

УДК 517.956

Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III

Галактионов В. А., Самарский А. А.

Настоящая работа, в которой продолжается исследование, начатое в [1], [2], посвящена изучению асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений типа нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Функция $k(u)$ определена при всех $u \geq 0$, $k(u) > 0$ при $u > 0$, $k \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$. Для (1) будут рассматриваться краевые задачи с начальным условием $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$, $x > 0$, и с одним из граничных режимов

$$u(t, 0) = \kappa_+(t) > 0, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \kappa_-(t) > 0, \quad t \in (0, 1), \quad (2')$$

где достаточно гладкие монотонно возрастающие функции κ_{\pm} таковы, что $\kappa_+(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и $\kappa_-(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 1^-$ (в последнем случае $\kappa_-(t)$ изменяется в режиме с обострением).

Исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых задач проводится с помощью построения приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения (1), которые ему не удовлетворяют, но тем не менее правильно описывают эволюцию решения при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow 1^-$. Особо подчеркнем, что такие п. а. р. удается построить при достаточно произвольных коэффициентах $k(u)$ и граничных режимах $\kappa_{\pm}(t)$.

В работе [1] построены полные системы п. а. р. уравнения (1) с коэффициентами k , удовлетворяющими условию

$$[k(u)/k'(u)]' \rightarrow \frac{1}{\sigma}, \quad u \rightarrow +\infty; \quad \sigma = \text{const} \in (0, +\infty).$$

В [2] то же самое сделано для случая

$$[k(u)/k'(u)]' \rightarrow +\infty, \quad u \rightarrow +\infty.$$

В данной работе построены новые по сравнению с [1], [2] классы п. а. р. уравнения (1) в том случае, когда

$$[k(u)/k'(u)]' \rightarrow 0, \quad u \rightarrow +\infty.$$

Этому условию удовлетворяют, например, коэффициенты $k(u) = \exp[\ln^{\alpha}(1+u)]$, $\alpha > 1$; $k(u) = \exp u^{\lambda}$, $\lambda > 0$; $k(u) = \exp(\exp u)$ и т. д. В данной работе построение п. а. р. проводится способами, отличающимися от применяемых в [1], [2], и п. а. р. имеют другую пространственно-временную структуру. Для доказательства сходимости решений рассматриваемых задач к соответствующим п. а. р. привлекаются несколько иные методы.

В дальнейшем через $\|\cdot\|_1$ будет обозначаться норма в пространстве $L^1((0, x^*))$ ($0 < x^* < +\infty$ — известная величина)

$$\|v(x)\|_1 = \int_0^{x^*} |v(x)| dx.$$

§ 7. Полная система приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения с экспоненциальной нелинейностью

В этом параграфе будет рассматриваться уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\infty(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (7.1)$$

которое заменой $U = \exp u$ сводится к более удобному для нас виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (7.2)$$

(отметим, что для корректности обратного преобразования $u = \ln U$ необходимо, чтобы $U \geq 1$). Функция $U(t, x)$ удовлетворяет одному из краевых условий

$$U(t, 0) = \exp[\kappa_+(t)] = \psi_+(t), \quad t > 0; \quad (7.3)$$

$$U(t, 0) = \exp[\kappa_-(t)] = \psi_-(t), \quad t \in (0, 1). \quad (7.3')$$

Для построения полной системы п. а. р. уравнения (7.2) нам понадобятся следующие его точные инвариантные решения¹²:

$$\text{I. } U_A(t, x) = \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{1/2}}, \quad t > 0;$$

$$\text{II. } U_A(t, x) = (1+t)^m \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{(1+m)/2}}, \quad t > 0, m = \text{const} > 0;$$

$$\text{III. } U_A(t, x) = (1-t)^n \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1-t)^{(1+n)/2}}, \quad t \in (0, 1), n = \text{const} < 0;$$

$$\text{IV. } U_A(t, x) = \exp t \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\exp(t/2)}, \quad t > 0.$$

Функции $\theta_a(\xi)$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые получаются после подстановки $u_A(t, x)$ в (7.2):

$$\text{I. } \theta_a \theta_a'' + \frac{1}{2} \theta_a' \xi = 0, \quad (7.4)$$

$$\text{II. } \theta_a \theta_a'' + \frac{1+m}{2} \theta_a' \xi - m \theta_a = 0, \quad (7.5)$$

$$\text{III. } \theta_a \theta_a'' - \frac{1+n}{2} \theta_a' \xi + n \theta_a = 0, \quad (7.6)$$

$$\text{IV. } \theta_a \theta_a'' + \frac{1}{2} \theta_a' \xi - \theta_a = 0, \quad 0 < \xi < \xi^*, \quad (7.7)$$

а также краевым условиям

$$\theta_a(0) = 1, \quad \theta_a(\xi^*) = a^*. \quad (7.8)$$

Здесь $0 < \xi^* < +\infty$ и $a^* \in (0, 1)$ — постоянные. Отметим, что ни одно из ука-

¹² Отметим, что функции I—IV вместе с $U_A(t, x) = \theta_A(t+x)$, $U_A(t, x) = (1-t)^{-1} \theta_A(x + \ln(1-t))$ исчерпывают весь набор подходящих нетривиальных решений уравнения (7.2) (или, что то же самое, (7.1)), инвариантных относительно локальной группы Ли точечных преобразований [3].

занных инвариантных решений $u_a = \ln U_a$ за исключением решения I (см. [4]) не может быть определено при всех $x \in \mathbf{R}_+^1$ так, чтобы $u_a(t, +\infty) = 0$. Поэтому для реализации этих решений необходимо дополнительное краевое условие на подвижной правой границе. Это выражается равенством $\theta_a(\xi^*) = a^* > 0$ в (7.8).

В дальнейшем будем считать, что решения уравнений (7.4) — (7.7), удовлетворяющие условиям (7.8), существуют, причем $\theta_a'(\xi) < 0$ при $\xi \in (0, \xi^*)$. Отметим, что заменой $\eta = \ln \xi$, $\theta_a = \xi^2 \varphi(\eta)$ эти уравнения сводятся к автономному виду. Поэтому возможен их анализ на фазовой плоскости.

