ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 22 Июль 1982 Август № 4

УДК 519.63

ДВУМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СЕТКАХ

ГОЛОВИЗНИН В. М., КОРШУНОВ В. К., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

На основе вариационного принципа получены двумерные разностные схемы магнитной гидродинамики на треугольных лагранжевых сетках, обладающие свойством полной консервативности, включающим разностный аналог закона сохранения момента импульса. Схемы записаны в терминах разностных операторов. Из условия спектрального согласования введена линейная искусственная вязкость. Приведены примеры численных расчетов.

От разностных схем, предназначенных для решения нелинейных задач механики сплошных сред, естественно требовать, чтобы они передавали тонкие особенности изучаемых течений на реальных, т. е. достаточно грубых расчетных сетках [1].

Для многомерных задач это положение наполняется более глубоким по сравнению с одномерным случаем содержанием.

Так, при переходе от одного к нескольким пространственным измерениям следует учесть дополнительный закон сохранения, которому, в соответствии с принципом полной консервативности [1], должны удовлетворять также и разностные схемы: закон сохранения момента импульса.

Кроме того, в многомерных задачах существенную роль играют «геометрические» неустойчивости, такие, как неустойчивость Рэлея — Тейлора и Гельмгольца. Развитие этих неустойчивостей на начальных стадиях описывается линейным приближением соответствующих уравнений, поэтому для адекватного описания сплошной среды разностной схемой необходимо, чтобы акустические приближения разностных схем хорошо аппроксимировали уравнения акустики и передавали наиболее характерные их свойства.

Сравнение различных методик численного решения задач газовой динамики и магнитной гидродинамики (МГД), основанных на использовании эйлеровых [2] и лангранжевых [3] переменных, показывает, что последние в сфере их применимости обладают большей «разрешающей способностью».

Однако при расчетах двумерных задач с использованием четырехугольных лагранжевых сеток [4]—[10] возникают известные трудности [4], [8], связанные с «перехлестом» лагранжевых ячеек даже при отсутствии сильных сдвиговых деформаций у моделируемых течений. Этого недостатка лишены разностные схемы на треугольных лагранжевых сетках [11]—[14].

В предлагаемой работе получены и исследованы двумерные разностные схемы МГД на треугольных лагранжевых сетках, предназначенные для расчета как плоских, так и осесимметричных течений с двумя компонен-

тами вмороженного магнитного поля, лежащими в плоскости течения. В основу построения схем положен вариационный принцип Гамильтона — Остроградского [5].

Показано, что система дифференциально-разностных уравнений (дифференциальных по времени и разностных по пространственным переменным), получающаяся из вариационного принципа, обладает свойством полной консервативности [1], включающим в себя разностный аналог закона сохранения момента импульса, и имеет первый порядок аппроксимации по пространству. Линейное приближение дифференциально-разностных уравнений аппроксимирует уравнения акустики также с первым порядком, и, кроме того, пространственная часть разностного акустического оператора сохраняет свойство самосопряженности и положительной определенности на соответствующих фоновых течениях.

Система дифференциально-разностных уравнений и соответствующая ей линеаризованная система записаны в терминах разностных аналогов дифференциальных операторов [15]. На основе принципа спектрального согласования введена линейная искусственная вязкость.

Переход от дифференциально-разностных уравнений к разностным осуществляется заменой производных по времени конечными разностями. Это приводит к многопараметрическому семейству разностных схем. Показано, что запись дифференциально-разностных уравнений в операторной форме позволяет сохранить свойство полной консервативности при дискретизации по времени (при соответствующем выборе параметров).

Приведены примеры численных расчетов.

§ 1. Функционал действия

Пусть G — некоторая область в декартовых координатах (x, y), занятая сплошной средой (в случае осевой симметрии x соответствует координате r, радиусу, y — координате z).

Области G поставим в соответствие область Ω в лагранжевых переменных (α, β).

Функционал действия для недиссипативной среды с бесконечной электропроводностью в присутствии магнитного поля $\mathbf{H}=(H_x, H_y)$ определяется выражением [5]

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_{\Omega}\rho J\left(\frac{u^2+v^2}{2}-\varepsilon-\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)d\alpha\,d\beta\right]dt, \tag{1}$$

где $L(t)$ — лагранжиан, ρ, ε — плотность и удельная внутренняя энергия среды, занимающей область G, $H^2=H_x^2+H_y^2$, $\mathbf{v}=(u, v)$ — скорость,

$$J=\frac{1}{l}\frac{\partial(x^l, y)}{\partial(\alpha, \beta)}>0 \tag{2}$$

является якобианом перехода от эйлеровых координат к лагранжевым ($l=1$ — для случая плоской, $l=2$ — для случая осевой симметрии задачи).

§ 2. Вариационный принцип в МГД

Динамические уравнения МГД следуют из условия равенства нулю первой вариации функционала (1), взятой с учетом дополнительных диф-

ференциальных связей [5]: условий вмороженности магнитного поля:

$$H_x=\frac{1}{J}\frac{\partial(x,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)},\qquad H_y=\frac{1}{J}\frac{\partial(y,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)},\qquad \psi(\alpha,\beta)=\mathrm{const}; \tag{3}$$

уравнения неразрывности:

$$\rho J=\rho_0(\alpha,\beta); \tag{4}$$

первого начала термодинамики:

$$d\varepsilon=-\frac{P}{\rho_0(\alpha,\beta)}dJ. \tag{5}$$

Здесь $\psi(\alpha,\beta)$ — величина магнитного потока, $\rho_0(\alpha,\beta)$ — плотность среды в лагранжевых переменных, P — давление среды.

§ 3. Уравнения адиабатической МГД

Динамические уравнения МГД в лагранжевых переменных имеют вид

$$\begin{gathered}\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}+x^{l-1}\frac{\partial(P_H,y)}{\partial(\alpha,\beta)}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_x,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}=0,\\ \rho_0\frac{dv}{dt}+\frac{1}{l}\frac{\partial(x^l,P_H)}{\partial(\alpha,\beta)}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_y,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}=0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $P_H=P+H^2/8\pi$.

Условие адиабатичности течения (5) дает уравнение изменения внутренней энергии

$$\rho_0\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\left(\frac{\partial(u,y)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(x,v)}{\partial(\alpha,\beta)}\right), \tag{7}$$

эквивалентное закону сохранения энтропии s.

Система уравнений (6), (7), (3), (4) совместно с уравнением состояния $P=P(\rho,\varepsilon)$, кинематическими соотношениями $dx/dt=u$, $dy/dt=v$ и краевыми условиями полностью определяет МГД-модель сплошной среды.

Без ограничения общности можно считать, что на границе Γ области G заданы условия

$$\left.\frac{dP}{d\mathbf{n}}\right|_{\gamma_1}=0,\qquad P|_{\gamma_2}=P^*(x,y)\geqslant 0, \tag{8}$$

где $\gamma_1\cup\gamma_2=\Gamma$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ.

§ 4. Вариационный принцип для уравнений акустики

1. Получим уравнения, описывающие акустические колебания среды [9].

