УДК 517.9

Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I

Галактионов В. А., Самарский А. А.

§ 1. Введение

1. В настоящей работе излагается один достаточно общий подход к исследованию асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений типа нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1.1}$$

Здесь t и x обозначают соответственно временную и пространственную координаты, $u=u(t, x)\geqslant 0$ — искомое решение (температура). Функция $k(u)$ (коэффициент теплопроводности) определена при всех $u\geqslant 0$, $k\in C^2((0, +\infty))\cap C([0, +\infty))$. Уравнение (1.1) описывает большое число различных физических процессов, в частности, диффузию тепла в сплошных средах с коэффициентом теплопроводности, нелинейным образом зависящим от температуры.

Для уравнения (1.1) рассматривается первая краевая задача в полупространстве $x\in \mathbf{R}_+^1=(0, +\infty)$ с начальным условием $u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0$, $x\in \mathbf{R}_+^1$, и заданным при $x=0$ граничным режимом $u(t, 0)=\psi(t)>0$, где монотонная функция ψ или неограниченно возрастает за бесконечное время ($t\to+\infty$) или изменяется в режиме с обострением, когда $\psi(t)\to+\infty$ при $t\to 1^-$. Подобные краевые условия с обострением возникают при описании различных существенно нестационарных физических процессов (см. [1]—[3] и приведенный там список литературы).

2. В первую очередь нас будут интересовать такие асимптотические свойства решения рассматриваемой задачи, как зависимость от времени глубины проникновения $x_{\text{эф}}(t)$ тепловой волны и ее пространственная структура на развитой стадии граничного режима (т. е. при $t\to+\infty$ или $t\to 1^-$ соответственно). Глубина проникновения (полуширина) тепловой волны в каждый момент времени определяется из равенства

$$u(t, x_{\text{эф}}(t)) = \frac{1}{2}\psi(t) \tag{1.2}$$

(если из-за немонотонности начальной функции u_0 это уравнение имеет несколько решений, то в качестве $x_{\text{эф}}$ берется наименьшее). Особо подчеркнем, что исследование проводится в случае произвольных граничных режимов $\psi(t)$ и для весьма широкого класса коэффициентов $k(u)$ в (1.1).

3. Эффективный метод исследования подобных задач состоит в построении подходящих автомодельных или каких-либо других инвариантных решений уравнения (1.1), удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям. Эти частные решения имеют простую пространственно-временную структуру, определяющую вид граничного усло-

вия $u(t, 0)=\psi(t)$, и дают всю необходимую информацию об асимптотическом развитии процесса. При этом важную роль играет тот факт, что автомодельные решения уравнения (1.1) чаще всего являются асимптотически устойчивыми по краевым данным. Выяснению условий существования, единственности, исследованию свойств и асимптотической устойчивости различных инвариантных решений уравнения (1.1) посвящено большое число работ[1] (см. например, [1], [3]—[27] и приведенную там библиографию).

4. Однако, как показывает групповая классификация уравнения (1.1), проведенная в [9] на основе групп Ли, общее число инвариантных решений этого уравнения сравнительно невелико (отметим, что более общие преобразования Ли — Бэклунда не дают существенного расширения класса инвариантных решений [58], [59]). Так, при произвольных функциях $k \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$ уравнение (1.1) допускает только два вида нетривиальных инвариантных решений[2]:

$$\text{I.}\quad u_A(t, x)=f_A\left(\frac{x}{(1+t)^{1/2}}\right) \quad (\psi(t)=1), \tag{1.3}$$

$$\text{II.}\quad u_A(t, x)=f_A(x-t) \qquad (\psi(t)=f_A(-t)). \tag{1.4}$$

Функции $f_A(\xi)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются после подстановки выражений (1.3), (1.4) в (1.1). Решение (1.4) определено либо при всех $t>0$, либо на ограниченном интервале изменения времени (в этом случае $\psi(t)$ изменяется в режиме с обострением) в зависимости от расходимости или сходимости интеграла

$$\int_1^\infty \frac{k(s)}{s}\, ds.$$

У некоторых уравнений специального вида появляются новые инвариантные решения. Так, уравнение (1.1) со степенной нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathbf{C}_\sigma(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \sigma=\text{const}>0, \tag{1.5}$$

имеет кроме (1.3), (1.4) инвариантные решения такого вида[3]:

$$\text{III.}\quad u_A(t, x)=(1+t)^m f_A\left(\frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}}\right), \tag{1.6}$$

$$m=\text{const}>0 \quad (\psi(t)=(1+t)^m),$$

$$\text{IV.}\quad u_A(t, x)=(1-t)^n f_A\left(\frac{x}{(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}}\right), \tag{1.7}$$

$$n=\text{const}<0 \quad (\psi(t)=(1-t)^n),$$

$$\text{V.}\quad u_A(t, x)=\exp(t) f_A\left(\frac{x}{\exp(\sigma t/2)}\right), \tag{1.8}$$

$$(\psi(t)=\exp(t)),$$

---

[1] Отметим, что часто исследование различного рода качественных и количественных свойств решений уравнения (1.1) явным или неявным образом опирается на анализ имеющихся у него инвариантных решений [1], [3], [18], [22], [27]—[38], [60], [61].

[2] Асимптотическая устойчивость автомодельных решений типа (1.3) изучалась в [13], [15], [23]. Асимптотическая устойчивость решения (1.4) для определенного класса коэффициентов k в (1.1) доказана в [39], [40].

[3] Асимптотическая устойчивость автомодельных решений (1.6) доказана в [39], [40]. Доказательство устойчивости решений (1.7) проведено разными методами в [27], [39], [40] (численными методами устойчивость этих решений изучалась в [10], [18], [21], [22]).

$$\text{VI.}\quad u_A(t, x) = (1-t)^{-1/\sigma} f_A(x + \ln(1-t)) \tag{1.9}$$
$$(\psi(t) = (1-t)^{-1/\sigma} f_A(\ln(1-t))).$$

Отметим, что автомодельные решения (1.6), (1.7) являются асимптотически устойчивыми относительно «малых» отклонений $k(u)$ от u^σ: как показано в [39], [40] для такой их устойчивости (в норме $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$) при $t \to +\infty$ или $t \to 1^-$ достаточно, чтобы $k(u)/u^\sigma \to 1$ при $u \to +\infty$. В подобном смысле асимптотически устойчивыми являются автомодельные решения типа «мгновенного точечного источника» [4] задачи Коши для уравнения (1.5); для его устойчивости при $t \to +\infty$ достаточно, чтобы $k(u)/u^\sigma \to 1$, $u \to 0$ ([41], см. также [42]).

Дополнительные инвариантные решения имеет также уравнение (1.1) с экспоненциальной нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1.10}$$

Они не являются новыми, поскольку заменой $\exp(u) = V$ уравнение (1.10) сводится к уравнению со степенной нелинейностью

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

которое допускает выписанные инвариантные решения типа III—VI.

5. Наличие у отдельных параболических уравнений (например, уравнений типа (1.5) или (1.10)) значительно более широкого класса инвариантных решений, чем у уравнения (1.1) общего вида, во многом стимулировало развитие специальной теории сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений, основанного на поточечных оценках старшей пространственной производной мажорирующего решения через младшие [43]—[47]. Этот метод сравнения позволяет сравнивать решения (т. е. оценивать снизу или сверху одно решение через другое) двух параболических уравнений с различными параболическими операторами в правых частях, например, решений уравнений (1.5) и (1.1). В качестве первого из решений можно взять одно из инвариантных решений типа III—VI уравнения (1.5), которое имеет сравнительно простой вид. Изложенная в [43]—[47] теория сравнения использовалась для решения ряда задач.