П. а. р. уравнения (7.2) будем искать в следующем виде:

$$U_a(t, x) = \psi_{\pm}(t) \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \quad (7.9)$$

где положительные функции $\theta_a(\xi) \in C^2([0, \xi^*])$ и $\varphi(t) \in C^1$ являются неизвестными и подлежат в дальнейшем определению. Потребуем, чтобы $\theta_a(0) = 1$, $\theta_a(\xi^*) = \alpha^* \in (0, 1)$; $\theta_a'(\xi) \leq 0$, $\xi \in (0, \xi^*)$. Тогда п. а. р. (7.9) будет удовлетворять условию (7.3) или (7.3'), а также одному из краевых условий на подвижной правой границе

$$U(t, x^*(t)) = a^* \psi_+(t), \quad t > 0; \quad (7.10)$$

$$U(t, x^*(t)) = a^* \psi_-(t), \quad t \in (0, 1), \quad (7.10')$$

где $x^*(t) = \xi^* \varphi(t)$. Нетрудно убедиться, что функции (7.9) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \psi'_{\pm}(t) \theta_a - \left(\psi_{\pm} \frac{\varphi'}{\varphi} \right) (t) \frac{d\theta_a}{d\xi} \xi, \quad (7.11)$$

которое легко привести к такому виду:

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \left(\frac{\psi'_{\pm}}{\psi_{\pm}} \right) (t) U_a - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right) (t) \frac{\partial U_a}{\partial x} x. \quad (7.11')$$

Итак, рассмотрим краевые задачи (7.2), (7.3), (7.10) и (7.2), (7.3'), (7.10'). Без ограничения общности в дальнейшем будем полагать

$$U(0, x) \equiv U_a(0, x) = \psi_{\pm}(0) \theta_a \left(\frac{x}{\varphi(0)} \right), \quad 0 \leq x \leq a^* \varphi(0).$$

Кроме того, будем считать, что $\psi_{\pm}(0) a^* > 1$. Тогда, как нетрудно убедиться, всюду выполнены неравенства $U_a(t, x) \geq 1$, $U(t, x) \geq 1$. Поэтому определено (неотрицательное) п. а. р. исходного уравнения (7.1)

$$u_a(t, x) = \ln U_a = \ln [\psi_{\pm}(t) \theta_a(\xi)], \quad (7.12)$$

а также автомодельное представление решения $u(t, x)$ — функция

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{\psi_{\pm}(t)} U(t, \xi \varphi(t)) = \exp [u(t, \xi \varphi(t)) - \kappa_{\pm}(t)]. \quad (7.13)$$

Будет показано, что при специальном выборе функции $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ автомодельное представление $\theta(t, \xi)$ асимптотически (т. е. при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow 1^-$) сходится к $\theta_a(\xi)$, что обеспечивает «близость» решения рассматриваемых задач к п. а. р. (7.9).

Построение полной системы п. а. р. распадается на три случая.

1. Приближенные автомодельные решения типа I.

Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (7.2), (7.3), (7.10) с краевыми условиями, определенными при всех $t > 0$.

Теорема 7.1. Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi'_+} \right]' (t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7.14)$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[\varphi_0 + \int_0^t \psi_+(\tau) d\tau \right]^{1/2}, \quad t > 0, \quad (7.15)$$

где $\varphi_0 > 0$ — произвольная постоянная, функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.4), (7.8), и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\begin{aligned} & \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_1 = \\ & = O \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \left(\frac{\psi'_+ \varphi}{\psi_+} \right) (\tau) d\tau \right\} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Замечание. В силу (7.4) имеет место равенство $\theta'_a(\xi)\xi = -2\theta_a(\xi)\theta''_a(\xi)$, подставляя которое в (7.11), убеждаемся, что в условиях теоремы п. а. р. (7.9) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+} \right) (t) U_a. \quad (7.17)$$

Отметим, что для п. а. р. (7.12) здесь получается уравнение

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{B}(t, u) = \mathbf{C}_\infty(u) + \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+} \right) (t), \quad (7.17')$$

которое отличается от исходного (7.1) дополнительным членом в правой части.

Доказательство. Сопоставляя (7.17) с (7.2), убеждаемся, что U_a является верхним решением уравнения (7.2), и поэтому $w(t, x) = U_a(t, x) - U(t, x) \geq 0$ всюду в $\mathbf{R}_+^1 \times (0, x^*(t))$. Поделим обе части уравнений (7.2) и (7.17) на U и U_a соответственно, а затем вычтем первое из второго. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{U_a}{U} = w_{xx} + \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+} \right) (t).$$

Интегрируя обе части этого равенства по x от 0 до $x^*(t) = \xi^* \varphi(t)$, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left\| \ln \frac{U_a(t, x)}{U(t, x)} \right\|_1 = \bar{w}_x \Big|_0^{x^*(t)} + \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+} \right) (t) \xi^* \varphi(t). \quad (7.18)$$

Поскольку $w(t, x) \geq 0$ при $x \in (0, x^*(t))$ и $w(t, 0) = w(t, x^*(t)) = 0$ при любых $t \geq 0$, $w_x \Big|_0^{x^*(t)} \leq 0$. Поэтому из (7.18) получаем

$$\left\| \ln \frac{U_a(t, x)}{U(t, x)} \right\|_1 \leq \xi^* \int_0^t \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+} \varphi \right) (\tau) d\tau. \quad (7.19)$$

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$\ln^\alpha \ln(\gamma + t), \alpha > 0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} \ln t$
$\ln^\alpha(\gamma + t), \alpha > 0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} t$
$\exp[\ln^\alpha(\gamma + t)], 0 < \alpha < 1$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} \ln^\alpha t\right]$
$\ln(\gamma + t) \exp[\ln^\alpha(\gamma + t)], 0 < \alpha < 1$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} t \exp\left[\frac{1}{2} \ln^\alpha t\right]$
$\exp\left[\frac{\ln(\gamma + t)}{\ln^\alpha \ln(\gamma + t)}\right], \alpha > 0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} \frac{\ln t}{\ln^\alpha \ln t}\right]$

Учитывая, что $U_a \geq U$, имеем

$$\ln \frac{U_a}{U} = (U_a - U) \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho U_a + (1-\rho)U} \geq \frac{|U_a - U|}{\psi_+(t)}.$$

С помощью этого неравенства, а также тождества¹³ $\|U_a - U\|_1 = \|\psi_+(t)\varphi(t)\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_1$, из (7.19) выводим оценку

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_1 \leq \frac{\xi^*}{\varphi(t)} \int_0^t \left(\frac{\psi'_+ \varphi}{\psi_+} \right) (\tau) d\tau, \quad (7.20)$$

которая при больших t совпадает с (7.16). Покажем, что правая часть (7.20) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Последовательно раскрывая возникающие неопределенности, с учетом (7.15) получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \left(\frac{\psi'_+ \varphi}{\psi_+} \right) (\tau) d\tau &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\psi'_+ \varphi}{\psi_+ \varphi'} \right) (t) = \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+^2} \right) (t) \int_0^t \psi_+(\tau) d\tau = 2 \left\{ 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\psi_+}{\psi'_+} \right) (t) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (7.14) заключаем, что $\|\theta - \theta_a\|_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

В таблице 10 анализируются некоторые конкретные случаи применения теоремы 7.1. Постоянную $\gamma > 0$ при этом следует выбирать достаточно большой так, чтобы $\psi_+(0)a^* \geq 1$. Отметим, что при выполнении условия (7.14) функция $\varphi(t)$ в (7.15) может быть оценена по формуле

$$\varphi(t) \cong t^{1/2} \varphi_+^{1/2}(t), \quad t \rightarrow +\infty.$$

¹³ Здесь

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_1 = \int_0^{\xi^*} |\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)| d\xi.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{1/2} \psi_+^{1/2}(t)}{\varphi(t)} \right]^2 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \psi_+(t)}{\int_0^t \psi_+(\tau) d\tau} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[1 + t \frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)} \right] = 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{\psi_+}{\psi_+'} \right)'(t) \right]^{-1} = 1. \end{aligned}$$

2. Приближенные автомодельные решения типа II и III.

