ных в данной работе результатов, а третий наиболее полно отвечает условиям высокой термостойкости. Второй тип соединения занимает промежуточное положение. В таблице указан процент годности после различного количества циклических нагреваний и охлаждений (термоциклов). Как видно из табл. 3, учет при подборе материалов соединения их коэффициентов теплопроводности и теплообмена с окружающей средой приводит к существенному увеличению термостойкости.

Авторы глубоко благодарны А. А. Самарскому за советы и внимание к работе.

Литература

1. Смогунов В. В. Способ получения термопереходов.— М., 1981. Деп. ВНИИПИ, 1981, № 14—81.

2. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.

3. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.

4. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. ТЕКОН / Пакет программ для решения тепловых задач.— М., 1978. (Препринт / ИПМ: № 65).

5. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Попов С. Б. Динамика нагрева и разлета вещества при поглощении сильноточного релятивистского пучка электронов.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7.

6. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4.

7. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. Диссипативные структуры в тригерных средах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 2 марта 1981 г.

УДК 517.949

А. А. САМАРСКИЙ, В. Ф. ТИШКИН, А. П. ФАВОРСКИЙ, М. Ю. ШАШКОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ АНАЛОГОВ ОПЕРАЦИЙ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Введение. Большинство уравнений математической физики можно сформулировать в терминах дифференциальных операторов первого порядка

$$\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{div}\mathbf{A},\ \operatorname{rot}\mathbf{A},\ \operatorname{grad}\mathbf{A}=\nabla\mathbf{A}\ \text{и}\ \operatorname{div}\hat{\sigma},$$

здесь φ — скаляр, $\mathbf{A}$ — вектор, $\hat{\sigma}$ — тензор. Поэтому и при построении разностных схем целесообразно использовать соответствующие разностные аналоги операторов первого порядка, входящих в исходные уравнения. Тогда свойства разностных схем аналогично дифференциальному случаю будут определяться свойствами этих операторов.

Для получения согласованной системы разностных операторов в работах [1—3] был предложен метод «опорных» операторов. В этих работах была построена согласованная система основных операторов векторного анализа, эти разностные операторы обозначаются через $\mathrm{DIV}\,\mathbf{A}$, $\mathrm{GRAD}\,\varphi$, $\mathrm{ROT}\,\mathbf{A}$.

Построение системы согласованных операторов производится следующим образом. Выбирается один из операторов div, grad или rot и производится непосредственная аппроксимация. Полученный таким образом разностный оператор называется определяющим. Далее на основе выбранных условий согласования строятся разностные аналоги остальных операторов, эти операторы называются определяемыми.

Целью настоящей работы является распространение этого подхода на тензорные объекты и получение разностных аналогов операций: дивергенция тензора $\mathrm{DIV}\,\hat{\sigma}$ и градиент вектора $\mathrm{GRAD}\,\mathbf{A}$.

В одномерном случае в сферической системе координат эти операторы были построены в [4], там приведен пример расчета. В настоящей работе описан общий подход к построению операторов DIV $\hat{\sigma}$ и GRAD A. Получен явный вид операторов в случае цилиндрических координат в предположении осевой симметрии.

С использованием разностных операторов строится разностная схема для расчета двухмерных упруго-пластических течений, обладающая свойством, аналогичным свойству полной консервативности для разностных уравнений газовой динамики [5].

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

п. 1. В работах [1—3] для построения согласованных разностных операторов GRAD φ, DIV A и ROT A использовались соотношения

$$\oint_S \varphi(\mathbf{A},\ \mathbf{n})\,dS = \int_V \varphi \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV + \int_V (\mathbf{A},\ \operatorname{grad}\varphi)\,dV, \tag{1.1}$$

$$\oint_S (\mathbf{n},\ \mathbf{A}\times\mathbf{B})\,dS = \int_V (\mathbf{B},\ \operatorname{rot}\mathbf{A})\,dV - \int_V (\mathbf{A},\ \operatorname{rot}\mathbf{B})\,dV, \tag{1.2}$$

$$\oint_S \varphi(\mathbf{C},\ \mathbf{n}\times\mathbf{A})\,dS = \int_V \varphi(\mathbf{C},\ \operatorname{rot}\mathbf{A})\,dV - \int_V (\mathbf{C},\ \mathbf{A}\times\operatorname{grad}\varphi)\,dV, \tag{1.3}$$

здесь S — поверхность, ограничивающая объем V, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{C}$ — произвольная вектор-функция такая, что $\operatorname{rot}\mathbf{C}\equiv 0$.