Так, например, в работах [3], [18], [21], [22] был подробно изучен эффект локализации («инерции») тепла при воздействии на сплошную среду, диффузия тепла в которой описывается уравнением (1.5), граничных режимов с обострением. Это исследование было основано на анализе автомодельных решений типа IV (существование таких решений разными методами установлено в работах [19], [20] и [21]) и обычных теорем сравнения решений фиксированного параболического уравнения по краевым данным [29]. Затем на основе операторного метода сравнения ([46], [47]), в рамках которого сравниваются не сами решения, а некоторые нелинейные функции от них, в работах [38], [48] результаты исследования автомодельных решений (1.7) уравнения (1.5) были перенесены на случай уравнения (1.1) общего вида. В частности, были доказаны теоремы существования эффекта локализации в средах с произвольной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

Однако вводимые в рамках теории сравнения (см. [43]—[47]) оцен-

ки снизу или сверху решения уравнения (1.1) общего вида чаще всего являются заниженными или завышенными и тем самым неправильно отражают асимптотическую стадию эволюции решения, которая сейчас нас интересует в первую очередь. Иными словами, с помощью доказанных в [43]—[47] теорем сравнения в общем случае не удается выделить оценками снизу и сверху достаточно узкий «корридор» эволюции решения во времени (достаточно узкий для того, чтобы можно было говорить о правильно установленных асимптотических свойствах решения[4]). Во многом это связано с уже упомянутой причиной — немногочисленностью инвариантных решений уравнений типа (1.1).

6. В настоящей работе для определения асимптотического поведения решений уравнения (1.1) используются так называемые приближенные автомодельные решения (п. а. р.), которые уравнению (1.1) не удовлетворяют, но к которым решение рассматриваемой задачи асимптотически сходится в специальной норме.

Методика построения п. а. р. заключается в следующем. Параболический оператор уравнения (1.1) разлагается на сумму двух дифференциальных операторов

$$\mathbf{A}(u)=\mathbf{B}(t,\ u)+[\mathbf{A}(u)-\mathbf{B}(t,\ u)]. \tag{1.11}$$

Оператор $\mathbf{B}$ в (1.11) выбирается таким образом, чтобы уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\mathbf{B}(t,\ v) \tag{1.12}$$

допускало нетривиальное инвариантное (автомодельное) решение $v=v_a(t,\ x)$, порождаемое граничным режимом $\psi(t)=v_a(t,\ 0)$, и, что самое главное, на этом решении оператор $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ был «много меньше» оператора $\mathbf{B}$, т. е. в определенном смысле

$$|\mathbf{A}(v_a(t,\ x))-\mathbf{B}(t,\ v_a(t,\ x))|\ll|\mathbf{B}(t,\ v_a(t,\ x))| \tag{1.13}$$

при $t\to+\infty$ или $t\to1^-$. Тогда, опуская в правой части уравнения (1.1) оператор $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, получаем, что условие (1.13), вообще говоря, обеспечивает асимптотическую «близость» (асимптотическую сходимость в специальных нормах) решений уравнений (1.1) и (1.12) с совпадающими граничными условиями.

Отметим, что аналогичная идея выделения асимптотического поведения решения естественным образом используется в многочисленных задачах гидродинамики, газовой динамики и др., когда на основе теории размерности те или иные члены рассматриваемого уравнения исключаются ввиду их малости по сравнению с оставленными. Уравнение при этом упрощается и становится возможным построение подходящего инвариантного решения. При таком анализе уравнения (1.1) возникает новая проблема, связанная с выбором в каждом из рассматриваемых случаев «определяющего» оператора $\mathbf{B}(t,\ u)$ с указанными выше свойствами.

7. Кратко охарактеризуем содержание работы. В § 2 построена в определенном смысле полная система п. а. р. уравнения (1.5), охватывающая достаточно произвольные граничные режимы $u(t,\ 0)=\psi(t)$. «Опре-

---

[4] Это важно для вывода реальных физических оценок.

деляющий» оператор $\mathbf{B}(t, u)$ в этом случае имеет вид

$$\mathbf{B}(t, u) = \mathbf{C}_\sigma(u) + \mathscr{L}(t)u,$$

где $\mathscr{L}(t)$ — линейный дифференциальный оператор не выше, чем первого порядка (его конкретный вид зависит от функции ψ). Результаты, полученные в § 2, позволяют сказать, что каждое из автомодельных решений типа I, III, IV, V уравнения (1.5) является в определенном смысле «центром притяжения» большого множества нетривиальных п. а. р.; нетривиальных в том смысле, что их пространственно-временная структура существенно отличается от структуры этого автомодельного решения. Естественным образом в зависимости от характера нарастания граничного режима выделено три класса п. а. р. уравнения (1.5), имеющих в качестве «базисных» автомодельные решения типа {I}, {III, IV} и {V}. Подобная полная система п. а. р. линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

описана в [49]. Более полное и подробное изложение результатов этой работы будет дано в последующих публикациях.

В § 3 показано, каким образом результаты § 2 удается перенести на случай уравнений (1.1) с нестепенными коэффициентами $k(u)$ такими, что функция $k(u)/u^\sigma$ растет (убывает) при $u \to +\infty$ не быстрее (не медленнее), чем любая степень[5]. Оператор $\mathbf{B}$ в этом случае имеет вид

$$\mathbf{B}(t, u) = \mathbf{A}(u) + G(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mathscr{M}(t)u,$$

где функция $G(u)$ зависит от коэффициента k, $\mathscr{M}(t)$ — линейный оператор, определяемый видом рассматриваемого граничного режима.

В § 4, который будет опубликован в следующей работе того же названия, при определенных ограничениях[6] на коэффициент k построена в некотором смысле замкнутая система п. а. р. уравнения (1.1), удовлетворяющих нелинейному уравнению первого порядка типа Гамильтона — Якоби. Оператор $\mathbf{B}$ в (1.12) здесь имеет вид

$$\mathbf{B}(t, u) = \frac{k(u)}{(u+1)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mathscr{N}(t)u, \tag{1.14}$$

где $\mathscr{N}(t)$ — линейный оператор, определяемый видом граничного режима. Таким образом, здесь на асимптотической стадии происходит своеобразное «вырождение» исходного параболического уравнения (1.1) в уравнение первого порядка (1.12), (1.14). Отдельные классы п. а. р. в вырожденном случае, которым отвечает оператор $\mathscr{N}(t) \equiv 0$ в (1.14), построены в [39], [40]. В одном частном случае $k(u) \equiv 1$, когда $\mathbf{B}(u) = (\partial u/\partial x)^2/(1+u)$, такие п. а. р., порождаемые граничными режимами с обострением, ранее рассматривались в работах [50]—[52] и использовались при изучении эффекта локализации тепла в средах с постоянными теплофизическими свойствами.

П. а. р. уравнения (1.1) с коэффициентами k, удовлетворяющими условию $[k(u)/k'(u)]' \to 0$ при $u \to +\infty$, будут построены в одной из последующих работ.

8. Отметим, что многие построенные в §§ 2—4 п. а. р. являются в то же время либо нижними, либо верхними (в терминологии [53]) реше-

[5] Другими словами, если $[k(u)/k'(u)]' \to 1/\sigma$ при $u \to +\infty$, где $\sigma = \mathrm{const} \in \mathbf{R}_+^1$.
[6] Которые, в частности, означают, что $[k(u)/k'(u)]' \to +\infty$ при $u \to +\infty$.