2.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (7.2), (7.3), (7.10).

Теорема 7.2. Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'} \right]'(t) \rightarrow \frac{1}{m}, \quad t \rightarrow +\infty; \quad m = \text{const} > 0. \quad (7.21)$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[m \frac{\psi_+^3(t)}{\psi_+'(t)} \right]^{1/2}, \quad t > 0, \quad (7.22)$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.5), (7.8) и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\begin{aligned} &\| \theta(t, \xi) - \theta_a(\xi) \|_1 = \\ &= O \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \varphi(\tau) |G_+(\tau)| d\tau \right\} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где $G_+(t) = [\ln(\psi_+'/\varphi)]'(t)$, $l = (1+m)/2m$.

Замечание. Из (7.5) следует, что $\theta_a = \frac{1}{m} \theta_a \theta_a'' + \frac{1+m}{2m} \theta_a' \xi$. Подставляя это равенство в (7.11), для п. а. р. (7.9) получаем уравнение

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + G_+(t) \frac{\partial U_a}{\partial x} x. \quad (7.24)$$

Отметим, что из (7.5) вытекает также равенство $\theta_a' \xi = -\frac{2}{1+m} \theta_a \theta_a'' + \frac{2m}{1+m} \theta_a$, подставляя которое в (7.11), получаем

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \frac{2}{1+m} \left(\frac{\varphi \varphi'}{\psi_+} \right)'(t) U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + \frac{2m}{1+m} G_+(t) U_a. \quad (7.24')$$

Если функцию $\varphi(t)$ определить по асимптотически эквивалентной (7.22) формуле

$$\varphi(t) = \left[\varphi_0 + (1+m) \int_0^t \psi_+(\tau) d\tau \right]^{1/2}, \quad \varphi_0 = \text{const} > 0.$$

то (7.24') примет более простой вид

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + \frac{2m}{1+m} G_+(t) U_a.$$

Теорема 7.2 доказывается так же, как предыдущая. При этом без ограничения общности функцию $G_+(t)$ можно считать знакопостоянной (в

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$(\gamma+t)^m \ln^\alpha \ln(\gamma+t)$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} \ln t$
$(\gamma+t)^m \ln^\alpha(\gamma+t)$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} t$
$(\gamma+t)^m \exp[\ln^\alpha(\gamma+t)], 0 < \alpha < 1$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} \ln^\alpha t\right]$
$(\gamma+t)^m \exp\left[\frac{\ln(\gamma+t)}{\ln^\alpha \ln(\gamma+t)}\right], \alpha > 0$	$\cong t^{\frac{1+m}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} \frac{\ln t}{\ln^\alpha \ln t}\right]$

противном случае она мажорируется сверху и снизу знакопостоянными функциями). Тогда, как следует из (7.24), в случае $G_+ \leq 0$ функция U_a будет верхним решением уравнения (7.2) (т. е. $U_a \geq U$), а при $G_+ \geq 0$ — нижним решением (т. е. $U_a \leq U$). Некоторые конкретные случаи применения теоремы 7.2 указаны в таблице 11.

2.2. **Граничный режим с обострением.** Ниже рассматривается задача (7.2), (7.3'), (7.10').

Теорема 7.3. Пусть функция ψ_- удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'} \right]'(t) \rightarrow \frac{1}{n}, \quad t \rightarrow 1^-; \quad n = \text{const} < 0. \quad (7.25)$$

Положим

$$\varphi(t) = \left[(-n) \frac{\psi_-^2(t)}{\psi_-'(t)} \right]^{1/2}, \quad t \in (0, 1). \quad (7.26)$$

Пусть

$$\varphi(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7.27)$$

Тогда функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.6), (7.8) и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\begin{aligned} & \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_1 = \\ & = O \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \varphi(\tau) |G_-(\tau)| d\tau \right\}_{t \rightarrow 1^-} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (7.28)$$

где $G_-(t) = [\ln(\psi_-'/\varphi)]'(t)$, $l = (1+n)/2n$.

Замечание 1. Из (7.6) следует, что $\theta_a = -\frac{1}{n} \theta_a \theta_a'' + \frac{1+n}{2n} \theta_a' \xi$. Подставив это равенство в (7.11), получим, что в условиях теоремы п. а. р. (7.9) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + G_-(t) \frac{\partial U_a}{\partial x} x.$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что условие (7.27) будет заведомо выполнено, если $n < -1$. Если же $n > -1$ в (7.25), то (7.27) не имеет места (здесь $\varphi(1^-) = 0$). Отметим, что именно отсутствие (7.27) не позволяет построить (точнее, доказать сходимость в L^1) п. а. р. типа I, отвечающие граничным режимам с обострением (см. предыдущий пункт).

Теорема 7.3 доказывается точно так же, как теорема 7.1. В таблице 12 даны асимптотические значения функций $\varphi(t)$ при некоторых

$\psi_-(t)$	$\varphi(t)$
$[\gamma + (1-t)^n] \ln^\alpha \ln [\gamma + (1-t)^{-1}]$	$\cong (1-t)^{\frac{1+n}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} \ln(1-t) $
$[\gamma + (1-t)^n] \ln^\alpha \ln [\gamma + (1-t)^{-1}]$	$\cong (1-t)^{\frac{1+n}{2}} \ln(1-t) ^{\frac{\alpha}{2}}$
$[\gamma + (1-t)^n] \exp \{ \ln^\alpha [\gamma + (1-t)^{-1}] \}, 0 < \alpha < 1$	$\cong (1-t)^{\frac{1+n}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln(1-t) ^\alpha \right\}$
$[\gamma + (1-t)^n] \exp \left\{ \frac{\ln [\gamma + (1-t)^{-1}]}{\ln^\alpha \ln [\gamma + (1-t)^{-1}]} \right\}, \alpha > 0$	$\cong (1-t)^{\frac{1+n}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{ \ln(1-t) }{\ln^\alpha \ln(1-t) } \right\}$

граничных режимах с обострением, удовлетворяющих (7.25). Условие (7.27) здесь выполняется, если $n \leq -1$, причем в случае $n = -1$ параметр α в функциях, расположенных в первых двух строчках таблицы, необходимо выбирать положительным.