Пусть задано малое возмущение $(\Delta x,\Delta y)$ какого-либо фонового течения. Разлагая (1) с учетом (2)—(5) в ряд Тейлора по величинам возмущений до второго порядка малости включительно, находим

$$\Delta L=\Delta_1 L+\Delta_2 L+o((\Delta x)^3,(\Delta y)^3),$$

где, вследствие справедливости уравнений (6) для невозмущенного тече-

ния, член первого порядка $\Delta_1 L \equiv 0$,

$$\Delta_2 L = \iint\limits_{\Omega} \Big\{ \rho_0 \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{2} + P_H \Delta_2 J - \tag{9}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{c_A^2 \rho}{J} (\Delta_1 J)^2 - \frac{1}{8\pi J} \Big[\Big(\frac{\partial(\Delta x, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} - H_x \Delta_1 J \Big)^2 +$$

$$+ \Big(\frac{\partial(\Delta y, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} - H_y \Delta_1 J \Big)^2 \Big] \Big\} d\alpha d\beta.$$

Здесь члены разложения Якобиана J

$$\Delta_1 J = \frac{\partial(x^{l-1}\Delta x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{1}{l} \frac{\partial(x^l, \Delta y)}{\partial(\alpha, \beta)},$$

$$\Delta_2 J = \frac{\partial(x^{l-1}\Delta x, \Delta y)}{\partial(\alpha, \beta)},$$

$c_A^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$ — адиабатическая скорость звука. Условие равенства нулю первой вариации функционала

$$\Delta_2 S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Delta_2 L \, dt$$

приводит к уравнениям МГД-акустики

$$\rho_0 \frac{d\Delta u}{dt} + (l-1) \Delta x \frac{\partial(P_H, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + x^{l-1} \Big[\frac{\partial(\Delta P_H, y)}{\partial(\alpha, \beta)} +$$

$$\pm \frac{\partial(P_H, \Delta y)}{\partial(\alpha, \beta)} \Big] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\Delta H_x, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \tag{10}$$

$$\rho_0 \frac{d\Delta v}{dt} + \frac{1}{l} \frac{\partial(x^l, \Delta P_H)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x^{l-1}\Delta x, P_H)}{\partial(\alpha, \beta)} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\Delta H_y, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0,$$

где

$$\Delta P_H = - \frac{c_A^2 \rho}{J} \Delta_1 J + \frac{H_x \Delta H_x + H_y \Delta H_y}{4\pi},$$

$$\Delta H_x = \frac{1}{J} \Big[\frac{\partial(\Delta x, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} - H_x \Delta_1 J \Big],$$

$$\Delta H_y = \frac{1}{J} \Big[\frac{\partial(\Delta y, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} - H_y \Delta_1 J \Big].$$

Из (9) следует, что в операторном уравнении

$$d^2 \Delta \mathbf{r} / dt^2 = -A \Delta \mathbf{r}, \qquad \Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y),$$

соответствующем (10), оператор A самосопряжен при условиях (8) и $P_H = \text{const}$. На устойчивых фоновых течениях оператор A неотрицательно определен.

§ 5. Дискретизация физических величин

Пользуясь известным произволом в выборе лагранжевых переменных, будем считать, что область Ω представляет собой параллелограмм с углом $\pi/3$ (фиг. 1).

Разобьем Ω на правильные треугольники (пусть h_α — сторона треугольной ячейки, h_β — высота). Введем в Ω две разностные сетки: множество вершин

$$\overline{\omega}=\{\alpha_{ij}=(i+j/2)h_\alpha,\ \beta_{ij}=jh_\beta,\ \ 0\leqslant i\leqslant N,\ 0\leqslant j\leqslant M\}$$

и множество центров треугольных ячеек

$$\omega=\{[\alpha_{ij1}=(i+(j+1)/2)h_\alpha,\ \ \beta_{ij1}=(j+{}^1/_3)h_\beta],$$

$$[\alpha_{ij2}=(i+1+j/2)h_\alpha,\ \beta_{ij2}=(j+{}^2/_3)h_\beta],\quad 0\leqslant i\leqslant N-1,\quad 0\leqslant j\leqslant M-1\}.$$

Таким образом, каждому узлу сетки поставлено в соответствие два индекса: $i,\ j\in\overline{\omega}$, а каждой ячейке сетки — три индекса: $i,\ j,\ k\in\omega,\ \ k=1,2$.

Обратным преобразованием $\Omega\to G$ получим разностную сетку в области G.

Обозначим через $\mathscr{H}_{\overline{\omega}}$ и $\mathscr{H}_\omega$ множества сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}$ и ω соответственно.

Отнесем значения координат, скоростей частиц среды, а также значения магнитного потока к сетке $\overline{\omega}$:

$$x_{ij},\ y_{ij},\ u_{ij},\ v_{ij},\ \psi_{ij}\in\mathscr{H}_{\overline{\omega}},\qquad i,\ j\in\overline{\omega},$$

а термодинамические величины и компоненты магнитного поля — к сетке ω:

$$\rho_0(\alpha,\ \beta)_{ijk},\ P_{ijk},\ \rho_{ijk},\ \varepsilon_{ijk},\ (H_x)_{ijk},\ (H_y)_{ijk}\in\mathscr{H}_\omega,\qquad i,\ j,\ k\in\omega.$$

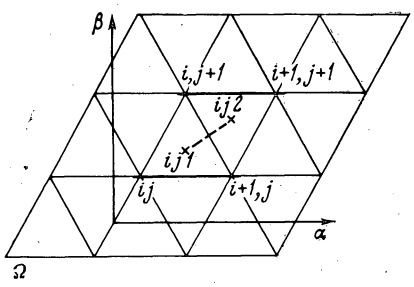
В дальнейшем индексы ij и ijk будем опускать, используя обозначения $f_{ij}\equiv f_{\overline{\omega}}\equiv f,\ f_{ij}\in\mathscr{H}_{\overline{\omega}},\ \ i,\ j\in\overline{\omega};\ g_{ijk}\equiv g_\omega\equiv g,\ g_{ijk}\in\mathscr{H}_\omega,\ \ i,\ j,\ k\in\omega$.

Для удобства введем локальную индексацию (фиг. 2): $Ш_0(ij)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ — множество центров ячеек, прилегающих к узлу ij (см. фиг. 2, *а*); $Ш_1(ij)=\{1,\ 2,\ 3\}$ — набор вершин ячейки ijk (см. фиг. 2, *б* — для ячейки $ij1$ и фиг. 2, *в* — для ячейки $ij2$).

§ 6. Вариационный принцип для дискретных моделей сплошной среды

Аппроксимируем функционал (1) и условия (3)—(5) разностными по пространству выражениями

$$S_h=\int_{t_0}^{t_1}L_h(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\sum_\omega\langle\rho\rangle\langle J\rangle\Bigg(\frac{\langle u^2\rangle+\langle v^2\rangle}{2}-\langle\varepsilon\rangle-\frac{\langle H_x\rangle^2+\langle H_y\rangle^2}{8\pi\langle\rho\rangle}\Bigg)\frac{h_\alpha h_\beta}{2}\Bigg]dt, \tag{11}$$



Фиг. 1

$$\langle H_x\rangle=\frac{1}{\langle J\rangle}\left\langle\frac{\partial(x,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\right\rangle, \tag{12}$$

$$\langle H_y\rangle=\frac{1}{\langle J\rangle}\left\langle\frac{\partial(y,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\right\rangle,$$

$$\langle\rho\rangle\langle J\rangle=\langle\rho_0(\alpha,\ \beta)\rangle, \tag{13}$$

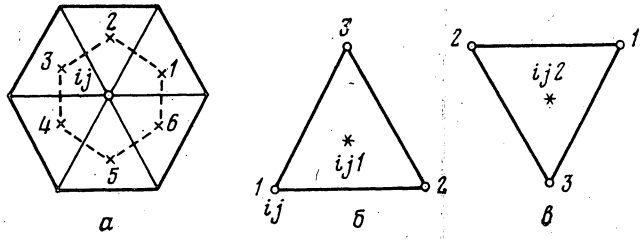
$$d\langle\varepsilon\rangle=-\frac{\langle P\rangle}{\langle\rho\rangle\langle J\rangle}d\langle J\rangle. \tag{14}$$

Здесь $\langle\cdot\rangle\equiv\langle\cdot\rangle_{ijk}$, $i, j, k\in\omega$,— некоторые линейные функционалы от соответствующих сеточных функций

$$\langle f\rangle=\sum_{l\in Ш(ij)} a_l f_l,$$

где $Ш(ij)$ — шаблон аппроксимации, a_l — некоторые коэффициенты ($Ш(ij)\subset\overline{\omega}$, если $f\in\mathscr{H}_{\overline{\omega}}$, и $Ш(ij)\subset\omega$, если $f\in\mathscr{H}_{\omega}$).