ниями уравнения (1.1), т. е. при соответствующих ограничениях на краевые данные рассматриваемой задачи являются точными оценками решения либо сверху, либо снизу. Учитывая, что п. а. р. правильно описывают асимптотическое поведение решения задачи, можно утверждать, что эти оценки являются оптимальными и в определенном смысле неулучшаемыми. Последнее делает технику построения п. а. р. весьма удобной для исследования, например, явления локализации тепла при воздействии на теплопроводную среду режимов с обострением (некоторые результаты, полученные в этом направлении с помощью п. а. р., приведены в работе [38], в которой изучается эффект локализации тепла в произвольных нелинейных средах; там же дан список литературы, связанной с исследованием явления локализации процесса горения в сплошных средах с объемным энерговыделением).

9. В заключение этого параграфа отметим, что решение вырождающегося ($k(0)=0$) уравнения (1.1), допускающего конечную скорость распространения возмущений, определяется в обобщенном смысле: оно может не иметь всех входящих в него производных (см. [28], [29], [31]). При доказательстве сформулированных в работе теорем учитывается, что это обобщенное решение $u(t, x)$ является пределом при $n\to+\infty$ классических положительных решений $u_n(t, x)$ уравнения (1.1) (см. [29]). Поэтому при выводе необходимых оценок можно формально считать решение $u(t, x)$ достаточно гладким, предполагая при этом, что сначала аналогичные оценки выводятся применительно к функциям $u_n(t, x)$, и тогда конечный результат получается предельным переходом $n\to+\infty$.

10. Введем некоторые обозначения. Через $\|\cdot\|_C$ обозначим норму в $C(\mathbf{R}_+^1)$

$$\|v\|_C = \sup_{x\in\mathbf{R}_+^1} |v(x)|$$

и будем писать $v(t, x)\in C(\mathbf{R}_+^1)$, если

$$\|v(t, \cdot)\|_C = \sup_{x\in\mathbf{R}_+^1} |v(t, x)| < +\infty$$

при всех допустимых t. Мы также будем пользоваться пространством $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$, которое является сопряженным к пространству $H^1(\mathbf{R}_+^1)$ [54]. К $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$ относятся, например, все функции $u(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\left|\int_0^\infty u(x)\,dx\right| < +\infty, \quad \left|\int_0^\infty dx \int_x^\infty u(y)\,dy\right| < +\infty. \tag{1.15}$$

Скалярное произведение в $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$ имеет вид

$$(u, v)_{H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)} = \int_0^\infty u(x)\left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} v\right](x)\,dx,$$

где функция $V=(-\partial^2/\partial x^2)^{-1}v$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -v, \quad x\in\mathbf{R}_+^1, \tag{1.16}$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$V(0)=0, \quad |V(+\infty)|<\infty. \tag{1.17}$$

Отметим, что в силу (1.15) решение задачи (1.16), (1.17) существует.

Через $\|u\|_{-1}$ обозначим норму в $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$

$$\|u\|_{-1} = (u, u)^{1/2}_{H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|u\|_{-1} = \left\|\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1} u\right\|_2 = \left\|\int_x^\infty u(y)\,dy\right\|_2.$$

Авторы выражают глубокую благодарность С. П. Курдюмову за неоднократные плодотворные обсуждения, которые во многом определили направление исследований, выполненных в данной работе. Авторы благодарны С. И. Похожаеву за ряд ценных замечаний, а также В. А. Дородницыну за полезные обсуждения.

§ 2. Полная система приближенных автомодельных решений (п. а. р.) уравнения со степенной нелинейностью

Введение. Формальное определение п. а. р. В этом параграфе рассматривается первая краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{C}_\sigma(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right); \tag{2.1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}_+^1;$$

$$u_0 \in C(\mathbf{R}_+^1), \quad \frac{\partial}{\partial x} u_0^{\sigma+1} \in C(\mathbf{R}_+^1), \quad \sup u_0 < +\infty, \tag{2.2}$$

с одним из граничных режимов

$$u(t, 0) = \psi_+(t) > 0, \quad t > 0; \quad \psi_+ \in C^2(\mathbf{R}_+^1); \tag{2.3}$$

$$u(t, 0) = \psi_-(t) > 0, \quad t \in (0, 1); \quad \psi_- \in C^2(0, 1). \tag{2.3'}$$

Предполагается, что функция $\psi_\pm$ являются монотонно возрастающими, причем $\psi_+(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\psi_-(t) \to +\infty$ при $t \to 1^-$ (в последнем случае граничная функция изменяется в режиме с обострением). Для простоты начальную функцию $u_0(x)$ в (2.2) будем считать финитной: $\operatorname{mes} \operatorname{supp} u_0 < +\infty$.

П. а. р. рассматриваемых задач будем искать в виде

$$u_a(t, x) = \psi_\pm(t)\,\theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \tag{2.4}$$

где неизвестные неотрицательные функции $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ определяют пространственный профиль тепловой волны и (с точностью до постоянного множителя) зависимость от времени глубины ее проникновения. Предполагается, что $\theta_a(0) = 1$, поэтому п. а. р. (2.4) удовлетворяет граничным условиям (2.3) или (2.3′). Нетрудно видеть, что п. а. р. $u_a(t, x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -\psi_\pm(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\frac{d\theta_a(\xi)}{d\xi}\xi + \psi'_\pm(t)\,\theta_a(\xi) \tag{2.5}$$

или, что то же самое, уравнения

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t)\frac{\partial u_a}{\partial x}x + \left(\frac{\psi'_\pm}{\psi_\pm}\right)(t)\,u_a. \tag{2.5'}$$

Через $\theta(t, \xi)$ обозначим автомодельное представление решения задачи (2.1)—(2.3) или (2.1)—(2.3′), т. е. «автомодельную обработку» реше-

ния $u(t, x)$, выполненную в соответствии со структурой п. а. р. (2.4)

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{\psi_{\pm}(t)} u(t, \xi\varphi(t)), \quad \xi > 0. \tag{2.6}$$

Будет показано, что при специальном выборе функций $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ имеет место сходимость автомодельного представления $\theta(t, \xi)$ к $\theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$ или $t \to 1^-$ соответственно. Это обеспечивает с известной степенью точности близость свойств решения рассматриваемой задачи и п. а. р. (2.4). В частности, из (2.4) следует, что глубина проникновения тепловой волны может быть оценена по формуле

$$x_{\text{эф}}(t) \simeq \bar{\xi}\varphi(t),$$

где $\bar{\xi}$ — корень уравнения $\theta_a(\bar{\xi}) = 1/2$.

Отметим, что асимптотическая устойчивость точных автомодельных решений параболических уравнений понимается чаще всего как сходимость автомодельного представления к соответствующей функции $f_A(\xi)$ ([3], [10], [13], [15], [21], [22], [27], [55]—[57]).

В зависимости от того, уравнению какого вида удовлетворяет функция $\theta_a(\xi)$ в (2.4), построение п. а. р. естественным образом разбивается на три случая.

1. Приближенные автомодельные решения типа I.

1.1. Граничный режим без обострения. В этом пункте рассматривается задача (2.1)—(2.3) с обычным граничным режимом.

Теорема 2.1. *Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t) \to +\infty, \quad t \to +\infty. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left[\int_0^t \psi_+^{\sigma}(\tau)\, d\tau\right]^{1/2}, \quad t > 0, \tag{2.8}$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением краевой задачи

$$(\theta_a^{\sigma}\theta_a')' + \frac{1}{2}\theta_a'\xi = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1 \left(' = \frac{d}{d\xi}\right), \tag{2.9}$$

$$\theta_a(0) = 1, \quad \theta_a(+\infty) = 0 \tag{2.10}$$

и выполняется следующая оценка скорости сходимости[7]:

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} = O\left\{\psi_+^{-1}(t)\, \varphi^{-3/2}(t) \int_0^t \psi_+'(\tau)\, \varphi^{3/2}(\tau)\, d\tau\right\} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0. \tag{2.11}$$

Замечание 1. Из сходимости $\theta(t, \xi) \to \theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$ в норме $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$ следует поточечная сходимость почти всюду.