Рассмотрим более подробно граничный режим, указанный во второй строке таблицы 12, при $n = -1$

$$\psi_-(t) = [\gamma + (1-t)^{-1}] \ln^\alpha [\gamma + (1-t)^{-1}], \quad t \in (0, 1). \quad (7.29)$$

Здесь $\alpha > 0$ — постоянная. Ему отвечает п. а. р. (7.9), где

$$\varphi(t) \cong \ln^{\alpha/2} [(1-t)^{-1}], \quad t \rightarrow 1^-, \quad (7.30)$$

и $\theta_\alpha(\xi) = 1 + \left[(a^* - 1 + \frac{1}{2} \xi^*) / \xi^* \right] \xi - \frac{1}{2} \xi^2$, причем $\xi^* < 2(1 - a^*)$ (последнее условие обеспечивает монотонность функции θ_α).

Только в одном частном случае $\alpha = 2$ оценка (7.30), характеризующая асимптотическое поведение решения, может быть получена на основе анализа точного инвариантного решения уравнения (7.2). Оно имеет вид

$$U_A(t, x) = (1-t)^{-1} \theta_A[x + \ln(1-t)]. \quad (7.31)$$

Подставив (7.31) в (7.2), для функции θ_A получим уравнение

$$\theta_A \theta_A'' + \theta_A' - \theta_A = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^1.$$

Отсюда имеем $\theta_A(\xi) \cong \xi^2/2$ при $\xi \rightarrow +\infty$, и поэтому

$$\begin{aligned} U_A(t, 0) &= (1-t)^{-1} \theta_A[\ln(1-t)] \cong \\ &\cong \frac{1}{2} (1-t)^{-1} \ln^2(1-t), \quad t \rightarrow 1^-, \end{aligned}$$

что по «порядку величины» совпадает с (7.29) при $\alpha = 2$. Отметим, что в рассматриваемом случае функции $\theta_\alpha(\xi)$ в (7.9) и $\theta_A(\xi)$ в (7.31) имеют похожие пространственные профили.

3. Приближенные автомодельные решения типа IV.

3.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (7.2), (7.3), (7.10). Следующее утверждение доказывается точно так же, как теорема 7.1.

Теорема 7.4. Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'} \right]'(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7.32)$$

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$(\gamma + t)^{\ln^\alpha \ln(\gamma + t)}, \alpha > 0$	$\cong t^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{\alpha}{2}} \ln t t^{\frac{1}{2}} \ln^\alpha \ln t$
$(\gamma + t)^\alpha \exp(\gamma + t)$	$\cong t^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} t\right)$
$\exp[\ln^\alpha(\gamma + t)], \alpha > 1$	$\cong \alpha^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1-\alpha}{2}} t \exp\left[\frac{1}{2} \ln^\alpha t\right]$
$\exp[(\gamma + t) \ln^\alpha(\gamma + t)]$	$\cong \ln^{-\frac{\alpha}{2}} t \exp\left[\frac{1}{2} t \ln^\alpha t\right]$
$\exp[(\gamma + t)^\alpha], \alpha > 0$	$\cong \alpha^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1-\alpha}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} t^\alpha\right]$
$\exp[\exp(\gamma + t)]$	$\cong \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp\left[\frac{1}{2} \exp t\right]$
$\exp[(\gamma + t)^{(\gamma + t)}]$	$\cong (\ln t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{t}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} t^t\right]$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[\frac{\psi_+^2(t)}{\psi_+'(t)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0, \quad (7.33)$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.7), (7.8) и справедлива оценка скорости сходимости (7.23), где $G_+(t) = [\ln(\psi_+^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Из (7.7) имеем $\theta_a = \theta_a \theta_a'' + \frac{1}{2} \theta_a' \xi$. Подставив это равенство в (7.11), с учетом (7.33) получим, что п. а. р. (7.9) удовлетворяет уравнению (7.24), где $G_+(t) = [\ln(\psi_+^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Из (7.32) и (7.33) непосредственно следует, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (7.27), которое необходимо для доказательства сходимости. Отметим, что функцию φ в данном случае можно определить асимптотически эквивалентным образом

$$\varphi(t) = \left[\varphi_0 + \int_0^t \psi_+(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_0 = \text{const} > 0.$$

В таблице 13 рассмотрены некоторые конкретные применения теоремы 7.4.

3.2. Граничный режим с обострением. Ниже построены п. а. р. задачи (7.2), (7.3'), (7.10').

Т е о р е м а 7.5. Пусть функция ψ_- удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'(t)} \right]'(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7.34)$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[\frac{\psi_-^2(t)}{\psi_-'(t)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in (0, 1), \quad (7.35)$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.7), (7.8) и справедлива оценка скорости сходимости (7.28), где $G_-(t) = [\ln(\psi_-^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

$k(u)$	$k^{-1}(u)$	$\Phi_k(u)$
$\exp[\ln^\alpha(1+u)], \alpha > 1$	$\cong \exp[\ln^{\frac{1}{\alpha}} u]$	> 0
$\ln^\alpha(A+u) \exp(A+u)$	$\cong \ln u - \alpha \ln \ln u$	$> 0, \alpha > 0$ $< 0, \alpha < 0$
$(A+u)^\alpha \exp(A+u)$	$\cong \ln u - \alpha \ln \ln u$	$> 0, \alpha > 0$ $< 0, \alpha < 0$
$\exp[(A+u) \ln^\alpha(A+u)]$	$\cong \ln u \ln^{-\alpha} \ln u$	$< 0, \alpha > 0$ $> 0, \alpha < 0$
$\exp(u^\alpha), \alpha > 0$	$\ln^{\frac{1}{\alpha}} u$	$< 0, \alpha > 1$ $> 0, \alpha < 1$
$\exp(\exp u)$	$\ln \ln u$	< 0
$\exp[(A+u)^{(A+u)}]$	$\cong \ln \ln u \ln^{-1} \ln u$	< 0

Конкретные примеры использования теоремы 7.5 легко построить с помощью таблицы 13 путем формальной замены $t \rightarrow (1-t)^{-1}$. Отметим, что при выполнении условия (7.34) функция $\varphi(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow 1^-$.

§ 8. Приближенные автомодельные решения уравнений с произвольными (неэкспоненциальными) нелинейностями

В этом параграфе на основе результатов, полученных в § 7, будут построены широкие классы п. а. р. уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8.1)$$

с коэффициентами $k(u)$ произвольного (неэкспоненциального) вида.

В дальнейшем функцию $k(u)$ будем считать монотонно возрастающей, причем $k(0) = k_0 \geq 0$, $k(+\infty) = +\infty$. Через $k^{-1}: [k_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ обозначим функцию, обратную к k . Также будем считать выполненным следующее условие:

$$\Phi_k(u) = \left[\frac{k(u)'}{k'(u)} \right]' \rightarrow 0, \quad u \rightarrow +\infty. \quad (8.2)$$

Кроме того, потребуем, чтобы при любых $\xi \in (0, 1)$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{k'(k^{-1}(u))}{k'(k^{-1}(\xi u))} = \frac{1}{\xi}. \quad (8.3)$$

В дальнейшем (по мере надобности) на функцию $\Phi_k(u)$ будет накладываться дополнительное условие ее знакоопределенности при $u > 0$.