Будем считать, что выполнены следующие естественные условия со-



Фиг. 2

гласованности аппроксимаций [15]:

$$\frac{1}{l}\left\langle\frac{\partial(x^l, y)}{\partial(\alpha, \beta)}\right\rangle_{\omega}=\frac{1}{l}\left(\left\langle\frac{\partial x^l}{\partial\alpha}\right\rangle_{\omega}\left\langle\frac{\partial y}{\partial\beta}\right\rangle_{\omega}-\left\langle\frac{\partial x^l}{\partial\beta}\right\rangle_{\omega}\left\langle\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right\rangle_{\omega}\right),$$

$$\left\langle\frac{\partial(P, y)}{\partial(\alpha, \beta)}\right\rangle_{\overline{\omega}}=\left\langle\frac{\partial}{\partial\alpha}\langle P\rangle_{\omega}\left\langle\frac{\partial y}{\partial\beta}\right\rangle_{\omega}\right\rangle_{\overline{\omega}}-\left\langle\frac{\partial}{\partial\beta}\langle P\rangle_{\omega}\left\langle\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right\rangle_{\omega}\right\rangle_{\overline{\omega}}$$

и т. п.

Выражения (11)—(14) совместно с уравнением состояния $\langle P\rangle=P(\langle\rho\rangle, \langle\varepsilon\rangle)$ и кинематическими соотношениями $dx/dt=u$, $dy/dt=v$ полностью определяют свойства дискретной МГД-среды.

Из условия равенства нулю первой вариации функционала S_h следуют динамические дифференциально-разностные уравнения МГД в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_h}{\partial u}-\frac{\partial L_h}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_h}{\partial v}-\frac{\partial L_h}{\partial y}=0. \tag{15}$$

§ 7. Дифференциально-разностные уравнения МГД

Выбирая в качестве шаблона аппроксимации $Ш_1(ij)$ на $\overline{\omega}$ совокупность вершин ячейки ijk (см. фиг. 2), а в качестве шаблона на ω — одну точку, центр ячейки ijk, определим вид функционалов на множестве $\mathscr{H}_{\overline{\omega}}$ выражениями

$$\begin{aligned}
&\langle J\rangle=\frac{V}{h_\alpha h_\beta/2}+o(h_\alpha, h_\beta),\\
&\langle H_y\rangle=\frac{S(y, \psi)}{V}+o(h_\alpha, h_\beta),\quad \langle H_x\rangle=\frac{S(x, \psi)}{V}+o(h_\alpha, h_\beta),\\
&\langle u^2\rangle=\frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}{3}+o(h_\alpha^2, h_\beta^2),\\
&\langle v^2\rangle=\frac{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{3}+o(h_\alpha^2, h_\beta^2)
\end{aligned} \tag{16}$$

и на множестве $\mathscr{H}_\omega$ — формулами

(17) $$\langle\rho_0(\alpha,\beta)\rangle=\rho_0(\alpha,\beta),\quad \langle\rho\rangle=\rho,\quad \langle\varepsilon\rangle=\varepsilon,\quad \langle P\rangle=P.$$

Здесь объем и площадь поперечного сечения ячейки в эйлеровых координатах таковы:

(18) $$V(x,y)\equiv V=[x_1^l(y_2-y_3)+x_2^l(y_3-y_1)+x_3^l(y_1-y_2)]/2l,$$
$$S(x,y)=[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]/2.$$

Выражения (11)—(14) с учетом (16), (17) преобразуются к виду

(19) $$S_h=\int_{t_0}^{t_1}L_h(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\bar\omega}M\frac{u^2+v^2}{2}-\sum_{\omega}\left(m\varepsilon+V\frac{H^2}{8\pi}\right)\right\}dt,$$

(20) $$H_x=S(x,\psi)/V,\qquad H_y=S(y,\psi)/V,$$

(21) $$\rho V=m\equiv\rho_0(\alpha,\beta)\frac{h_\alpha h_\beta}{2},$$

(22) $$d\varepsilon=-\frac{P}{m}dV,$$

где

$$M=\frac{1}{3}\sum_{k\in Ш_0(ij)}m_k,\qquad ij\in\bar\omega$$

(см. фиг. 2, *а*), является следствием (16).

Подставляя $L_h(t)$ из (19) в (15), с учетом (20)—(22) получаем динамические дифференциально-разностные уравнения МГД на треугольных сетках.

Приведем полную систему дифференциально-разностных уравнений МГД:

(23) $$M\frac{du}{dt}-\sum_{k\in Ш_0(ij)}(P_H)_k\frac{\partial V_k}{\partial x}+\frac{1}{4\pi}\sum_{k\in Ш_0(ij)}(H_x)_k\frac{\partial S_k(x,\psi)}{\partial x}=0,$$
$$M\frac{dv}{dt}-\sum_{k\in Ш_0(ij)}(P_H)_k\frac{\partial V_k}{\partial y}+\frac{1}{4\pi}\sum_{k\in Ш_0(ij)}(H_y)_k\frac{\partial S_k(y,\psi)}{\partial y}=0,$$
$$m\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\sum_{k\in Ш_1(ij)}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}u_k+\frac{\partial V}{\partial y_k}v_k\right),$$
$$H_x=\frac{S(x,\psi)}{V},\quad H_y=\frac{S(y,\psi)}{V},$$
$$\rho V=m,\qquad P=P(\rho,\varepsilon),\qquad \frac{dx}{dt}=u,$$
$$\frac{dy}{dt}=v,\qquad P_H=P+\frac{H^2}{8\pi}.$$

Заметим, что уравнение энергии в системе (23), аппроксимирующее дифференциальное уравнение (7), можно трактовать как закон сохранения энтропии дискретной среды.

§ 8. Разностные аналоги дифференциальных операторов

Динамические уравнения (6) и уравнение энергии (7) в эйлеровых координатах имеют вид

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\operatorname{grad}P+\frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}],$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{24}$$

Преобразуем динамическое уравнение к дивергентному виду. Используя равенство $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, получаем

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\operatorname{grad}P_H+\frac{1}{4\pi}\mathbf{d}, \tag{25}$$

где $\mathbf{d}=(\operatorname{div}H_x\mathbf{H},\ \operatorname{div}H_y\mathbf{H})$.

Дифференциально-разностные уравнения системы (23) можно записать в виде, тождественном (24), (25) с точностью до замены дифференциальных операторов разностными.