Замечание 2. В силу (2.9) имеет место равенство

$$\frac{d\theta_a}{d\xi}\xi = -2\frac{d}{d\xi}\left(\theta_a^{\sigma}\frac{d\theta_a}{d\xi}\right),$$

подставляя которое в (2.5) убеждаемся, что в условиях теоремы 2.1 п. а. р. (2.4) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = 2\left[\psi_+ \frac{\varphi'}{\varphi}\right](t)\frac{d}{d\xi}\left(\theta_a^{\sigma}\frac{d\theta_a}{d\xi}\right) + \psi_+'(t)\,\theta_a$$

---

[7] Можно показать, что $\theta(t, \xi) \to \theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$ в норме $L^1(\mathbf{R}_+^1)$ (см. [27]).

или, что то же самое (см. (2.8)), уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^{\sigma}\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)+\left[\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right](t)\,u_a, \tag{2.12}$$

которое отличается от исходного (2.1) дополнительным членом в правой части. Из (2.12) следует, что п. а. р. $u_a(t, x)$ является верхним решением уравнения (2.1), так что, если $u_0(x)\leqslant u_a(0, x)$, $x\in\mathbf{R}_+^1$, то $u(t, x)\leqslant \leqslant u_a(t, x)$ всюду в $\mathbf{R}_+^1\times\mathbf{R}_+^1$.

Замечание 3. Существование и единственность неотрицательного обобщенного решения задачи (2.9), (2.10) установлены в [14], [16], [19]. Там же изучены некоторые его свойства; в частности, показано, что $\theta_a\in H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$ является финитной функцией: $\theta_a(\xi)>0$ при $0<\xi<\xi_0<+\infty$ и $\theta_a(\xi)=0$ для всех $\xi\geqslant\xi_0$ (отметим, что уравнение (2.9) допускает понижение порядка и поэтому возможен анализ его на фазовой плоскости).

Доказательство теоремы 2.1. Положим $w(t, x)=u(t, x)-$ $-u_a(t, x)$. Тогда в силу условий (2.2), (2.3) и (2.10) $w(t, 0)=$ $=w(t, +\infty)=0$, $w(t, x)\in H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$ при всех $t>0$. Из (2.1), (2.12) следует, что функция w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\mathbf{C}_\sigma(u)-\mathbf{C}_\sigma(u_a)-\left[\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right](t)\,u_a.$$

Умножим скалярно обе части этого уравнения на $(-\partial^2/\partial x^2)^{-1}w$. Тогда учитывая, что

$$\left(\mathbf{C}_\sigma(u)-\mathbf{C}_\sigma(u_a),\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}w\right)=-\frac{1}{\sigma+1}(u^{\sigma+1}-u_a^{\sigma+1},\ u-u_a)<0,$$

приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2\leqslant-\left[\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right](t)\left(u_a,\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}w\right),\qquad t>0. \tag{2.13}$$

Выполняя в правой части (2.13) интегрирование по частям и применяя затем неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2\leqslant\left[\frac{\psi_+'}{\psi_+}\right](t)\,\|u_a(t, x)\|_{-1}\,\|w(t, x)\|_{-1}. \tag{2.14}$$

Нетрудно видеть, что

$$\|u_a(t, x)\|_{-1}=\psi_+(t)\,\varphi^{3/2}(t)\,\|\theta_a(\xi)\|_{-1},$$

и тогда из (2.14) выводим оценку

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}\leqslant\psi_+'(t)\,\varphi^{3/2}(t)\,\|\theta_a(\xi)\|_{-1},$$

из которой, в свою очередь, имеем

$$\|w(t, x)\|_{-1}\leqslant\|\theta_a(\xi)\|_{-1}\int_0^t\psi_+'(\tau)\,\varphi^{3/2}(\tau)\,d\tau+\|w(0, x)\|_{-1}.$$

Учитывая теперь, что

$$\|w(t, x)\|_{-1}=\psi_+(t)\,\varphi^{3/2}(t)\,\|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1},$$

из последнего неравенства получаем оценку

$$\|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}\leqslant\frac{\|\theta_a(\xi)\|_{-1}}{\psi_+(t)\,\varphi^{3/2}(t)}\int_0^t\psi_+'(\tau)\,\varphi^{3/2}(\tau)\,d\tau+\frac{\|w(0, x)\|}{\psi_+(t)\,\varphi^{3/2}(t)}, \tag{2.15}$$

которая совпадает с (2.11) при $t\to+\infty$. Раскрывая неопределенность в правой части (2.15), с учетом (2.8) приходим к цепочке соотношений

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\psi_+'\varphi^{3/2}}{(\psi_+\varphi^{3/2})'}\right](t)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[1+\frac{3}{4}\frac{\psi_+^{\sigma+1}}{\psi_+'\int\limits_0^t\psi_+^{\sigma}(\tau)\,d\tau}\right]^{-1}(t)\leqslant\lim_{t\to+\infty}\frac{4}{3}\left\{\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\right\}^{-1}.$$

Отсюда в силу (2.7) заключаем, что $\|\theta-\theta_a\|_{-1}\to0$ при $t\to+\infty$, причем справедлива оценка скорости сходимости (2.11). Теорема доказана.

Замечание 4. Аналогичным образом теорему 2.1 можно доказать, рассматривая задачу (2.1)—(2.3) на интервале $x\in(0,\ \xi^*\varphi(t))$ переменной длины. На подвижной правой границе $x^*(t)=\xi^*\varphi(t)$ задается дополнительное условие

$$u(t,x^*(t))=0,\quad t>0.$$

Здесь $\varphi(t)$ вычисляется по формуле (2.8), $\xi^*\geqslant\xi_0=\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a(\xi)$ — произвольная постоянная. Преимуществом такого подхода является то, что нормы $\|\theta-\theta_a\|_{-1}$, $\|\theta_a\|_{-1}$ вычисляются на ограниченном отрезке $0\leqslant\xi\leqslant\xi^*$. Отметим, что таким способом в работе [23] установлена асимптотическая устойчивость автомодельных решений (1.3) уравнения (1.1), отвечающих граничным условиям $\psi(t)=\mathrm{const}>0$.

В таблице 1 даны асимптотические выражения функций $\varphi(t)$ для некоторых граничных режимов $\psi_+(t)$, удовлетворяющих условию (2.7). Нетрудно убедиться, что в этом случае функция $\varphi(t)$ может быть оценена по формуле

$$\varphi(t)\simeq t^{1/2}\psi_+^{\sigma/2}(t),\quad t\to+\infty.$$

Отметим, что при всех указанных в таблице 1 граничных режимах уравнение (2.1) никаких инвариантных решений не имеет (см. [9]).