Некоторые коэффициенты $k(u)$, удовлетворяющие условиям (8.2) и (8.3), приведены в таблице 14. Величина постоянной $A > 0$ в некоторых из этих функций выбирается так, чтобы $k(u)$ были определены, положительны и строго монотонны при $u > 0$, а также обладали знакопостоянными функциями Φ_k (знак Φ_k указан в третьей графе таблицы). Во второй графе приведены главные члены асимптотических разложений функций $k^{-1}(u)$ при больших u (в явном виде k^{-1} часто не вычисляются). Все эти данные понадобятся при построении п. а. р. в конкретных случаях

П. а. р. уравнения (8.1) будем искать в виде

$$u_a(t, x) = k^{-1}(\psi_{\pm}(t) \theta_a(\xi)), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \quad (8.4)$$

где функции $U_a(t, x) = \psi_{\pm}(t) \theta_a(\xi)$ являются п. а. р. уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (8.5)$$

построенными в предыдущем параграфе. Отметим, что в случае $k(u) = \exp u$ выражение (8.4) совпадает с (7.12). Предполагается, что $\theta_a(0) = 1$, $\theta_a(\xi^*) = a^* \in (0, 1)$, $\theta_a'(\xi) < 0$ для всех $\xi \in (0, \xi^*)$, причем $\psi_{\pm}(0) a^* \geq k_0$. Поэтому п. а. р. (8.4) удовлетворяет одной из двух следующих пар краевых условий:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= k^{-1}(\psi_+(t)), \quad t > 0, \\ u(t, x^*(t)) &= k^{-1}(a^* \psi_+(t)), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

или

$$u(t, 0) = k^{-1}(\psi_-(t)), \quad t \in (0, 1), \quad u(t, x^*(t)) = k^{-1}(a^* \psi_-(t)), \quad t \in (0, 1), \quad (8.6')$$

где $x^*(t) = \xi^* \varphi(t)$.

Обозначим через $\theta(t, \xi)$ автомодельное представление решения уравнения (8.1), определяемое пространственно-временной структурой соответствующего п. а. р. (8.4)

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{\psi_{\pm}(t)} k(u(t, \xi \varphi(t))), \quad \xi \in (0, \xi^*). \quad (8.7)$$

Будет показано, что при специальном выборе функций $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ имеет место сходимость

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_t \rightarrow 0 \quad (8.8)$$

при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow 1^-$. Это обеспечивает асимптотическую «близость» решения рассматриваемой задачи и п. а. р. (8.4). В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что

$$u(0, x) = k^{-1}\left(\psi_{\pm}(0) \theta_a\left(\frac{x}{\varphi(0)}\right)\right), \quad 0 < x < \xi^* \varphi(0) \quad (8.9)$$

(напомним, что $\psi_{\pm}(0) a^* \geq k_0$, так что (8.9) имеет смысл).

Ниже приведено подробное доказательство сходимости в смысле (8.8) решения задачи (8.1), (8.6), (8.9) к п. а. р. (8.4) типа I (см. теорему 7.1). Доказательства аналогичных утверждений, относящиеся к п. а. р. других типов, легко восстанавливаются по указанной схеме с использованием теорем 7.2—7.5.

1. Приближенные автомодельные решения типа I.

Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (8.1), (8.6), (8.9), где функция $\psi_+(t)$ в (8.6) удовлетворяет условию

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'} \right]'(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (8.10)$$

Тогда, как следует из теоремы 7.1,

$$\varphi(t) = \left[\varphi_0 + \int_0^t \psi_+(\tau) d\tau \right]^{1/2}, \quad t > 0 \quad (8.11)$$

(здесь $\varphi_0 > 0$ —произвольная постоянная), и $\theta_a(\xi)$ является решением за-

дачи

$$\theta_a \theta_a'' + \frac{1}{2} \theta_a' \xi = 0, \quad 0 < \xi < \xi^*, \quad \theta_a(0) = 1, \quad \theta_a(\xi^*) = a^*. \quad (8.12)$$

При этом функция $U_a(t, x) = \psi_+(t) \theta_a(\xi)$ (п. а. р. уравнения (8.5)) удовлетворяет уравнению (см. (7.17))

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + \left(\frac{\psi_+'}{\psi_+} \right) (t) U_a. \quad (8.13)$$

Полагая в (8.13) $U_a = k(u_a)$, для п. а. р. (8.4) получаем следующее параболическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{B}(t, u_a) = \mathbf{A}(u_a) - \\ - k'(u_a) \Phi_k(u_a) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\psi_+'}{\psi_+} \right) (t) \frac{k(u_a)}{k'(u_a)}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

которое отличается от исходного (8.1) двумя дополнительными членами в правой части.

Теперь мы можем перейти к доказательству основного утверждения этого параграфа.

Теорема 8.1. Пусть выполняются условия (8.2), (8.3) и, кроме того,

$$\Phi_k(u) = \left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]' \leq 0, \quad u > 0. \quad (8.15)$$

Пусть функция ψ_+ в (8.6) удовлетворяет предположению (8.10).

Тогда $\varphi(t)$ вычисляется по формуле (8.11), $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (8.12) и при $t \rightarrow +\infty$ выполняется предельное равенство (8.8).

Доказательство. Положим $z(t, x) = u_a(t, x) - u(t, x)$. Тогда, как следует из (8.1) и (8.14), функция z удовлетворяет в $\mathbf{R}_+^1 \times (0, x^*(t))$ уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = [\mathbf{A}(u_a) - \mathbf{A}(u)] - \\ - k'(u_a) \Phi_k(u_a) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\psi_+'}{\psi_+} \right) (t) \frac{k(u_a)}{k'(u_a)}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

причем $z(0, x) \equiv 0$ и $z(t, 0) = z(t, x^*(t)) = 0$ при всех $t > 0$.

Сопоставляя уравнения (8.14) и (8.1), нетрудно убедиться, что в силу (8.15), а также условия $\psi_+' \geq 0$, u_a является верхним решением исходного уравнения. Поэтому

$$u_a(t, x) \geq u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R}_+^1 \times (0, x^*(t)). \quad (8.17)$$

Отсюда $|z| = z = u_a - u$.

