^-.$$

Функция ψ_- удовлетворяет условиям теоремы 8.3, причем $G_+(t)\geqslant 0$ (см. (8.38) при $n=-2$). Поэтому рассматриваемая задача имеет п. а. р. (8.4), где

$$\varphi(t)\cong(1-t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\ln^{1/2}[(1-t)^{-1}]\right\},\quad t\to 1^-.$$

3. П р и б л и ж е н н ы е а в т о м о д е л ь н ы е р е ш е н и я т и п а IV.

3.1. Г р а н и ч н ы й р е ж и м б е з о б о с т р е н и я. В этом пункте рассматривается задача с граничными условиями (8.6), определенными при всех $t>0$.

Т е о р е м а 8.4. *Пусть выполняются условия* (8.2), (8.3) *и функция* ψ_+ *в* (8.6) *удовлетворяет предположению* (7.32). *Пусть, кроме того, выполняется одно из двух условий:* (8.34) *или* (8.35), *где*

$$G_+(t)=-\frac{1}{2}\left[\frac{\psi_+'}{\psi_+}\left(\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right)'\right](t),\quad t>0. \tag{8.39}$$

Тогда функция φ *вычисляется по формуле* (7.33), $\theta_\alpha(\xi)$ *является решением задачи* (7.7), (7.8) *и при* $t\to+\infty$ *выполняется предельное равенство* (8.8).

П р и м е р 13. Пусть $k(u)=\exp(\exp u)$. Здесь

$$\Phi_k(u)=\left(\frac{k(u)}{k'(u)}\right)'=-\exp(-u)<0,\quad u>0.$$

Рассмотрим функцию $\psi_+(t)=\exp[(\gamma+t)^\alpha]$, где $\alpha\in(0,1]$ — фиксированная постоянная. Имеем

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)=\frac{1-\alpha}{\alpha}(\gamma+t)^{-\alpha}\geqslant 0,\quad t>0.$$

Отсюда $G_+(t)\leqslant 0$ (см. (8.39)), и поэтому задача имеет п. а. р. (8.4), в котором

$$\varphi(t)\cong\alpha^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1-\alpha}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}t^\alpha\right],\quad t\to+\infty.$$

3.2. Г р а н и ч н ы й р е ж и м с о б о с т р е н и е м. Ниже рассматривается задача с условиями (8.6′).

Т е о р е м а 8.5. *Пусть выполняются условия* (8.2), (8.3) *и функция* ψ_- *в* (8.6′) *удовлетворяет предположению* (7.34). *Пусть, кроме того, выполняется условие* (8.37), *где*

$$G_-(t)=-\frac{1}{2}\left[\frac{\psi_-'}{\psi_-}\left(\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right)'\right](t),\quad t\in(0,1). \tag{8.40}$$

Тогда функция φ *вычисляется по формуле* (7.35), $\theta_\alpha(\xi)$ *является решением задачи* (7.7), (7.8) *и при* $t\to 1^-$ *выполняется предельное равенство* (8.8).

З а м е ч а н и е. В сделанных предположениях функция $(\psi_-/\psi_-')'(t)$ не может быть положительной при всех $t\in(0, 1)$. Поэтому ситуация (8.35) в данной теореме не анализируется.

П р и м е р 14. Пусть $k(u)=\exp[(1+u)^{1/2}\ln(1+u)]$. Тогда $\Phi_k(u)>0$ при всех $u>0$. Пусть

$$\psi_-(t)=\exp\{\ln^\alpha[\gamma+(1-t)^{-1}]\},\quad t\in(0, 1),$$

где $\alpha>1$ — постоянная. Этой функции отвечает граничный режим

$$u(t, 0)=k^{-1}(\psi_-(t))\cong\frac{1}{4\alpha^2}\,\frac{\ln^{2\alpha}[(1-t)^{-1}]}{\ln^2\ln[(1-t)^{-1}]},\quad t\to 1^-.$$

Из (8.40) следует, что здесь $G_-(t)\geqslant 0$, т. е. условие (8.37) выполнено. Тогда в силу теоремы 8.5 заключаем, что рассматриваемая задача имеет п. а. р. (8.4) и

$$\varphi(t)\cong\alpha^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1-\alpha}{2}}[(1-t)^{-1}]\exp\left\{\frac{1}{2}(1-t)^{-1}\right\}$$

при $t\to 1^-$.

Литература

1. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I.— Матем. сб., 1982, т. 118 (160), с. 291—322.
2. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II.— Матем. сб., 1982, т. 118 (160), с. 435—455.
3. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492—495.
4. *Atkinson F. V., Peletier L. A.* Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1974, v. 54, p. 373—392.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1982