Таблица 1

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$\ln^{\alpha}\ln(3+t),\ \alpha>0$	$\simeq t^{1/2}\ln^{\alpha\sigma/2}\ln t$
$\ln^{\alpha}(1+t),\ \alpha>0$	$\simeq t^{1/2}\ln^{\alpha\sigma/2}t$
$\exp[\ln^{\alpha}(1+t)],\ 0<\alpha<1$	$\simeq t^{1/2}\exp\left[\frac{\sigma}{2}\ln^{\alpha}t\right]$
$\exp\left[\frac{\ln(1+t)}{\ln^{\alpha}\ln(3+t)}\right],\ \alpha>0$	$\simeq t^{1/2}\exp\left[\frac{\sigma}{2}\frac{\ln t}{\ln^{\alpha}\ln t}\right]$

1.2. Граничный режим с обострением. В этом пункте рассматривается задача (2.1)—(2.3). Исходя из методики доказательства теоремы 2.1, можно утверждать, что в этом случае при выполнении условия

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t)\to-\infty,\quad t\to1^-,\tag{2.16}$$

глубина проникновения тепловой волны оценивается по формуле

$$\varphi(t)=\left[\int\limits_t^1\psi_-^{\sigma}(\tau)\,d\tau\right]^{1/2},\quad t\in(0,1),\tag{2.17}$$

и функция θ_a в (2.4) является решением уравнения

$$(\theta_a^\sigma \theta_a')' - \frac{1}{2}\theta_a' \xi = 0. \tag{2.18}$$

Однако здесь есть одно отличие от случая, рассмотренного в теореме 2.1, — уравнение (2.18) с условиями (2.10) не имеет ограниченного в $\overline{\mathbf{R}}_+^1$ решения. Оно имеет строго положительные решения только на ограниченных интервалах $0<\xi<\xi^*$ с условиями [8]

$$\theta_a(0)=1, \quad \theta_a(\xi^*)=0 \quad (\theta_a(\xi)>0, \quad 0<\xi<\xi^*). \tag{2.19}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае п. а. р. удается построить применительно к краевой задаче для уравнения (2.1) в $(0, 1)\times \times\{0<x<\xi^*\varphi(t)\}$ с дополнительным условием на подвижной правой границе

$$u(t, \xi^*\varphi(t))=0, \quad t\in(0, 1) \tag{2.20}$$

(здесь и далее под $\varphi(t)$ понимается функция (2.17)). Тогда при выполнении условия (2.16) имеет место сходимость автомодельного представления (2.6) решения рассматриваемой задачи к функции $\theta_a(\xi)$, удовлетворяющей (2.18), (2.19), причем справедлива оценка

$$\|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1} = O\left\{\psi_-^{-1}(t)\,\varphi^{-3/2}(t)\int_0^t \psi_-'(\tau)\,\varphi^{3/2}(\tau)\,d\tau\right\} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0. \tag{2.21}$$

Однако для задачи (2.1)—(2.3′), (2.20) можно вывести более точную, чем (2.21), оценку скорости сходимости $\theta(t, \xi)\to\theta_a(\xi)$ при $t\to 1^-$. Это связано с наличием специальной оценки решения задачи (2.18), (2.19).

Лемма 2.1. *Пусть $\theta_a(\xi)$ — решение задачи* (2.18), (2.19). *Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{\xi\in(0,\xi^*)} \frac{d^2}{d\xi^2}[\theta_a^\sigma(\xi)] = q_0 < 0. \tag{2.22}$$

Справедливость этого утверждения прямо следует из равенства

$$(\theta_a^\sigma)'' = -\sigma\frac{\theta_a'}{\theta_a}\left[\sigma\theta^{\sigma-1}\theta' - \frac{1}{2}\xi\right]$$

(напомним, что $\theta_a'(\xi)<0$ при всех $\xi\in(0, \xi^*)$).

Теорема 2.2. *Пусть функция $\psi_-(t)$ удовлетворяет условию* (2.16). *Тогда $\varphi(t)$ вычисляется по формуле* (2.17), *функция $\theta_a(\xi)$ является решением краевой задачи* (2.18), (2.19) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|\theta^\sigma(t, \xi)-\theta_a^\sigma(\xi)\|_C = O\left\{\psi_-^\sigma(t)\exp\left[q_0\int_0^t\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](\tau)\,d\tau\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^t(\psi^\sigma)'(\tau)\exp\left[-q_0\int_0^\tau\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](\nu)\,d\nu\right]d\tau\right\}\xrightarrow[t\to 1^-]{} 0. \tag{2.23}$$

Замечание 1. В условиях теоремы п. а. р. (2.4) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma\frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \left[\frac{\psi_-'}{\psi_-}\right](t)\,u_a. \tag{2.24}$$

---

[8] Или, например, с условиями $\theta_a(0)=1$, $\theta_a(\xi^*)=a^*\in(0, 1)$.

Отсюда, в частности, следует, что п. а. р. $u_a(t, x)$ является верхним решением уравнения (2.1).

Доказательство. Положим $u^\sigma = U$, $u_a^\sigma = U_a$. Тогда функции U и U_a удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{D}_\sigma(U), \quad \frac{\partial U_a}{\partial t} = \mathbf{D}_\sigma(U_a) + \sigma\left[\frac{\psi_-'}{\psi_-}\right](t)\, U_a, \tag{2.25}$$

где оператор $\mathbf{D}_\sigma$ имеет вид

$$\mathbf{D}_\sigma(U) = U^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x}\left(U^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial U}{\partial x}\right) = U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2. \tag{2.26}$$

Введем обозначения $z(t, x) = U(t, x) - U_a(t, x)$. Как следует из (2.25), (2.26), функция z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = U\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U_a}{\partial x}\right) - \sigma\left[\frac{\psi_-'}{\psi_-}\right](t)\, U_a, \tag{2.27}$$

причем $z(t, 0) = z(t, \xi^*\varphi(t)) = 0$ при всех $t \in (0, 1)$. Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}\theta_a^\sigma(\xi)\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](t) \leqslant q_0\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](t),$$
$$U_a = \psi_-^\sigma(t)\,\theta_a^\sigma(\xi) \leqslant \psi_-^\sigma(t),$$

из (2.27) в результате применения принципа максимума получаем оценки $\sup\limits_x z(t, x) \leqslant z^+(t)$, $\inf\limits_x z(t, x) \geqslant z^-(t)$, где гладкие функции $z^\pm$ таковы, что $z^+(0) = \sup\limits_x z(0, x)$, $z^-(0) = \inf\limits_x z(0, x)$ и при всех $t \in (0, 1)$

$$\frac{dz^+}{dt} \leqslant q_0\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](t)\, z^+,$$

$$\frac{dz^-}{dt} \geqslant q_0\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](t)\, z^- - \sigma\,[\psi_-'\psi_-^{\sigma-1}](t).$$

Отсюда получаем асимптотические оценки

$$z^+(t) = O\left\{\exp\left[q_0\int_0^t\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](\tau)\,d\tau\right]\right\},$$

$$z^-(t) = O\left\{\exp\left[q_0\int_0^t\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](\tau)\,d\tau\right]\psi'(\tau)\,\psi^{\sigma-1}(\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-q_0\int_0^\tau\left[\frac{\psi_-^\sigma}{\varphi^2}\right](\nu)\,d\nu\right]d\tau\right\}, \quad t \to 1^-.$$

Учитывая теперь, что

$$\|z(t, x)\|_C = \psi_-^\sigma(t)\,\|\theta^\sigma(t, \xi) - \theta_a^\sigma(\xi)\|_C \leqslant \max\{|z^-(t)|, z^+(t)\},$$

получаем оценку (2.23) и, раскрывая неопределенность в правой части, убеждаемся, что условия (2.16), (2.17) обеспечивают сходимость $\theta^\sigma(t, \xi) \to \theta_a^\sigma(\xi)$ при $t \to 1^-$ в метрике $C(\mathbf{R}_+^1)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Легко убедиться, что при выполнении условия (2.16) для функции (2.17) справедлива следующая асимптотически точная оценка:

$$\varphi(t) \cong (1-t)^{1/2}\,\psi_-^{\sigma/2}(t), \quad t \to 1^-.$$

Исходя из этой оценки нетрудно составить таблицу, аналогичную таблице 1, для граничных режимов с обострением вида $\psi_-(t)=\psi_+[(1-t)^{-1}]$, где ψ_+ — любые функции из таблицы 1.