Действительно, определим операторы разностных производных:

$$\left\langle\frac{\partial f_\omega}{\partial x}\right\rangle_{\bar\omega}=-\frac{1}{V_{\bar\omega}}\sum_{k\in Ш_0(ij)}f_k\frac{\partial V_k}{\partial x_{\bar\omega}},\qquad \mathscr{H}_\omega\to\mathscr{H}_{\bar\omega}, \tag{26}$$

$$\frac{1}{\langle x^{l-1}\rangle_\omega}\left\langle\frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}g_{\bar\omega}}{\partial x}\right\rangle_\omega=\frac{1}{V_\omega}\sum_{k\in Ш_1(ij)}g_k\frac{\partial V_\omega}{\partial x_k},\qquad \mathscr{H}_{\bar\omega}\to\mathscr{H}_\omega, \tag{27}$$

а также

$$\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial f_\omega}{\partial x}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\bar\omega}=-\frac{1}{S_{\bar\omega}}\sum_{k\in Ш_0(ij)}f_k\frac{\partial S_k}{\partial x_{\bar\omega}},\qquad \mathscr{H}_\omega\to\mathscr{H}_{\bar\omega}, \tag{28}$$

$$\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial g_{\bar\omega}}{\partial x}\right\rangle\!\!\right\rangle_\omega=\frac{1}{S_\omega}\sum_{k\in Ш_1(ij)}g_k\frac{\partial S_\omega}{\partial x_k},\qquad \mathscr{H}_{\bar\omega}\to\mathscr{H}_\omega, \tag{29}$$

где

$$V_{\bar\omega}=\frac{1}{3}\sum_{k\in Ш_0(ij)}V_k,\qquad S_{\bar\omega}=\frac{1}{3}\sum_{k\in Ш_0(ij)}S_k.$$

Разложением в ряд Тейлора можно показать [15], что операторы (26), (28) аппроксимируют соответствующие производные со вторым порядком точности по h_α, h_β (на шеститочечном шаблоне), операторы (27), (29) — с первым порядком точности (на трехточечном шаблоне).

С помощью операторов разностных производных первого порядка (26)—(29) можно построить разностные аналоги операторов grad, div, rot (см. [7], [15]), а также операторы разностных производных более высокого порядка (например, оператора Лапласа [15]).

Определим следующие операторы:

$$\operatorname{GRAD}_{\bar\omega}f_\omega=\left(\left\langle\frac{\partial f_\omega}{\partial x}\right\rangle_{\bar\omega},\left\langle\frac{\partial f_\omega}{\partial y}\right\rangle_{\bar\omega}\right),\qquad \mathscr{H}_\omega\to\mathscr{H}_{\bar\omega}, \tag{30}$$

$$\operatorname{DIV}_\omega g_{\bar\omega}=\frac{1}{\langle x^{l-1}\rangle_\omega}\left\langle\frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}g_{x\bar\omega}}{\partial x}\right\rangle_{\bar\omega}+$$

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\langle x^{l-1}\rangle_\omega}\left\langle \frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega} g_{y\bar\omega}}{\partial y}\right\rangle_\omega, \qquad \mathscr{H}_{\bar\omega}\to\mathscr{H}_\omega;\\
&\mathrm{GRAD}_\omega f_{\bar\omega}=\left(\left\langle\!\left\langle \frac{\partial f_{\bar\omega}}{\partial x}\right\rangle\!\right\rangle_\omega, \left\langle\!\left\langle \frac{\partial f_{\bar\omega}}{\partial y}\right\rangle\!\right\rangle_\omega\right), \qquad \mathscr{H}_{\bar\omega}\to\mathscr{H}_\omega,\\
&\mathrm{DIV}_{\bar\omega}\mathbf{g}_\omega=\frac{1}{\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}}\left\langle\!\left\langle \frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_\omega g_{x\omega}}{\partial x}\right\rangle\!\right\rangle_{\bar\omega}+\\
&+\frac{1}{\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}}\left\langle\!\left\langle \frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_\omega g_{y\omega}}{\partial y}\right\rangle\!\right\rangle_{\bar\omega}, \qquad \mathscr{H}_\omega\to\mathscr{H}_{\bar\omega}.
\end{aligned}
$$

Операторы DIV_ω и $-\mathrm{GRAD}_{\bar\omega}$ в (30) оказываются сопряженными, т. е. $(f_\omega, \mathrm{DIV}_\omega \mathbf{g}_{\bar\omega})=(-\mathrm{GRAD}_{\bar\omega} f_\omega, \mathbf{g}_{\bar\omega})$, где скалярное произведение в пространствах $\mathscr{H}_\omega$ и $\mathscr{H}_{\bar\omega}$ определяется формулами

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
&(f_\omega, g_\omega)=\sum_{k\in Ш_0(ij)} V_k f_k g_k, \qquad f, g\in\mathscr{H}_\omega,\\
&(\mathbf{f}_{\bar\omega}, \mathbf{g}_{\bar\omega})=\sum_{k\in Ш_1(ij)} \bar V_k (f_{xk}g_{xk}+f_{yk}g_{yk}), \qquad \mathbf{f}, \mathbf{g}\in\mathscr{H}_{\bar\omega}, \quad \bar V\equiv V_{\bar\omega}.
\end{aligned}
$$

Сопряжены также операторы $\mathrm{DIV}_{\bar\omega}$ и $-\mathrm{GRAD}_\omega$ из (31), если в (32) положить $V_\omega=\langle x^{l-1}\rangle_\omega S_\omega$, $V_{\bar\omega}=\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega} S_{\bar\omega}$. Будем считать эти формулы определением $\langle x^{l-1}\rangle_\omega$ и $\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}$ соответственно.

С помощью (30), (31) соответствующие уравнения системы (23) приводятся к виду, совпадающему с (24), (25):

$$
\rho_{\bar\omega}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mathrm{GRAD}_{\bar\omega}P_H+\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}_{\bar\omega}, \qquad \rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\,\mathrm{DIV}_\omega\mathbf{v},
$$

где

$$
\rho_{\bar\omega}=\frac{1}{3}\frac{1}{V_{\bar\omega}}\sum_{k\in Ш_0(ij)}\rho_k V_k, \qquad \mathbf{D}_{\bar\omega}=(\mathrm{DIV}_{\bar\omega}H_x\mathbf{H}, \mathrm{DIV}_{\bar\omega}H_y\mathbf{H}).
$$

Заметим, что $\mathrm{DIV}_{\bar\omega}\mathbf{H}=0$.

Используя введенные здесь разностные операторы, нетрудно получить разностные аппроксимации на треугольных сетках любых дифференциальных уравнений, в том числе уравнений диффузии магнитного поля и теплопроводности.

§ 9. Дифференциально-разностные уравнения акустики

Получим уравнения, описывающие акустические колебания дискретной среды.