п.2. Для построения операций дивергенция тензора DIV $\hat{\sigma}$ и градиент вектора GRAD A нам наряду с (1.1) — (1.3) понадобятся дополнительные соотношения [6]:

$$\oint_S \varphi\psi(\mathbf{A},\ \mathbf{n})\,dS = \int_V \varphi\psi \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV + \int_V \varphi(\mathbf{A},\ \operatorname{grad}\psi)\,dV +$$

$$+ \int_V \psi(\mathbf{A},\ \operatorname{grad}\varphi)\,dV, \tag{1.4}$$

$$\oint_S \psi(\mathbf{n},\ (\hat{\sigma}\cdot\mathbf{A}))\,dS = \int_V \nabla\mathbf{A}\cdot\cdot\,\psi\hat{\sigma}^*dV +$$

$$+ \int_V (\mathbf{A},\ \psi\operatorname{div}\hat{\sigma})\,dV + \int_V (\mathbf{A},\ (\operatorname{grad}\psi\cdot\hat{\sigma}))\,dV, \tag{1.5}$$

где φ, ψ — скалярные функции, $\mathbf{A}$ — вектор, $\hat{\sigma} = \{\sigma_{\alpha\beta}\}$ — тензор второго ранга, $\sigma^* = \{\hat{\sigma}^*_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}\}$ — тензор, сопряженный с $\hat{\sigma}$.

Тождества (1.4), (1.5) являются непосредственным следствием следующих соотношений [6]:

$$\operatorname{div}\psi\hat{\sigma} = \psi\operatorname{div}\hat{\sigma} + \operatorname{grad}\psi\cdot\hat{\sigma}, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{div}(\psi\hat{\sigma}\cdot\mathbf{A}) = \nabla\mathbf{A}\cdot\cdot\,\psi\hat{\sigma}^* + \mathbf{A}\cdot\operatorname{div}\psi\hat{\sigma}. \tag{1.8}$$

п. 3. В качестве определяющего можно выбрать любой из операторов div A, grad φ или rot A. Способы их непосредственной аппроксимации подробно описаны в [7]. Выберем в качестве определяющего оператор DIV A, тогда операторы GRAD φ и ROT A определяются на основе соотношений (1.1), (1.3) соответственно.

п. 4. Соотношение (1.4) используется для определения по оператору GRAD еще одного разностного аналога оператора grad, который обозначим ГRAD. Необходимость введения такого оператора связана с тем, что нам понадобятся разностные аналоги оператора grad φ с различными областями определения.

Для аналогичной цели служит и соотношение (1.2), при помощи которого по оператору ROT строится оператор $\mathscr{R}$OT.

п. 5. Для определения компонент вектора DIV $\hat{\sigma}$ используется тождество (1.5). При этом определяются проекции этого вектора на направление, задаваемое вектором **A**. Задавая **A** нужным образом и используя явный вид тензора $\nabla\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathbf{A}$, можно получить все интересующие нас проекции.

п. 6. Для построения разностных аналогов компонент тензора $\nabla\mathbf{C} = \mathrm{grad}\,\mathbf{C}$ также используется тождество (1.5), в котором следует положить $\psi \equiv 1$ и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}$:

$$\oint_S (\mathbf{n},\ (\hat{\sigma}\cdot\mathbf{C}))\,dS = \int_V \nabla\mathbf{C}\cdot\cdot\hat{\sigma}^* dV + \int_V (\mathbf{C},\ \mathrm{div}\,\hat{\sigma})\,dV. \tag{1.9}$$

Зная оператор DIV$\hat{\sigma}$, отсюда можно определить тензор GRAD **C**.

§ 2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

п. 1. Все дальнейшие рассмотрения будем проводить в цилиндрической системе координат R, Z, φ. Предполагается, что все рассматриваемые векторные и тензорные поля обладают осевой симметрией.

Таким образом, все величины зависят только от R и Z. Для описания векторов и тензоров используются их физические составляющие, которые будем обозначать AR, AZ, σRR, σRZ, $\sigma\varphi\varphi$ и т. д.

п. 2. Предполагается, что на плоскости R, Z задана область V, в которой введена сетка, по структуре аналогичная прямоугольной сетке в квадрате. С каждым узлом связывается два индекса ij; $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant M$. Ячейка сетки с вершинами ij; $i+1,j$; $i+1$, $j+1$; i, $j+1$ обозначается через V_{ij}.