2. Приближенные автомодельные решения типа III и IV.

2.1. Граничный режим обострения. В этом пункте будут построены п. а. р. задачи (2.1)—(2.3) с функцией $\theta_a(\xi)$, удовлетворяющей следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$(\theta_a^\sigma\theta_a')' + \frac{1+m\sigma}{2}\theta_a'\xi - m\theta_a = 0, \quad \xi\in\mathbf{R}_+^1, \tag{2.28}$$

$$\theta_a(0)=1, \quad \theta_a(+\infty)=0. \tag{2.29}$$

Здесь $m>0$ — произвольная постоянная. Этой же задаче удовлетворяет функция f_A в (1.6), в чем можно убедиться, подставляя выражение (1.6) в уравнение (2.1).

Существование и единственность неотрицательного обобщенного решения задачи (2.28), (2.29) доказаны в [5], [19]. При любых $m>0$ оно является финитным: $\theta_a(\xi)=0$ при всех $\xi\geqslant\xi_0$ и $\theta_a(\xi)>0$ для любых $\xi<\xi_0<+\infty$. При $m=1/\sigma$ решение записывается в явном виде:

$$\theta_a(\xi)=\begin{cases}(1-\xi/\sigma^{1/2})^{1/\sigma}, & 0<\xi<\xi_0=\sigma^{-1/2},\\ 0, & \xi\geqslant\xi_0.\end{cases} \tag{2.30}$$

Для доказательства сходимости п. а. р. к решению задачи (2.1)—(2.3) нам понадобиться следующая

Лемма 2.2. *Пусть $\theta_a(\xi)$ — решение задачи* (2.28), (2.29). *Тогда при любых $m>0$ справедлива оценка*

$$q_m = \sup_{\xi\in\mathbf{R}_+^1}\frac{d^2}{d\xi^2}\theta_a^\sigma(\xi)<m\sigma. \tag{2.31}$$

Замечание. В частности, при $m=1/\sigma$ имеем (см. (2.30)) $q_{1/\sigma}=0<1$.

Доказательство. Положим $\theta_a^\sigma(\xi)=g(\xi)$. Функция g_a удовлетворяет в $\mathbf{R}_+^1$ уравнению

$$g_ag_a'' + \frac{1}{\sigma}g_a'^2 + \frac{1+m\sigma}{2}g_a'\xi - m\sigma g_a = 0. \tag{2.32}$$

При $\xi\to\xi_0^-$ имеет место разложение (см. [5])

$$g_a(\xi)=\frac{\sigma(1+m\sigma)}{2}\xi_0(\xi_0-\xi)-\frac{1-m\sigma}{4(\sigma+1)}\sigma(\xi_0-\xi)^2+\ldots,$$

т. е. $g_a''(\xi_0)=-\dfrac{1-m\sigma}{2(\sigma+1)}\sigma<m\sigma$. Предположим, что найдется точка $\xi^*\in[0,\xi_0)$ такая, что $g_a''(\xi^*)=m\sigma$. Тогда из (2.32) получаем

$$g_a'(\xi^*)=-\sigma\left(\frac{1+m\sigma}{2}\right)\xi^*. \tag{2.33}$$

Переписывая уравнение (2.32) в следующем эквивалентном виде:

$$(g_a^{1/\sigma}g_a')' + \frac{1+m\sigma}{2}g_a^{1/\sigma-1}g_a'\xi - m\sigma g^{1/\sigma}=0$$

и интегрируя обе его части от ξ^* до ξ_0, получаем

$$-g_a^{1/\sigma}(\xi^*)\left[g_a'(\xi^*)+\sigma\left(\frac{1+m\sigma}{2}\right)\xi^*\right]-\sigma\left[\frac{1+m\sigma}{2}+m\right]\int^{\xi_0}g_a^{1/\sigma}(\eta)\,d\eta=0.$$

Отсюда, учитывая (2.33), приходим к противоречию, поскольку в силу условия $\xi^*<\xi_0$

$$\int_{\xi^*}^{\xi_0} g_a^{1/\sigma}(\eta)\,d\eta>0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Пусть функция* ψ_+ *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\to\frac{1}{m},\qquad m=\mathrm{const}>0. \tag{2.34}$$

Тогда

$$\varphi(t)=\left\{m\frac{\psi_+^{\sigma+1}(t)}{\psi_+'(t)}\right\}^{1/2},\qquad t>0, \tag{2.35}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением краевой задачи* (2.28), (2.29) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|\theta^\sigma(t,\xi)-\theta_a^\sigma(\xi)\|_C=O\left\{\psi_+^{qm/m-\sigma}(t)\int_0^t\psi_+^{\sigma-qm/m}(\tau)\left|\left[\ln\frac{\psi_+^l(\tau)}{\varphi(\tau)}\right]'\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0, \tag{2.36}$$

где величина $q_m<m\sigma$ *вычисляется по формуле* (2.31), $l=(1+m\sigma)/2m$.

Замечание 1. Из (2.28) следует, что

$$\theta_a=\frac{1}{m}\frac{d}{d\xi}\left(\theta_a^\sigma\frac{d\theta_a}{d\xi}\right)+\frac{1+m\sigma}{2m}\frac{d\theta_a}{d\xi}\xi. \tag{2.37}$$

Подставляя это равенство в (2.5), получаем, что при выполнении условия (2.35) п. а. р. (2.4) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)+\left[\ln\frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(t)\frac{\partial u_a}{\partial x}x. \tag{2.38}$$

Доказательство. Действуя точно так же, как при доказательстве теоремы 2.2, убеждаемся, что функция $z=U-U_a$, где $U=u^\sigma$, $U_a=u_a^\sigma$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t}=U\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)-\left[\ln\frac{\varphi_+^l}{\varphi}\right]'(t)\frac{\partial U_a}{\partial x}x. \tag{2.39}$$

Из (2.39) в результате применения принципа максимума получаем, что при достаточно больших t $\sup\limits_x|z(t,x)|\leqslant z_0(t)$, где гладкая ограниченная функция z_0 удовлетворяет неравенству

$$\frac{dz_0}{dt}(t)\leqslant z_0(t)\sup_x\frac{\partial^2 U_a(t,x)}{\partial x}+\left|\left[\ln\frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(t)\right|\sup_x\left|\frac{\partial U_a(t,x)}{\partial x}x\right|.$$

Отсюда выводим оценку

$$\frac{dz_0}{dt}\leqslant z_0\frac{\psi^\sigma(t)}{\varphi^2(t)}q_m+\psi_+^\sigma\left|\left[\ln\frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(t)\right|p_m,$$

где $p_m=\sup\limits_\xi|\xi\theta_a'(\xi)|$. Учитывая теперь (2.35), приходим к неравенству

$$\frac{dz_0}{dt}\leqslant\frac{q_m}{m}\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)}z_0+p_m\psi_+^\sigma(t)\left|\left[\ln\frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(t)\right|,$$

из которого непосредственно следует, что

$$z_0(t) = O\left\{\psi_+^{\frac{q_m}{m}} \int_0^t \psi_+^{\sigma-\frac{q_m}{m}}(\tau) \left| \left[\ln \frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(\tau) \right| d\tau \right\}. \tag{2.40}$$