Разлагая (19)—(22) в ряд Тейлора относительно какого-либо фонового течения до членов второго порядка малости, находим

$$
(33)\quad
\begin{aligned}
\Delta_2 L_h=&\sum_{\bar\omega} M\frac{1}{2}[(\Delta u)^2+(\Delta v)^2]-\\
&-\frac{1}{2}\sum_\omega\frac{c_A{}^2\rho}{V}\left[\sum_{l\in Ш_1(ij)}\frac{\partial V}{\partial x_l}\Delta x_l+\frac{\partial V}{\partial y_l}\Delta y_l\right]^2+\\
&+\frac{1}{2}\sum_\omega P_H\sum_{k,\,l\in Ш_1(ij)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_l}\Delta x_k\Delta x_l+\frac{\partial^2 V}{\partial y_l\,\partial x_k}\Delta y_l\Delta x_k\right)-
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{\omega}\frac{1}{8\pi V}\left\{\left[\sum_{l\in Ш_1(ij)}\frac{\partial S(x,\psi)}{\partial x_l}\Delta x_l - H_x\sum_{l\in Ш_1(ij)}\left(\frac{\partial V}{\partial x_l}\Delta x_l+\frac{\partial V}{\partial y_l}\Delta y_l\right)\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\sum_{l\in Ш_1(ij)}\frac{\partial S(y,\psi)}{\partial y_l}\Delta y_l - H_y\sum_{l\in Ш_1(ij)}\left(\frac{\partial V}{\partial x_l}\Delta x_l+\frac{\partial V}{\partial y_l}\Delta y_l\right)\right]^2\right\}.$$

Если $\Delta u=0$, $\Delta v=0$, то квадратичная форма (33) характеризует устойчивость фонового течения: течение устойчиво, если форма отрицательно определена.

Из условия равенства нулю первой вариации функционала

$$\Delta_2 S_h=\int_{t_0}^{t_1}\Delta_2 L_h\,dt$$

следуют динамические уравнения МГД-акустики.

В терминах разностных операторов они имеют вид

$$\rho_{\bar\omega}\frac{d\Delta u}{dt}=-(l-1)\frac{\Delta x}{\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}}\mathrm{GRAD}_{x\bar\omega}P_H-\mathrm{GRAD}_{x\bar\omega}\Delta P_H+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\mathrm{DIV}_{\bar\omega}(\Delta H_x\mathbf{H})-$$
$$-\left(\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial}{\partial x}P_H\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial\Delta y}{\partial y}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\omega}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\bar\omega}-\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial}{\partial y}P_H\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial\Delta y}{\partial x}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\omega}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\bar\omega}\right),$$

(34)

$$\rho_{\bar\omega}\frac{d\Delta v}{dt}=-\mathrm{GRAD}_{y\bar\omega}\Delta P_H+\frac{1}{4\pi}\mathrm{DIV}_{\bar\omega}(\Delta H_y\mathbf{H})-$$
$$-\left(\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial}{\partial x}P_H\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}\Delta x}{\partial y}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\omega}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\bar\omega}-\right.$$
$$\left.-\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial}{\partial y}P_H\left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial\langle x^{l-1}\rangle_{\bar\omega}\Delta x}{\partial x}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\omega}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\bar\omega}\right),$$

где $\Delta P_H=-c_A{}^2\rho\mathrm{DIV}_{\omega}\Delta\mathbf{r}+(H_x\Delta H_x+H_y\Delta H_y)/4\pi$,

$$\Delta H_x=S(\Delta x,\psi)/V-H_x\mathrm{DIV}_{\omega}\Delta\mathbf{r},$$
$$\Delta H_y=S(\Delta y,\psi)/V-H_y\mathrm{DIV}_{\omega}\Delta\mathbf{r},\quad \Delta\mathbf{r}=(\Delta x,\Delta y).$$

Сравнение (34) и (10) показывает, что дифференциально-разностные уравнения акустики (34) аппроксимируют дифференциальные уравнения акустики (10) с первым порядком точности по шагам пространственных переменных.

Из (33) и (34) следует, что разностный оператор A_h, стоящий в правой части (34), на течениях, удовлетворяющих граничным условиям (8), и при $P_H=\mathrm{const}$ самосопряжен. На устойчивых фоновых течениях A_h положительно определен.

В базисе из собственных функций оператора A_h уравнения акустики приобретают вид

$$d^2a_i/dt^2+\lambda_i a_i=0,\quad i=1,2,\ldots,N',\tag{35}$$

где λ_i — собственные значения оператора, N' — размерность сеточного пространства, на котором он определен, $a_i(t)$ — коэффициенты разложения $\Delta\mathbf{r}$ по собственным функциям оператора A_h.

§ 10. Искусственная вязкость

Система дифференциально-разностных уравнений МГД (23) вследствие того, что она сохраняет энтропию дискретной среды, непригодна для расчетов течений с ударными волнами. Чтобы избежать этого ограничения, в (23) необходимо ввести какие-либо диссипативные процессы [1].

Следуя [8], введем линейную искусственную вязкость в (23) таким образом, чтобы на равновесном фоне введенная вязкость не приводила к перераспределению энергии стоячих акустических волн, т. е. внесем в дискретную среду вязкость таким образом, чтобы каждая мода $a_i(t)$ в (35) затухала независимо:

$$\frac{d^2a_i}{dt^2}+\varkappa_i\lambda_i\frac{da_i}{dt}+\lambda_i a_i=0, \qquad i=1,2,\ldots,N', \tag{36}$$

где $\varkappa_i$ — некоторые коэффициенты.

Обратный переход от (36) к (34) позволяет получить вид искусственной вязкости.

Приведем полную систему дифференциально-разностных уравнений с учетом искусственной вязкости:

$$\begin{gathered}
\rho_{\bar\omega}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mathrm{GRAD}_{\bar\omega}P_H^{*}+\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}_{\bar\omega}^{*},\\
\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-\left(P_H^{*}-\frac{1}{8\pi}H^2\right)\mathrm{DIV}_\omega\mathbf{v}+q,\\
\frac{d\rho}{dt}=-\rho\,\mathrm{DIV}_\omega\mathbf{v},\qquad \mathbf{H}=S(\mathbf{r},\psi)/V,\qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},\qquad P=P(\rho,\varepsilon),
\end{gathered} \tag{37}$$

где

$$P_H^{*}=P_H-\varkappa\frac{c_A^2\rho}{V}\mathrm{DIV}_\omega\mathbf{v}+\frac{\varkappa}{4\pi}\left(H_x\frac{dH_x}{dt}+H_y\frac{dH_y}{dt}\right),$$

$$\mathbf{D}_{\bar\omega}^{*}=(\mathrm{DIV}_{\bar\omega}^{*}H_x^{*}\mathbf{H},\ \mathrm{DIV}_{\bar\omega}^{*}H_y^{*}\mathbf{H}),$$

$$q=\frac{\varkappa}{4\pi V}\left[H_x\frac{dH_x}{dt}S(u,y)+H_y\frac{dH_y}{dt}S(x,v)+(H_x^2+H_y^2)S(u,v)\right],$$

$$\mathrm{DIV}_{\bar\omega}^{*}H_x^{*}\mathbf{H}=-\frac{1}{V_{\bar\omega}}\sum_{k\in Ш_0(ij)}\langle x^{l-1}\rangle_k\left\{H_{xk}^{*}\left[H_{xk}\frac{\partial S_k}{\partial x}+H_{yk}\frac{\partial S_k}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\varkappa_k H_{xk}\left[H_{xk}\frac{\partial S_k(x,v)}{\partial x}+H_{yk}\frac{\partial S_k(u,y)}{\partial y}\right]\right\},$$

$$\mathrm{DIV}_{\bar\omega}^{*}H_y^{*}\mathbf{H}=-\frac{1}{V_{\bar\omega}}\sum_{k\in Ш_0(ij)}\langle x^{l-1}\rangle_k\left\{H_{yk}^{*}\left[H_{xk}\frac{\partial S_k}{\partial x}+H_{yk}\frac{\partial S_k}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\varkappa_k H_{yk}\left[H_{xk}\frac{\partial S_k(x,v)}{\partial x}+H_{yk}\frac{\partial S_k(u,y)}{\partial y}\right]\right\},$$

$$\mathbf{H}^{*}=\mathbf{H}+\varkappa\frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