п. 3. Рассматриваются следующие пространства скалярных сеточных функций: HK — функции, заданные в узлах, HC — функции, заданные в ячейках. Аналогично вводятся пространства сеточных вектор-функций $\mathscr{H}K$, $\mathscr{H}C$ и пространства сеточных тензоров $\hat{\mathscr{H}}K$, $\hat{\mathscr{H}}C$.

§ 3. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

п. 1. Уравнения динамики сплошной среды можно записать в следующем виде [8, 9]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{W} = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho\,\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathrm{div}\,\hat{\sigma}, \tag{3.2}$$

$$\rho\,\frac{d\varepsilon}{dt} = \hat{\sigma}\cdot\cdot\hat{S}, \tag{3.3}$$

где ρ — плотность, **W** — вектор скорости, $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений, ε — удельная внутренняя энергия, $\hat{S} = [\nabla\mathbf{W} + (\nabla\mathbf{W})^*]/2$ — тензор скоростей деформаций.

Для замыкания системы (3.1) — (3.3) следует добавить уравнения, связывающие напряжения и деформации, и уравнение состояния. Мы не будем конкретизировать вид этих уравнений, отметив, однако, что никаких новых операций над тензорами при их записи не встречается [10].

В предложении осевой симметрии тензор напряжений имеет вид

$$\hat{\sigma}=\begin{Vmatrix} \sigma RR & 0 & \sigma RZ \\ 0 & \sigma\varphi\varphi & 0 \\ \sigma RZ & 0 & \sigma ZZ \end{Vmatrix}.$$

Вектор скорости $\mathbf{W}$ имеет вид $\mathbf{W}=(WR,\ WZ,\ 0)$.

п.2. При построении разностной схемы будем использовать лагранжев подход. Используется следующая дискретизация: $\rho,\ \varepsilon\in HC$; $\mathbf{W}\in\mathcal{H}K$; $\hat{\sigma},\ \hat{S}\in\mathcal{H}\hat{C}$.

п.3. При построении разностной схемы будем следовать рассмотрениям § 1. В качестве определяющего выберем оператор $\mathrm{DIV}\,\mathbf{A}:\mathcal{H}K\to HC$:

$$(\mathrm{DIV}\,\mathbf{A})_{ij}=\frac{1}{V_{ij}}\sum_{k,l=0,1}\left[SR^{ij}_{i+k,j+l}AR_{i+k,j+l}+SZ^{ij}_{i+k,j+l}\,AZ_{i+k,j+l}\right],\quad (3.4)$$

где в соответствии с рекомендациями из [7, 12] положим

$$SR^{ij}_{i+k,j+l}=\partial V_{ij}/\partial R_{i+k,j+l};\quad SZ^{ij}_{i+k,j+l}=\partial V_{ij}/\partial z_{i+k,j+l};$$
$$V_{ij}=0{,}25\,[(R^2_{ij}-R^2_{i+1,j+1})(z_{i+1,j}-z_{i,j+1})+$$
$$+(R^2_{i+1,j}-R^2_{i,j+1})(z_{i+1,j+1}-z_{ij})].\quad (3.5)$$

Согласованный с $\mathrm{DIV}\,\mathbf{A}$ оператор $\mathrm{GRAD}\,\varphi:HC\to\mathcal{H}K$, полученный на основе (1.1), имеет вид

$$GR_{ij}=-\frac{1}{VK_{ij}}\sum_{k,l=0,1}\varphi_{i-k,j-l}SR^{i-k,j-l}_{ij},$$
$$GZ_{ij}=-\frac{1}{VK_{ij}}\sum_{k,l=0,1}\varphi_{i-k,j-l}SZ^{i-k,j-l}_{ij},\quad (3.6)$$

здесь VK_{ij} — «приузловой» объем: $VK_{ij}=0{,}25\sum_{k,l=0,1}V_{i-k,j-l}$; $GR_{ij}GZ_{ij}$ — физические составляющие вектора $\mathrm{GRAD}\,\varphi$. Отметим, что рассмотренные операторы $\mathrm{DIV}\,\mathbf{A}$ и $\mathrm{GRAD}\,\varphi$ используются при построении полностью консервативных схем газовой динамики [11].