Проинтегрируем обе части уравнения (8.16) по x от 0 до $x^*(t)$. В результате для функции

$$\|z(t, x)\|_1 = \int_0^{x^*(t)} |z(t, x)| dx$$

получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z(t, x)\|_1 &\leq - \int_0^{x^*(t)} k'(u_a) \Phi_k(u_a) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2 dx + \\ &+ \left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t) \int_0^{x^*(t)} \frac{k(u_a)}{k'(u_a)} dx = I_1(t) + I_2(t). \end{aligned} \quad (8.18)$$

При выводе (8.18) учитывается, что в силу (8.17)

$$\left\{ k(u_a) \frac{\partial u_a}{\partial x} - k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_{x=0}^{x=x^*(t)} \leq 0. \quad (8.19)$$

Рассмотрим сначала выражение I_1 в (8.18). Полагая $k(u_a) = U_a = \psi_+(t) \theta_a(\xi)$, с учетом неравенства (8.15) получаем

$$\begin{aligned} I_1(t) &= - \int_0^{x^*} \left[\frac{U_a}{k'(k^{-1}(U_a))} \right]_{U_a} \frac{\partial U_a}{\partial x} \left(\frac{\psi_+}{\varphi} \right)(t) \frac{d\theta_a}{d\xi} dx \leq \\ &\leq m_a \left(\frac{\psi_+}{\varphi} \right)(t) \int_0^{x^*} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_a}{k'(k^{-1}(U_a))} \right] dx = \\ &= m_a \left(\frac{\psi_+}{\varphi} \right)(t) \left[\frac{a^* \psi_+(t)}{k'(k^{-1}(a^* \psi_+(t)))} - \frac{\psi_+(t)}{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))} \right], \end{aligned} \quad (8.20)$$

где

$$m_a = \max_{\xi \in [0, \xi^*]} \left| \frac{d\theta_a}{d\xi}(\xi) \right| < +\infty.$$

Используя (8.15), для $I_2(t)$ выводим такую оценку:

$$I_2(t) \leq \xi^* \left(\frac{\varphi \psi'_+}{\psi_+} \right)(t) \frac{a^* \psi_+(t)}{k'(k^{-1}(a^* \psi_+(t)))}. \quad (8.21)$$

Из (8.18) следует, что

$$\|z(t, x)\|_1 \leq \int_0^t \{I_1(\tau) + I_2(\tau)\} d\tau, \quad t > 0. \quad (8.22)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |z(t, x)| &= |k^{-1}(U_a) - k^{-1}(U)| = \\ &= |U_a - U| \int_0^1 \frac{d\rho}{k' [k^{-1}(\rho U_a + (1-\rho)U)]}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Неравенство (8.2) означает, что

$$\frac{k''(u) k(u)}{k'^2(u)} \rightarrow 1 \quad \text{при } u \rightarrow +\infty.$$

Отсюда получаем, что $k''(u) > 0$ (т. е. функция $k'(u)$ является возрастающей) при всех достаточно больших $u > 0$. Тогда из (8.23) при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$|z| \geq |U_a - U| \frac{1}{k' [k^{-1}(\psi_+(t))]} \quad (8.23')$$

Отсюда в силу равенства

$$\|U_a(t, x) - U(t, x)\|_1 = \psi_+(t) \varphi(t) \|\theta_a(\xi) - \theta(t, \xi)\|_1$$

закключаем, что при всех достаточно больших t

$$\|\theta_a(\xi) - \theta(t, \xi)\|_1 \leq J_1(t) + J_2(t), \quad (8.24)$$

где

$$J_1(t) = m_a \frac{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}{\psi_+(t)} \frac{1}{\varphi(t)} \times \\ \times \int_0^t \frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)} \left[\frac{a^* \psi_+(\tau)}{k'(k^{-1}(a^* \psi_+(\tau)))} - \frac{\psi_+(\tau)}{k'(k^{-1}(\psi_+(\tau)))} \right] d\tau, \\ J_2(t) = \xi^* a^* \frac{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}{\psi_+(t)} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) \psi_+'(\tau)}{\psi_+(\tau)} \frac{\psi_+(\tau)}{k'[k^{-1}(a^* \psi_+(\tau))]} d\tau.$$

Покажем, что $J_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, $i=1, 2$. Предварительно заметим, что в силу (8.10) справедливы следующие асимптотически точные равенства:

$$\varphi(t) \cong \psi_+^{3/2}(t) t^{1/2}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (8.25)$$

$$\int_0^t \frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau \cong 2\psi_+^{3/2}(t) t^{1/2}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (8.26)$$

Рассмотрим выражение $J_1(t)$. Покажем сначала, что при больших t

$$\int_0^t \frac{\psi_+}{\varphi} \frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))} d\tau \cong \frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))} \int_0^t \frac{\psi_+}{\varphi} d\tau. \quad (8.27)$$

Действительно, последовательно раскрывая с помощью (8.25) и (8.26) возникающие неопределенности, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\psi_+}{\varphi} \frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))} d\tau \left(\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))} \int_0^t \frac{\psi_+}{\varphi} d\tau \right)^{-1} = \\ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ 1 + 2t \frac{\psi_+'}{\psi_+} \left[\frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(\psi_+))} \right]_{\psi_+}' k'(k^{-1}(\psi_+)) \right\}^{-1} = \\ = \left\{ 1 + 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(\psi_+/\psi_+')'} \times \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]' \right\}^{-1}.$$

Однако в силу (8.10)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{(\psi_+/\psi_+')'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{\psi_+}{\psi_+'} \right]'(t) \right\}^{-1} = 0,$$

что вместе с (8.2) обеспечивает справедливость (8.27). В силу (8.27) и такого же асимптотического равенства

$$\int_0^t \frac{\psi_+}{\varphi} \frac{a^* \psi_+}{k'[k^{-1}(a^* \psi_+)]} d\tau \cong \frac{a^* \psi_+}{k'[k^{-1}(a^* \psi_+)]} \int_0^t \frac{\psi_+}{\varphi} d\tau$$

выражение для J_1 принимает вид

$$J_1(t) \cong m_a a^* \left[\frac{k'(k^{-1}(\psi_+(t)))}{k'(k^{-1}(a^* \psi_+(t)))} - \frac{1}{a^*} \right] \times \\ \times \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (8.28)$$

Однако в силу (8.25) и (8.26)

$$\frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \frac{\psi_+(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau \rightarrow 2$$

при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому, как следует из (8.28), предположение (8.3) обеспечивает справедливость равенства $J_1(+\infty) = 0$.