Коэффициент при искусственной вязкости $\varkappa_{ij}$ будем выбирать исходя из условия наибыстрейшего затухания самой высокой гармоники акустического оператора, соответствующего некоторой парциальной механиче-

ской системе, включающей ячейку ij (см. [8]). Если, как и в [13], в качестве парциальной системы выбран треугольник, найдем $\varkappa_\omega$ из условия $\varkappa \leqslant 2\lambda_{\max}^{-1/2}$, где $\lambda_{\max}$ — квадрат максимальной собственной частоты системы, полученной варьированием функционала $\Delta_2 S_h$, записанного для одной треугольной ячейки. Величина $\lambda_{\max}$ достаточно точно оценивается по теореме Гершгорина [16].

§ 11. Полная консервативность

Система дифференциально-разностных уравнений МГД на треугольных сетках (37) обладает свойством полной консервативности, а именно:

1) для любой подобласти Ω_1 области Ω такой, что $\Gamma \cap \Gamma_1 = \varnothing$, где Γ, Γ_1 — границы областей Ω и Ω_1 соответственно, выполняются следующие соотношения:

а) закон сохранения полной энергии

$$\sum_{\bar\omega_1} M \frac{d}{dt}\frac{u^2+v^2}{2} + \sum_{\omega_1} m \frac{d\varepsilon}{dt} + \sum_{\omega_1} \frac{d}{dt}\left(V\frac{H^2}{8\pi}\right) =$$
$$= \sum_{\Gamma_1} \sum_{k \in Ш_0'(ij)} (P_H^*)_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} u + \frac{\partial V_k}{\partial y} v\right) -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \sum_{\Gamma_1} \sum_{k \in Ш_0'(ij)} \left[H_{xk}^* u \frac{\partial S_k(x,\psi)}{\partial x} + H_{yk}^* v \frac{\partial S_k(y,\psi)}{\partial y}\right] -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \sum_{\Gamma_1} \sum_{k \in Ш_0'(ij)} \varkappa_k (H_{xk} u + H_{yk} v)\left[H_{xk}\frac{\partial S_k(x,\psi)}{\partial x} + H_{yk}\frac{\partial S_k(y,\psi)}{\partial y}\right],$$

где $\bar\omega_1$ — множество узлов сетки $\bar\omega$, содержащихся в области Ω_1, ω_1 — множество ячеек ω, содержащихся в Ω_1, в $Ш_0'(ij)$ входят внешние по отношению к Ω_1 ячейки шаблона $Ш_0(ij)$, $i, j \in \Gamma_1$;

б) закон сохранения импульса

$$\sum_{\bar\omega_1} M \frac{du}{dt} = \sum_{\Gamma_1} \sum_{k \in Ш_0'(ij)} \left\{P_{Hk}^* \frac{\partial V_k}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4\pi}\left[H_{xk}^* \frac{\partial S_k(x,\psi)}{\partial x} + \varkappa_k H_{xk}\left(H_{xk}\frac{\partial S_k(x,v)}{\partial x} + H_{yk}\frac{\partial S_k(u,y)}{\partial y}\right)\right]\right\} +$$
$$+ (l-1)\sum_{\omega_1} P_H^* S, \tag{38}$$

$$\sum_{\bar\omega_1} M \frac{dv}{dt} = \sum_{\Gamma_1} \sum_{k \in Ш_0'(ij)} \left\{P_{Hk}^* \frac{\partial V_k}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\left[H_{yk}^* \frac{\partial S_k(x,\psi)}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \varkappa_k H_{yk}\left(H_{xk}\frac{\partial S_k(x,v)}{\partial x} + H_{yk}\frac{\partial S_k(u,y)}{\partial y}\right)\right]\right\},$$

где второй член в правой части (38) учитывает вклад сил давления на торцы ячейки (ячейка в осесимметричном случае, $l=2$, представляет собой часть тора с треугольным сечением в угле 1 рад) в импульс по направлению r (фиг. 3);

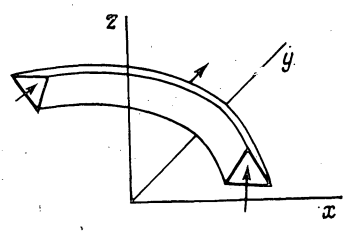
в) закон сохранения момента импульса

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad & \sum_{\overline{\omega}_1} \frac{d}{dt} M(uy - vx) = \sum_{\Gamma_1} \Big(y \sum_{k \in \overline{Ш}_0'(ij)} P^*_{Hk} \frac{\partial V_k}{\partial x} - \\
& - x \sum_{k \in \overline{Ш}_0'(ij)} P^*_{Hk} \frac{\partial V_k}{\partial y} \Big) + \sum_{\omega_1} P_H{}^* \langle y \rangle - \\
& - \frac{1}{4\pi} \sum_{\Gamma_1} \Big(y \sum_{k \in \overline{Ш}_0'(ij)} H^*_{xk} \frac{\partial S_k(x, \psi)}{\partial x} - x \sum_{k \in \overline{Ш}_0'(ij)} H^*_{yk} \frac{\partial S_k(y, \psi)}{\partial y} \Big) - \\
& - \frac{1}{4\pi} \sum_{\Gamma_1} \sum_{k \in \overline{Ш}_0'(ij)} \varkappa_k (H_{xk} y - H_{yk} x) \times \\
& \times \Big[H_{xk} \frac{\partial S_k(x, v)}{\partial x} + H_{yk} \frac{\partial S_k(u, y)}{\partial y} \Big],
\end{aligned}
$$

где

$$
\langle y \rangle = \sum_{k \in Ш_1(ij)} y_k \frac{\partial \langle x^{l-1} \rangle}{\partial x_k}
$$

и второй член в правой части (39) учитывает момент сил, действующих на торцы ячейки при $l=2$;



Фиг. 3

2) уравнение энергии записано в энтропийной форме [1];

3) для ячеек ω справедлив закон сохранения массы $\rho V = m$, выполнен закон сохранения магнитного потока $\mathbb{H} = S(\mathbf{r}, \psi)/V$, $\psi(\alpha, \beta) = \mathrm{const}$.

§ 12. Дискретизация по времени

Заменим область изменения переменной t: $0 \leqslant t \leqslant T$ дискретным набором точек: $\omega_\tau = \{t_0, \ldots, t_n, \ldots, t_N;\ t_0 = 0,\ t_N = T;\ \ \tau_n = t_{n+1} - t_n\}$.