п.4. Далее построим оператор $\Gamma\mathrm{RAD}:HK\to\mathcal{H}C$, при этом используем тождество (1.4). Его разностный аналог для $\varphi\in HC$, $\psi\in HK$ и $\mathbf{A}=\mathbf{eR}=(1,\ 0,\ 0)$ запишем так:

$$\sum_{HC}\varphi_{ij}\Gamma R_{ij}(\psi)V_{ij}+\sum_{HK}\psi_{ij}GR_{ij}(\varphi)VK_{ij}+$$
$$+\sum_{HC}\varphi_{ij}(\mathrm{div}\,\mathbf{eR})_{ij}(M\psi)_{ij}V_{ij}=0,\quad (3.7)$$

где оператор усреднения $M:HK\to HC$:

$$(M\psi)_{ij}=0{,}25\sum_{k,l=0,1}\psi_{i+k,j+l},\quad (3.8)$$

Из (3.7) следует, что

$$\Gamma R_{ij}(\psi)=\frac{1}{V_{ij}}\sum_{k,l=0,1}SR^{ij}_{i+k,j+l}\,\psi_{i+k,j+l}-(\mathrm{div}\,\mathbf{eR})_{ij}\cdot(M\psi)_{ij}.\quad (3{,}9)$$

Аналогично так как $\mathrm{div}\,\mathbf{ez}=0$, для $\mathbf{ez}=(0,\ 1,\ 0)$ получаем

$$\Gamma Z_{ij}(\psi)=\frac{1}{V_{ij}}\sum_{k,l=0,1}SZ^{ij}_{i+k,j+l}\psi_{i+k,j+l}.\quad (3.10)$$

Естественное требование, чтобы $\Gamma\mathrm{RAD}\,\psi \equiv 0$ при $\psi = \mathrm{const}$, приводит к следующей аппроксимационной формуле для $\operatorname{div}\mathbf{eR}$ в центре ячейки

$$(\operatorname{div}\mathbf{eR})_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} SR^{ij}_{i+k,j+l}.$$

п.5. Перейдем теперь к построению операции $\mathrm{DIV}\,\hat{\sigma}: \mathscr{H}\hat{C} \to \mathscr{H}K$. Для этого используем разностный аналог (1.5). Так как только компонента $\nabla_{\varphi\varphi}\mathbf{eR}$ тензора $\nabla\mathbf{eR}$ отлична от нуля, то, полагая в (1.5) $\mathbf{A} = \mathbf{eR}$ и выбирая $\psi \in HK$, $\hat{\sigma} \in \mathscr{H}\hat{C}$, можем записать

$$\sum_{HK} \psi_{ij} DR_{ij}(\hat{\sigma})\, VK_{ij} + \sum_{HC} [\Gamma R_{ij}(\psi)\, \sigma RR_{ij} + \Gamma Z_{ij}(\psi)\, \sigma ZR_{ij}]\, V_{ij} +$$

$$+ \sum_{HC} (M\psi)_{ij}\, \sigma\varphi\varphi_{ij} (\nabla_{\varphi\varphi}\mathbf{eR})_{ij} V_{ij} = 0, \tag{3.11}$$

где DR — физическая составляющая вектора $\mathrm{DIV}\,\hat{\sigma}$ по R. Используя (3.9), (3.10), из тождества (3.11) получаем

$$DR_{ij}(\hat{\sigma}) = -\frac{1}{VK_{ij}} \left\{ \left[\sum_{k,l=0,1} \sigma RR_{i-k,j-l} SR_{ij}^{i-k,j-l} \right] - \right.$$

$$- VK_{ij} [M^* (\sigma RR \operatorname{div}\mathbf{eR})]_{ij} + \left[\sum_{k,l=0,1} \sigma ZR_{i-k,j-l} SZ_{ij}^{i-k,j-l} \right] +$$

$$\left. + VK_{ij} [M^* (\sigma\varphi\varphi \cdot \nabla_{\varphi\varphi}\mathbf{eR})]_{ij} \right\}. \tag{3.12}$$

Аналогично для компоненты $DZ_{ij}(\hat{\sigma})$ имеем

$$DZ_{ij}(\hat{\sigma}) = -\frac{1}{VK_{ij}} \left\{ \left[\sum_{k,l=0,1} \sigma ZR_{i-k,j-l} SR_{ij}^{i-k,j-l} \right] - \right.$$

$$\left. - VK_{ij} [M^* (\sigma ZR \operatorname{div}\mathbf{eR})]_{ij} + \left[\sum_{k,l=0,1} \sigma ZZ_{i-k,j-l} SZ_{ij}^{i-k,j-l} \right] \right\}. \tag{3.13}$$

В (3.12), (3.13) оператор M^* имеет вид $(M^*\varphi)_{ij} = \dfrac{1}{VK_{ij}} \sum\limits_{k,l=0,1} \varphi_{i-k,j-l} \times$ $\times V_{i-k,j-l}$.