Поскольку при достаточно больших t $z_0(t) \geqslant \psi_+^\sigma(t) \times \|\theta^\sigma(t, \xi) - \theta_a^\sigma(\xi)\|_C$, из (2.40) выводим оценку (2.36). Раскрывая теперь неопределенность в правой части (2.36) и учитывая при этом, что в силу (2.31) $q_m/m - \sigma < 0$, получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \psi_+^{\frac{q_m}{m}-\sigma} \int_0^t \psi_+^{\sigma-\frac{q_m}{m}} \left| \left[\ln \frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]' \right| d\tau = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\sigma - \frac{q_m}{m}\right)} \frac{\psi_+ \left| l \frac{\psi_+'}{\psi_+} - \frac{\varphi'}{\varphi} \right|}{\psi_+'} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\sigma - \frac{q_m}{m}\right)} \left| l - \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{\psi_+}{\psi_+'} \right| = \lim \frac{1}{\left(\sigma - \frac{q_m}{m}\right)} \left| l - \frac{1}{2}\left[\sigma + \left(\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right)'\right] \right| = 0$$

(на последнем этапе используются условия (2.34), (2.35). Отсюда заключаем, что $\theta^\sigma \to \theta_a^\sigma$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Замечание 2. В условиях теоремы имеет место сходимость $\theta(t, \xi) \to \theta_a(\xi)$, $t \to +\infty$ в норме $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$ с оценкой

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} = O\left\{\psi_+^{-1}(t)\, \varphi^{-3/2}(t) \int_0^t \psi_+(\tau)\, \varphi^{3/2}(\tau) \left| \left[\ln \frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(\tau) \right| d\tau \right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Замечание 3. Кроме (2.37), из (2.28) вытекает равенство

$$\frac{d\theta_a}{d\xi}\xi = -\frac{2}{1+m\sigma} \frac{d}{d\xi}\left(\theta_a^\sigma \frac{d\theta_a}{d\xi}\right) + \frac{2m}{1+m\sigma}\theta_a,$$

подставив которое в (2.5), получим, что п. а. р. (2.4) удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{2}{1+m\sigma}\left[\frac{\varphi\varphi'}{\psi_+^\sigma}\right](t) \frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \frac{u_a}{l}\left[\ln \frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(t), \tag{2.41}$$

которое отличается как от (2.38), так и от исходного (2.1). Если вместо (2.35) определить функцию $\varphi(t)$ асимптотически эквивалентным выражением

$$\varphi(t) = (1+m\sigma)^{1/2}\left\{\int_0^t \psi_+^\sigma(\tau)\, d\tau\right\}^{1/2}, \quad t > 0,$$

то уравнение (2.41) упростится и примет вид

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \frac{u_a}{l}\left[\ln \frac{\psi_+^l}{\varphi}\right]'(t). \tag{2.42}$$

Конкретные случаи применения теоремы 2.3. указаны в таблице 2. Отличительной чертой построенных п. а. р. является неограниченное возрастание со временем глубин проникновения рассматриваемых тепловых волн. Отметим, что при всех указанных в таблице граничных режимах задача (2.1)—(2.3) никаких инвариантных решений не имеет (см. [9]).

Таблица 2

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$t^m \ln^\alpha \ln(3+t)$	$\cong t^{\frac{1+m\sigma}{2}} \ln^{\frac{\alpha\sigma}{2}} \ln t$
$t^m \ln^\alpha (3+t)$	$\cong t^{\frac{1+m\sigma}{2}} \ln^{\frac{\alpha\sigma}{2}} t$
$t^m \exp[\ln^\alpha(1+t)]$, $0<\alpha<1$	$\cong t^{\frac{1+m\sigma}{2}} \exp\left[\frac{\sigma}{2}\ln^\alpha t\right]$
$t^m \exp\left[\frac{\ln(1+t)}{\ln^\alpha \ln(3+t)}\right]$, $\alpha>0$	$\cong t^{\frac{1+m\sigma}{2}} \exp\left[\frac{\sigma}{2}\frac{\ln t}{\ln^\alpha \ln t}\right]$

2.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача (2.1)—(2.3′). В этом случае функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи

$$(\theta_a^\sigma \theta_a') - \frac{1+n\sigma}{2}\theta_a'\xi + n\theta_a = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1, \tag{2.43}$$

$$\theta_a(0)=1, \quad \theta_a(+\infty)=0, \tag{2.44}$$

где $n<0$ — постоянная. Этой же задаче удовлетворяет функция f_A в (1.7).

Существование и единственность неотрицательного решения задачи (2.43), (2.44) установлены разными способами в работах [19], [20] и [21]. Там же показано, что при $n<-1/\sigma$ функция θ_a является финитной, а при $n\in(-1/\sigma, 0)$ $\theta_a(\xi)>0$ всюду в $\mathbf{R}_+^1$, причем для больших ξ справедливо асимптотическое разложение

$$\theta_a(\xi) = C\xi^{\frac{2n}{1+n\sigma}} + \ldots, \quad C = C(n,\sigma) = \mathrm{const} > 0. \tag{2.45}$$

В случае $n=-1/\sigma$ решение задачи представимо в явном виде:

$$\theta_a(\xi) = \begin{cases} (1-\xi/\xi_0)^{2/\sigma}, & \xi<\xi_0 = [2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}, \\ 0, & \xi \geqslant \xi_0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Нам понадобится следующее утверждение, по своему доказательству полностью аналогичное лемме 1.2.

Лемма 2.3. *Пусть* $\theta_a(\xi)$ — *решение задачи* (2.43), (2.44). *Тогда справедлива оценка*

$$q_n = \sup_{\xi\in\mathbf{R}_+^1} \frac{d^2}{d\xi^2}\theta_a^\sigma(\xi) < -n\sigma. \tag{2.47}$$

Замечание. В частности, при $n=-1/\sigma$ (см. (2.46)) $q_n = 2/\xi_0^2 = \sigma/(\sigma+2) < 1$.

Теорема 2.4. *Пусть функция* ψ_- *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t) \to \frac{1}{n}, \quad n = \mathrm{const} < 0. \tag{2.48}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left\{(-n)\left[\frac{\psi_-^{\sigma+1}}{\psi_-'}\right](t)\right\}^{1/2}, \quad t\in(0,1), \tag{2.49}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (2.43), (2.44) *и справедлива*

следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\theta^\sigma(t,\xi)-\theta_a^\sigma(\xi)\|_C = O\left\{\psi_-^{-\frac{qn}{n}-\sigma}(t)\int_0^t \psi_-^{\sigma+\frac{qn}{n}}(\tau)\left|\left[\ln\frac{\psi^l}{\varphi}\right]'\right| d\tau\right\} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0, \quad (2.50)$$

где $q_n<-n\sigma$ *вычисляется по формуле* (2.47), $l=(1+n\sigma)/2n$.

Замечание 1. Из (2.43) следует, что в условиях теоремы п. а. р. (2.4) одновременно удовлетворяет двум разным уравнениям

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)+\left[\ln\frac{\psi_-^l}{\varphi}\right]'(t)\,x\,\frac{\partial u_a}{\partial x} \quad (2.51)$$

и

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=-\frac{2}{1+n\sigma}\left[\frac{\varphi\varphi'}{\psi_-^\sigma}\right](t)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)+\frac{u_a}{l}\left[\ln\frac{\psi_-^l}{\varphi}\right]'(t)\quad\left(n\neq-\frac{1}{\sigma}\right). \quad (2.52)$$

Замечание 2. В условиях теоремы 2.4 и при дополнительном ограничении $n<-3/(4+3\sigma)$ нетрудно показать (см. доказательство теоремы 2.1), что $\theta(t,\xi)\to\theta_a(\xi)$ при $t\to 1^-$ в норме $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$. Ограничение $n<-3/(4+3\sigma)$ возникает в связи с необходимостью выполнения условия $(\|\xi\theta_a'(\xi)\|_{-1}<+\infty$.