Аппроксимируя производные по времени в (37) конечными разностями, получаем замкнутую многопараметрическую систему разностных уравнений на треугольных сетках:

$$
\begin{aligned}
& \rho_{\overline{\omega}}{}' \frac{\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}}{\tau} = -\mathrm{GRAD}_{\overline{\omega}}{}^{\sigma_2} (P_H{}^*)^{\sigma_1} - \frac{1}{4\pi} \mathbb{D}_{\overline{\omega}}{}^* (\sigma_3), \\
& \rho \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} = -[(P_H{}^*)^{\sigma_1} - \frac{1}{8\pi} (H_x \hat{H}_x + H_y \hat{H}_y)] \mathrm{DIV}_\omega{}^{\sigma_4} \mathbf{v}^{\sigma_5} + q(\sigma_3, \sigma_6), \\
(40)\qquad & \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} = -\rho \mathrm{DIV}_\omega{}^{\sigma_4} \mathbf{v}^{\sigma_5}, \qquad \mathbb{H}^{\sigma_7} = S(\mathbf{r}^{\sigma_7}, \psi)/V^{\sigma_7}, \\
& \frac{\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}}{\tau} = \mathbf{v}^{\sigma_8}, \qquad P^{\sigma_9} = P(\rho^{\sigma_9}, \varepsilon^{\sigma_9}),
\end{aligned}
$$

где $\sigma_k \in [0, 1]$, $k=1, \ldots, 9$, $\sigma_3=(\sigma_3^1, \sigma_3^2, \sigma_3^3, \sigma_3^4)$, $f^\sigma=\sigma\hat{f}+(1-\sigma)f$, $f\equiv f^n$, $\hat{f}\equiv f^{n+1}$, $\tau\equiv\tau_n$ и

$$\mathrm{GRAD}_{\bar\omega}^{\sigma_1} f_\omega^{\sigma_2} = \left(-\frac{1}{V_{\bar\omega}} \sum_{k\in Ш_0(ij)} \frac{\partial V_k^{\sigma_1}}{\partial x} f_k^{\sigma_2}, -\frac{1}{V_{\bar\omega}} \sum_{k\in Ш_0(ij)} \frac{\partial V_k^{\sigma_1}}{\partial y} f_k^{\sigma_2} \right),$$

$$\mathrm{DIV}_\omega^{\sigma_1} \mathbf{v}^{\sigma_2} = \frac{1}{V_\omega} \sum_{k\in Ш_1(ij)} \left(\frac{\partial V^{\sigma_1}}{\partial x_k} u_k^{\sigma_2} + \frac{\partial V^{\sigma_1}}{\partial y_k} v_k^{\sigma_2} \right),$$

$$\mathbb{D}_\omega^*(\sigma_3) = (\mathrm{DIV}_\omega^* H_x^* \mathbf{H}(\sigma_3), \quad \mathrm{DIV}_\omega^* H_y^* \mathbf{H}(\sigma_3)),$$

$$q(\sigma_3, \sigma_6) = \frac{\varkappa^{\sigma_3^2}}{4\pi V} \left[H_x^{\sigma_3^3} \frac{dH_x^{\sigma_3^2}}{dt} S(u^{\sigma_6}, y^{\sigma_3^3}) + H_y^{\sigma_3^3} \frac{dH_y^{\sigma_3^2}}{dt} S(x^{\sigma_3^4}, v^{\sigma_6}) + \right.$$

$$\left. + (H_x^{\sigma_3^2} H_x^{\sigma_3^4} + H_y^{\sigma_3^2} H_y^{\sigma_3^3}) S(u^{\sigma_3^4}, v^{\sigma_3^4}) \right],$$

$$\mathrm{DIV}_\omega^* H_x^* \mathbf{H}(\sigma_3) = -\frac{1}{V_{\bar\omega}} \sum_{k\in Ш_0(ij)} \langle x^{l-1} \rangle_k^{\sigma_3^1} \times$$

$$\times \left\{ (H_x^*)_k^{\sigma_3^2} \left[H_{xk}^{\sigma_3^3} \frac{\partial S_k^{\sigma_3^4}}{\partial x} + H_{yk}^{\sigma_3^3} \frac{\partial S_k^{\sigma_3^4}}{\partial y} \right] + \right.$$

$$\left. + \varkappa_k^{\sigma_3^2} H_{xk}^{\sigma_3^2} \left[H_{xk}^{\sigma_3^3} \frac{\partial S_k(x, v)^{\sigma_3^4}}{\partial x} + H_{yk}^{\sigma_3^3} \frac{\partial S_k(u, y)^{\sigma_3^4}}{\partial y} \right] \right\}.$$

Аналогичным выражением определяется $\mathrm{DIV}_\omega^* H_y^* \mathbf{H}(\sigma_3)$.

Здесь предполагается, что для $(H_x^*)^\sigma$ и $(H_y^*)^\sigma$ справедливы соотношения

$$(H_x^*)^\sigma = H_x^\sigma + \varkappa^\sigma \frac{dH_x^\sigma}{dt} = H_x^\sigma + \varkappa^\sigma \left[\frac{S(u^\sigma, \psi)}{V^\sigma} - \frac{H_x^\sigma}{V^\sigma} \frac{\hat{V}-V}{\tau} \right],$$

а также

$$\frac{\partial V^\sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} V^\sigma, \qquad \frac{\partial V^\sigma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y^\sigma} V^\sigma,$$

$$\langle x^{l-1} \rangle^\sigma = V^\sigma / S^\sigma, \qquad V^\sigma = V(x^\sigma, y^\sigma), \qquad S^\sigma = S(x^\sigma, y^\sigma).$$

При $\sigma_k=0.5$, $k=2, \ldots, 9$ (σ_1 — произвольно), система разностных уравнений (40) обладает свойством полной консервативности.

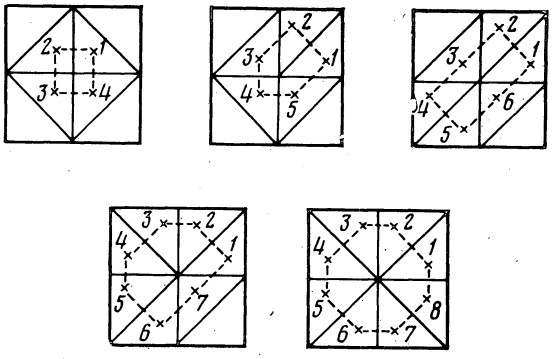
Заметим, что запись системы разностных уравнений в консервативной форме (при $\sigma_k=0.5$) с согласованной вязкостью стала возможной благодаря записи системы дифференциально-разностных уравнений в операторной форме.

Система (40) аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (6), (7), (3), (4), вообще говоря, с первым порядком точности по времени, при $\sigma_k=0.5$ достигается второй порядок.

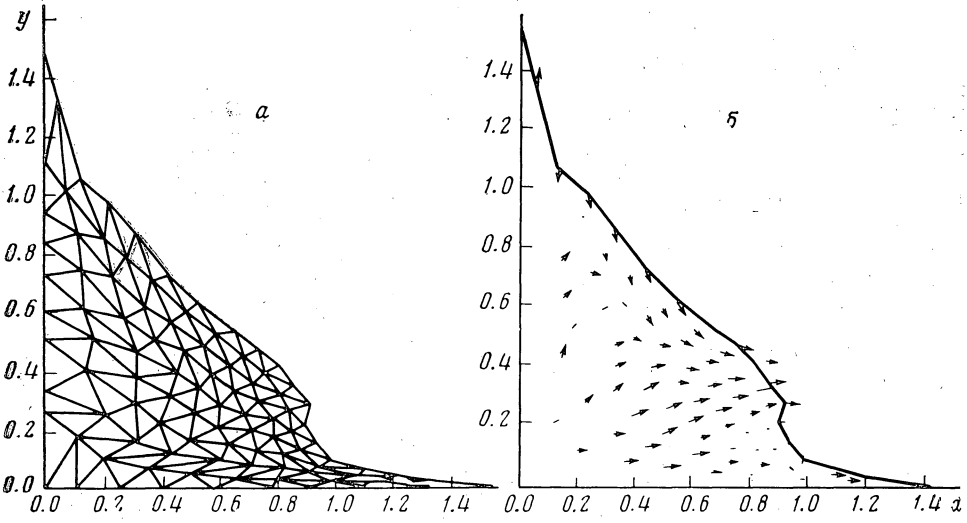
§ 13. Примеры численных расчетов

Явная схема для системы (40) при $\sigma_k=0$, $k=1, 2, 3, 4, 6, 7, 9$, $\sigma_5=0.5$, $\sigma_8=1$ была опробована на многочисленных тестовых расчетах.