п.6. Для аппроксимации тензора $\dot{S} = 0{,}5\,[\nabla\mathbf{W} + (\nabla\mathbf{W})^*]$, который представляет собой симметричную часть тензора $\nabla\mathbf{W}$, используем разностный аналог тождества (1.9). При этом тензор $\hat{\sigma}$ возьмем симметричным $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^* \in \mathscr{H}C$ и $\mathbf{C} = \mathbf{W} \in \mathscr{H}K$:

$$\sum_{HC} \{\dot{S}RR_{ij}\, \sigma RR_{ij} + 2\, \dot{S}ZR_{ij} \sigma ZR_{ij} + \dot{S}ZZ_{ij} \sigma ZZ_{ij} +$$

$$+ \dot{S}\varphi\varphi_{ij} \sigma\varphi\varphi_{ij}\}\, V_{ij} - \sum_{HK} \left\{ WR_{ij} \left[\sum_{k,l=0,1} \sigma RR_{i-k,j-l}\, SR_{ij}^{i-k,j-l} - \right. \right.$$

$$- VK_{ij} [M^* (\sigma RR \operatorname{div}\mathbf{eR})]_{ij} + \sum_{k,l=0,1} \sigma ZR_{i-k,j-l} SZ_{ij}^{i-k,j-l} +$$

$$\left. + VK_{ij} [M^* (\sigma\varphi\varphi\, \nabla_{\varphi\varphi}\mathbf{eR})]_{ij} \right] - WZ_{ij} \left[\sum_{k,l=0,1} \sigma ZR_{i-k,j-l} SR_{ij}^{i-k,j-l} - \right.$$

$$\left. \left. - VK_{ij} [M^* (\sigma ZR \operatorname{div}\mathbf{eR})]_{ij} + \sum_{k,l=0,1} \sigma ZZ_{i-k,j-l} SZ_{ij}^{i-k,j-l} \right] \right\}. \tag{3.14}$$

Из приведенного соотношения следует, что

$$\dot{S}RR_{ij}(\mathbf{W}) = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} WR_{i+k,j+l} SR^{ij}_{i+k,j+l} - [M(WR)]_{ij} (\operatorname{div} \mathbf{eR})_{ij};$$

$$\dot{S}ZR_{ij}(\mathbf{W}) = 0{,}5 \left\{ \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} [WR_{i+k,j+l} SZ^{ij}_{i+k,j+l} + \right.$$

$$\left. + WZ_{i+k,j+l} SR^{ij}_{i+k,j+l}] - [M(WZ)]_{ij} (\operatorname{div} \mathbf{eR})_{ij} \right\};$$

$$\dot{S}ZZ_{ij}(\mathbf{W}) = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} WZ_{i+k,j+l} SZ^{ij}_{i+k,j+l}; \qquad (3.15)$$

$$\dot{S}\varphi\varphi_{ij}(\mathbf{W}) = [M(WR)]_{ij} [\nabla_{\varphi\varphi} \mathbf{eR}]_{ij}.$$

п.7. В случае если для аппроксимации $\nabla_{\varphi\varphi}\mathbf{eR}$ в центре ячейки используется та же формула, что и для $\operatorname{div}\mathbf{eR}$, $\nabla_{\varphi\varphi}\mathbf{eR} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} SR^{ij}_{i+k,j+l}$, то непосредственным следствием тождества (3.11) являются равенства

$$DR_{ij}(p\hat{I}) = GR_{ij}(p), \quad DZ_{ij}(p\hat{I}) = GZ_{ij}(p),$$

где $\hat{I}$ — единичный тензор, что соответствует равенству $\operatorname{div}(p\hat{I}) = \operatorname{grad} p$ в дифференциальном случае.

Литература

1. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы.— М., 1981.—32 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 9).
2. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 5, с. 1092—1096.
3. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1317—1327.
4. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Шашков М. Ю. Использование метода опорных операторов для аппроксимации операций тензорного анализа.— М., 1981.—16 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 97).
5. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.— М.: Наука, 1980.—352 с.
6. Корн Т., Корн Г. Справочник по математике.— М.: Наука, 1977.—832 с.
7. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Разностные аналоги основных дифференциальных операторов первого порядка.— М., 1981.—29 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 8).
8. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления — М.: Изд-во АН СССР, 1951.—426 с.
9. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
10. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений.— В сб.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 212—263.
11. Фаворский А. П. Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1308—1321.
12. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 6, с. 1285—1287.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 12 февраля 1982 г.