Перейдем теперь к анализу выражения $J_2(t)$. Предварительно покажем, что

$$\frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) \psi'_+(\tau)}{\psi_+(\tau)} d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (8.29)$$

С учетом (8.10) и (8.11) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi} \int_0^t \frac{\varphi \psi'_+}{\psi_+} d\tau &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi \psi'_+}{\varphi' \psi_+} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\varphi^2 \psi'_+}{2\varphi \varphi' \psi_+} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \frac{\psi'_+}{\psi_+^2} \int_0^t \psi_+ d\tau = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{\psi_+}{\psi'_+} \right)' \right\}^{-1} = 0. \end{aligned}$$

С помощью (8.29) нетрудно показать, что

$$\int_0^t \frac{\varphi \psi'_+}{\psi_+} \frac{\psi_+}{k' [k^{-1}(a^* \psi_+)]} d\tau \cong \frac{\psi_+}{k' [k^{-1}(a^* \psi_+)]} \int_0^t \frac{\varphi \psi'_+}{\psi_+} d\tau \quad (8.30)$$

при $t \rightarrow +\infty$ ((8.30) доказывается примерно так же, как (8.27)). Тогда выражение $J_2(t)$ при достаточно больших t принимает вид

$$J_2(t) \cong \xi^* a^* \frac{k' [k^{-1}(\psi_+(t))]}{k' [k^{-1}(a^* \psi_+(t))]} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) \psi'_+(\tau)}{\psi_+(\tau)} d\tau.$$

Отсюда в силу (8.29) и условия (8.3) заключаем, что

$$J_2(t) \cong \xi^* \frac{1}{\varphi} \int_0^t \frac{\varphi \psi'_+}{\psi_+} d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Оценка скорости сходимости, полученная при доказательстве теоремы, имеет вид

$$\begin{aligned} \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_1 &= O \left\{ \left[\frac{k' [k^{-1}(\psi_+(t))]}{k' [k^{-1}(a^* \psi_+(t))]} - \frac{1}{a^*} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) \psi'_+(\tau)}{\psi_+(\tau)} d\tau \right\} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим один конкретный случай применения теоремы 8.1.

Пример 10. Пусть $k(u) = (\alpha + u)^{-\alpha} \exp(\alpha + u)$, где $\alpha > 0$ — фиксированная постоянная. Нетрудно видеть, что условия (8.2), (8.3) и (8.15) здесь выполнены. Пусть $\psi_+(t) = \ln(\gamma + t)$ ((8.10) также справедливо),

т. е., как следует из (8.6),

$$u(t, 0) = k^{-1}(\psi_+(t)) \cong \ln \ln t + \alpha \ln \ln \ln t, \quad t \rightarrow +\infty$$

(функция k^{-1} определена в таблице 14). Поэтому из доказанной теоремы получаем, что $\varphi(t)$ в п. а. р. (8.4) имеет вид

$$\varphi(t) \cong t^{1/2} \ln^{1/2} t, \quad t \rightarrow +\infty.$$

2. Приближенные автомодельные решения типа II и III.

2.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (8.1), (8.6), (8.9), где функция $\psi_+(t)$ в (8.6) удовлетворяет условию (7.21). Тогда, как показано в теореме 7.2, п. а. р. уравнения (8.5) — функция $U_a = \psi_+(t)\theta_a(\xi)$ — удовлетворяет следующему параболическому уравнению:

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = U_a \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + G_+(t) \frac{\partial U_a}{\partial x} x. \quad (8.31)$$

Здесь

$$G_+(t) = \left\{ \ln \left[\frac{\psi'_+}{\varphi} \right] \right\}'(t), \quad t > 0; \quad l = \frac{1+m}{2m}. \quad (8.32)$$

Нетрудно убедиться, подставляя в (8.32) функцию φ из (7.22), что

$$G_+(t) = \frac{1}{2} \frac{\psi'_+(t)}{\psi_+(t)} \left\{ \frac{1}{m} - \left[\frac{\psi'_+}{\psi_+} \right]'(t) \right\}, \quad t > 0. \quad (8.32')$$

Поскольку $U_a = k(u_a)$, из (8.31) получаем для п. а. р. (8.4) уравнение

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{B}(t, u_a) = \mathbf{A}(u_a) - k'(u_a) \Phi_k(u_a) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 + G_+(t) \frac{\partial u_a}{\partial x} x. \quad (8.33)$$

Теорема 8.2. Пусть выполняются условия (8.2), (8.3) и пусть функция ψ_+ в (8.6) удовлетворяет предположению (7.21). Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих двух условий: или

$$\Phi_k(u) \leq 0, \quad u > 0; \quad G_+(t) \leq 0, \quad t > 0, \quad (8.34)$$

или

$$\Phi_k(u) \geq 0, \quad u > 0; \quad G_+(t) \geq 0, \quad t > 0. \quad (8.35)$$

Тогда функция φ вычисляется по формуле (7.22), $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.5), (7.8) и при $t \rightarrow +\infty$ выполняется предельное равенство (8.8).

Сделаем несколько замечаний об особенностях доказательства этой теоремы. Сопоставление уравнений (8.33) и (8.1) показывает, что условия (8.34) или (8.35) обеспечивают соответственно выполнение неравенств $u_a \geq u$ (т. е. $|z| = u_a - u$) или $u_a \leq u$ (т. е. $|z| = u - u_a$) всюду в $\mathbf{R}_+^1 \times (0, x^*(t))$ и тем самым предоставляют возможность проведения доказательства по указанной выше схеме. При этом необходимо учесть, что здесь выражение $I_2(t)$ в (8.18) принимает вид (ниже анализируется случай (8.34))

$$\begin{aligned} I_2(t) &= -|G_+| \int_0^{x^*} \frac{\partial u_a}{\partial x} x dx = -|G_+| \int_0^{x^*} \frac{\partial U_a}{\partial x} x \frac{dx}{k'(k^{-1}(U_a))} \leq \\ &\leq -\frac{|G_+(t)|}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))} \int_0^{x^*} \frac{\partial U_a}{\partial x} x dx = M_a |G_+| \varphi \frac{\psi_+}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))}, \end{aligned}$$

$$M_a = \left| \int_0^{\xi^*} \theta_a' \xi d\xi \right| < +\infty.$$

Отсюда, используя асимптотические равенства типа (8.27) и (8.30), а также условия (8.3), (7.23), получаем

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq \xi^* a^* M_a \frac{k'(k^{-1}(\psi_+))}{\varphi\psi_+} \int_0^t \frac{\varphi\psi_+ |G_+|}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))} d\tau \cong \\ &\cong M_a \frac{k'(k^{-1}(\psi_+))}{k'(k^{-1}(a^*\psi_+))} \frac{1}{\varphi} \int_0^t \varphi |G_+| d\tau \cong \\ &\cong \frac{1}{a^*} M_a \frac{1}{\varphi} \int_0^t \varphi |G_+| d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Пример 11. Рассмотрим уравнение (8.1) с коэффициентом $k(u) = \exp(u^\alpha)$, где $\alpha > 1$ — постоянная. Условия (8.2), (8.3) при этом выполнены и

$$\Phi_k(u) = \left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]' = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} u^{2-\alpha} < 0, \quad u > 0.$$

Пусть $\psi_+(t) = (\gamma+t)/\ln(\gamma+t)$, $\gamma > 1$ — постоянная, которая выбирается достаточно большой. Тогда

$$u(t, 0) = k^{-1}(\psi_+(t)) = \ln^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \frac{(\gamma+t)}{\ln(\gamma+t)} \right\}, \quad t > 0.$$

Функция $\psi_+(t)$ удовлетворяет условию (7.21) при $m=1$. Кроме того,

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'} \right]'(t) = 1 + \frac{\ln(\gamma+t) - 2}{[\ln(\gamma+t) - 1]^2} > \frac{1}{m} = 1, \quad t > 0,$$

и поэтому, как следует из (8.32'), $G_+(t) < 0$ при всех $t > 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае выполняются условия (8.34). Тогда из теоремы 8.2 заключаем, что задача имеет п. а. р. (8.4), в котором (см. (7.22))

$$\varphi(t) \cong t \ln^{-1/2} t, \quad t \rightarrow +\infty.$$

2.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача (8.1), (8.6'), (8.9).