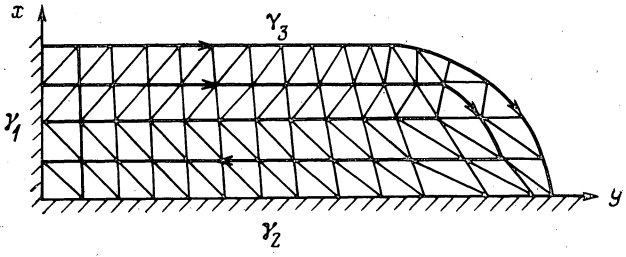
При реализации схемы оказалось удобным в качестве области в лагранжевых переменных использовать не только параллелограмм, но и об-



Фиг. 4



Фиг. 5. *а* – расчетная сетка, *б* – поле скоростей



Фиг. 6

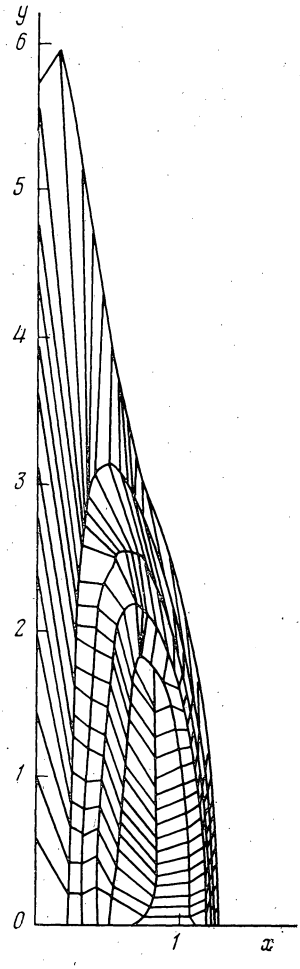
ласти другой формы, например правильный треугольник или прямоугольник. В последнем случае в области Ω вводится прямоугольная сетка узлов $\overline{\omega}$. Для введения сетки ячеек ω используется признак $I(i, j)=\{0, 1\}$, по которому четырехугольная ячейка ij разбивается той или другой диагональю на две треугольные. При этом вид шаблона $Ш_0(ij)$ не фиксируется, а может меняться от точки к точке. На фиг. 4 представлены некоторые из возможных шаблонов $Ш_0(ij)$ (от четырехточечного до восьмиточечного). Второй порядок аппроксимации по пространственным переменным сохраняется в этом случае лишь для шаблонов, имеющих две оси симметрии, на остальных шаблонах достигается первый порядок.

Рассмотрим два примера:

1. Задача о сжатии сфероида ($\mathbf{H}=0$): при $t=0$ газ $\rho=\rho_0=1$, $\varepsilon=\varepsilon_0=10^{-3}$, $P=\rho\varepsilon(\gamma-1)$, $\gamma=2$, занимает область, имеющую форму сплюснутого сфероида (в силу симметрии, рассматривается часть, расположенная в I квадранте). На границе сфероида задано внешнее давление

$$P=\begin{cases} t & \text{при} \quad t\leqslant t^*, \\ P^*=\text{const} & \text{при} \quad t>t^*, \end{cases}$$

где t^* — время прохождения ударной волной расстояния, равного малой полуоси сфероида. Результаты расчета (см. фиг. 5, $t=1.1473$) сравнивались с результатами работы [10], в которой эта задача рассчитывалась на четырехугольных сетках с переинтерполяцией на больших временах расчета. Сравнение показывает, что в расчете на треугольных сетках кумулятивный эффект выражен более явно; это, вероятно, объясняется отсутствием диффузии импульса, которая появляется при перестройках сетки.



Фиг. 7

2. Плоская область, занятая газом с вмороженным магнитным полем, имеет форму вытянутого по оси y сфероида. На фиг. 6 приведена одна четвертая часть этой области (разбитая разностной сеткой), занимающая правый верхний квадрант на плоскости (x, y). На границах γ_1, γ_2 заданы условия симметрии, на границе γ_3 — внешнее давление $P^*=\text{const}$. Стрелками обозначены силовые линии магнитного поля. Вдоль них плотность и удельная внутренняя энергия полагались неизменными, удовлетворяющими условию $P+H^2/8\pi=P^*$ при $y=0$. Уравнение состояния $P=\rho\varepsilon(\gamma-1)$, $\gamma=2$, в начальный момент газ покоится.

Поскольку начальное положение не равновесно, газ под действием натяжения силовых линий магнитного поля начинает сжиматься по оси y. На фиг. 7 приведены результаты численного моделирования этого процесса (число шагов по времени $\sim 39\,000$, линии разбиения на треугольники не указаны).

Литература

1. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
2. Численное исследование задач газовой динамики. Ред. *Белоцерковский О. М.* М.: Наука, 1974.

3. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. Ред. *Бабенко К. И.* Новосибирск: Наука, 1979.
4. *Шульц У. Д.* Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа.– В кн.: Вычисл. методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
5. *Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П.* Об использовании принципа наименьшего действия для построения дискретных математических моделей в магнитной гидродинамике.– Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 5, с. 1083–1088.
6. *Головизнин В. М. и др.* Вариационные схемы магнитной гидродинамики в произвольной системе координат.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 1, с. 54–68.
7. *Фаворский А. П.* Вариационные дискретные модели уравнений гидродинамики.– Дифференц. ур-ния, 1980, т. 16, № 7, с. 1308–1321.
8. *Головизнин В. М. и др.* О некоторых свойствах вариационно-разностных уравнений МГД и искусственных диссипативных процессах типа «псевдовязкости».– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1976, № 25.
9. *Головизнин В. М.* Об одном способе введения искусственных диссипативных процессов в вариационно-разностные схемы магнитной гидродинамики.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 50.
10. *Головизнин В. М., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П.* Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений гидродинамики в сферических координатах.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1977, № 16.
11. *Гольдин В. Я. и др.* Численный расчет уравнений двумерной газовой динамики с детонацией.– В кн.: Числ. методы механ. сплошной среды. Т. 4. № 3. Новосибирск: Наука, 1973, с. 69–70.
12. *Волчинская М. Н., Четверушкин Б. Н.* Методика решения двумерных нестационарных задач динамики излучающего газа.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1977, № 98.
13. *Головизнин В. М., Коршунов В. К.* О двумерных вариационно-разностных схемах газовой динамики на треугольных сетках.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 17.
14. *Головизнин В. М., Коршунов В. К.* О двумерных вариационно-разностных схемах МГД на треугольных сетках.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 99.
15. *Головизнин В. М., Коршунов В. К., Таран М. Д.* Об аппроксимации дифференциальных операторов на нерегулярных косоугольных расчетных сетках.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 157.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 27.X.1981