Теорема 8.3. Пусть выполняются условия (8.2), (8.3) и все предположения теоремы 7.3. Пусть, кроме того, справедливо одно из следующих двух условий: или

$$\Phi_k(u) \leq 0, \quad u > 0; \quad G_-(t) \leq 0, \quad t \in (0, 1), \quad (8.36)$$

или

$$\Phi_k(u) \geq 0, \quad u > 0; \quad G_-(t) \geq 0, \quad t \in (0, 1), \quad (8.37)$$

где

$$G_-(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi_-'}{\psi_-} \right]'(t) \left\{ \frac{1}{n} - \left[\frac{\psi_-}{\psi_-'} \right]'(t) \right\}, \quad t \in (0, 1). \quad (8.28)$$

Тогда функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (7.6), (7.8) и при $t \rightarrow 1^-$ выполняется предельное равенство (8.8).

Пример 12. Пусть $k(u) = \exp[\ln^\alpha(A+u)]$, где $\alpha > 1$, $A \geq \exp(\alpha-1)$ — постоянные (см. таблицу 14). Тогда

$$\Phi_k(u) = \frac{1}{\alpha} \ln^{-\alpha}(A+u) [\ln(A+u) + (1-\alpha)] \geq 0.$$

Пусть $\psi_-(t) = [\gamma + (1-t)^{-2}] \exp\{-\ln^{1/2}[\gamma + (1-t)^{-1}]\}$, т. е.

$$u(t, 0) \cong \exp\{[2|\ln(1-t)| - |\ln(1-t)|^{1/\alpha}]\}, \quad t \rightarrow 1^-.$$

Функция ψ_- удовлетворяет условиям теоремы 8.3, причем $G_+(t) \geq 0$ (см. (8.38) при $n=-2$). Поэтому рассматриваемая задача имеет п. а. р. (8.4), где

$$\varphi(t) \cong (1-t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln^{1/2}[(1-t)^{-1}]\right\}, \quad t \rightarrow 1^-.$$

3. Приближенные автомодельные решения типа IV.

3.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача с граничными условиями (8.6), определенными при всех $t > 0$.

Теорема 8.4. Пусть выполняются условия (8.2), (8.3) и функция ψ_+ в (8.6) удовлетворяет предположению (7.32). Пусть, кроме того, выполняется одно из двух условий: (8.34) или (8.35), где

$$G_+(t) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\psi'_+}{\psi_+} \left(\frac{\psi_+}{\psi'_+} \right)' \right] (t), \quad t > 0. \quad (8.39)$$

Тогда функция φ вычисляется по формуле (7.33), $\theta_\alpha(\xi)$ является решением задачи (7.7), (7.8) и при $t \rightarrow +\infty$ выполняется предельное равенство (8.8).

Пример 13. Пусть $k(u) = \exp(\exp u)$. Здесь

$$\Phi_k(u) = \left(\frac{k(u)}{k'(u)} \right)' = -\exp(-u) < 0, \quad u > 0.$$

Рассмотрим функцию $\psi_+(t) = \exp[(\gamma+t)^\alpha]$, где $\alpha \in (0, 1]$ — фиксированная постоянная. Имеем

$$\left[\frac{\psi'_+}{\psi_+} \right]' (t) = \frac{1-\alpha}{\alpha} (\gamma+t)^{-\alpha} \geq 0, \quad t > 0.$$

Отсюда $G_+(t) \leq 0$ (см. (8.39)), и поэтому задача имеет п. а. р. (8.4), в котором

$$\varphi(t) \cong \alpha^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1-\alpha}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} t^\alpha\right], \quad t \rightarrow +\infty.$$

3.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача с условиями (8.6').

Теорема 8.5. Пусть выполняются условия (8.2), (8.3) и функция ψ_- в (8.6') удовлетворяет предположению (7.34). Пусть, кроме того, выполняется условие (8.37), где

$$G_-(t) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\psi'_-}{\psi_-} \left(\frac{\psi_-}{\psi'_-} \right)' \right] (t), \quad t \in (0, 1). \quad (8.40)$$

Тогда функция φ вычисляется по формуле (7.35), $\theta_\alpha(\xi)$ является решением задачи (7.7), (7.8) и при $t \rightarrow 1^-$ выполняется предельное равенство (8.8).

З а м е ч а н и е. В сделанных предположениях функция $(\psi_-/\psi_-')'(t)$ не может быть положительной при всех $t \in (0, 1)$. Поэтому ситуация (8.35) в данной теореме не анализируется.

П р и м е р 14. Пусть $k(u) = \exp[(1+u)^{1/2} \ln(1+u)]$. Тогда $\Phi_k(u) > 0$ при всех $u > 0$. Пусть

$$\psi_-(t) = \exp\{\ln^\alpha[\gamma + (1-t)^{-1}]\}, \quad t \in (0, 1),$$

где $\alpha > 1$ — постоянная. Этой функции отвечает граничный режим

$$u(t, 0) = k^{-1}(\psi_-(t)) \cong \frac{1}{4\alpha^2} \frac{\ln^{2\alpha}[(1-t)^{-1}]}{\ln^2 \ln[(1-t)^{-1}]}, \quad t \rightarrow 1^-.$$

Из (8.40) следует, что здесь $G_-(t) \geq 0$, т. е. условие (8.37) выполнено. Тогда в силу теоремы 8.5 заключаем, что рассматриваемая задача имеет п. а. р. (8.4) и

$$\varphi(t) \cong \alpha^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1-\alpha}{2}} [(1-t)^{-1}] \exp\left\{\frac{1}{2}(1-t)^{-1}\right\}$$

при $t \rightarrow 1^-$.

Литература

1. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I.— Матем. сб., 1982, т. 118 (160), с. 291—322.
2. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II.— Матем. сб., 1982, т. 118 (160), с. 435—455.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492—495.
4. Atkinson F. V., Peletier L. A. Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation.— Arch. for Ration. Mech. and Anal., 1974, v. 54, p. 373—392.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1982