В таблице 3 даны асимптотические значения функций $\varphi(t)$ при некоторых граничных режимах с обострением, удовлетворяющих условию (2.48). Отметим, что свойства указанных в таблице 3 п. а. р. зависят от соотношения $n\gtreqless-1/\sigma$: при $n<-1/\sigma$ глубина проникновения неограниченно возрастает с ростом t, а при $n>-1/\sigma$ она убывает вплоть до нуля. Если $n=-1/\sigma$, то $\varphi(t)$ может как возрастать, так и убывать при $t\to 1^-$.

Таблица 3

$\psi_-(t)$	$\varphi(t)$
$(1-t)^n\ln^\alpha\ln[2+(1-t)^{-1}]$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\ln^{\frac{\alpha\sigma}{2}}\lvert\ln(1-t)\rvert$
$(1-t)^n\ln^\alpha[2+(1-t)^{-1}]$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\lvert\ln(1-t)\rvert^{\frac{\alpha\sigma}{2}}$
$(1-t)^n\exp\{\ln^\alpha[(1-t)^{-1}]\}$, $0<\alpha<1$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\exp\left\{\frac{\sigma}{2}\lvert\ln(1-t)\rvert^\alpha\right\}$
$(1-t)^n\exp\left\{\frac{\ln[(1-t)^{-1}]}{\ln^\alpha\ln[2+(1-t)^{-1}]}\right\}$, $\alpha>0$	$\cong(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\exp\left\{\frac{\sigma}{2}\frac{\lvert\ln(1-t)\rvert}{\ln^\alpha\lvert\ln(1-t)\rvert}\right\}$

Рассмотрим более подробно граничный режим, указанный во второй строке таблицы 3, при $n=-1/\sigma$:

$$\psi_-(t)=(1-t)^{-1/\sigma}\ln^\alpha[2+(1-t)^{-1}],\qquad t\in(0,\ 1) \quad (2.53)$$

($\alpha\neq 0$ — произвольная постоянная). Ему отвечает тепловая волна, движущаяся при $t\to 1^-$ по закону

$$\varphi(t)\simeq\ln^{\alpha\sigma/2}[(1-t)^{-1}], \quad (2.54)$$

так что при $\alpha>0$ $\varphi(t)\to+\infty$ и $\varphi(t)\to 0$ при $t\to 1^-$, если $\alpha<0$. Только в одном частном случае $\alpha=2/\sigma$ оценка (2.54) может быть получена на основе анализа точного инвариантного решения уравнения (2.1): как показывает исследование инвариантного решения (1.9), результаты которого кратко изложены в [38], [48], граничный режим, асимптотиче-

ски эквивалентный (2.53) при $\alpha=2/\sigma$, приводит к возникновению тепловой волны, движущейся по закону

$$\varphi(t)\cong\ln[(1-t)^{-1}],\quad t\to 1^-,$$

что совпадает с (2.54) при $\alpha=2/\sigma$.

Для всех остальных граничных режимов, указанных в таблице 3, задача (2.1)—(2.3) инвариантных решений не имеет [9].

3. Приближенные автомодельные решения типа V.

3.1. Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (2.1)—(2.3). Функция θ_a в этом случае удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$(\theta_a^\sigma\theta_a')'+\frac{\sigma}{2}\theta_a'\xi-\theta_a=0,\quad \xi\in\mathbf{R}_+^1, \tag{2.55}$$

$$\theta_a(0)=1,\quad \theta_a(+\infty)=0. \tag{2.56}$$

Решением этой же задачи является функция f_A в (1.8).

Задача (2.55), (2.56) подробно изучена в работах [8], [19], где установлено существование и единственность ее обобщенного решения, а также показано, что θ_a является финитной функцией: $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a=\xi_0<+\infty$ (отметим, что уравнение (2.55) допускает понижение порядка).

При доказательстве сходимости построенных п. а. р. к решению рассматриваемой задачи нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть θ_a — решение задачи* (2.55), (2.56). *Тогда*

$$q_1=\sup_{\xi\in\mathbf{R}_+^1}\frac{d^2}{d\xi^2}\theta_a^\sigma(\xi)<\sigma. \tag{2.57}$$

При доказательстве этой леммы, которое вполне аналогично доказательству предыдущих, используется асимптотическое разложение θ_a^σ в степенной ряд при $\xi\to\xi_0^-$:

$$\theta_a^\sigma(\xi)=\frac{\sigma^2\xi_0}{2}(\xi_0-\xi)+\frac{\sigma^2}{4(2\sigma+3)}(\xi_0-\xi)^2+\ldots,$$

откуда следует, что $(\theta_a^\sigma)''(\xi_0)=\sigma^2/2(2\sigma+3)<\sigma$.

Теорема 2.5. *Пусть функция ψ_+ удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\to 0,\quad t\to+\infty. \tag{2.58}$$

Тогда

$$\varphi(t)=\left\{\left[\frac{\psi_+^{\sigma+1}}{\psi_+'}\right](t)\right\}^{1/2},\quad t>0, \tag{2.59}$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (2.55), (2.56) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta^\sigma(t,\xi)-\theta_a^\sigma(\xi)\|_C=O\left\{\psi_+^{q_1-\sigma}(t)\int_0^t\psi_+^{\sigma-q_1}(\tau)\left|\left[\ln\frac{\psi_+^{\sigma/2}}{\varphi}\right]'(\tau)\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0, \tag{2.60}$$

где $q_1<\sigma$ определяется по формуле (2.57).

Замечание 1. Из (2.55) следует, что в условиях теоремы п. а. р. (2.4) удовлетворяет одновременно двум различным параболическим

уравнениям

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \left[\ln \frac{\psi_+^{\sigma/2}}{\varphi}\right]'(t)\, x\, \frac{\partial u_a}{\partial x} \tag{2.61}$$

и

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{2}{\sigma}\left[\frac{\varphi\varphi'}{\psi_+^\sigma}\right](t)\, \frac{\partial}{\partial x}\left(u_a^\sigma \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \frac{2}{\sigma} u_a \left[\ln \frac{\psi_+^{\sigma/2}}{\varphi}\right]'(t)$$

(при доказательстве теоремы используется первое из них).

Замечание 2. Следуя доказательству теоремы 2.1, нетрудно показать, что

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

В таблице 4 приведены некоторые конкретные случаи применения теоремы 2.5. Отметим, что для всех указанных в таблице 4 режимов, $\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Кроме того, следует сказать, что во всех рассмотренных случаях задача (2.1)—(2.3) никаких инвариантных решений не имеет (см. [9]).

Таблица 4

$\psi_+(t)$	$\varphi(t)$
$\exp[\ln^\alpha(1+t)]$, $\alpha > 1$	$\cong \alpha^{-1/2} t^{1/2} \exp\left[\frac{\sigma}{2} \ln^\alpha t\right] \ln^{\frac{1-\alpha}{2}} t$
$\exp[t \ln^\alpha(2+t)]$	$\cong \ln^{-\alpha/2} t \exp\left[\frac{\sigma}{2} t \ln^\alpha t\right]$
$\exp[(1+t)^\alpha]$, $\alpha > 0$	$\cong \alpha^{-1/2} t^{(1-\alpha)/2} \exp\left[\frac{\sigma}{2} t^\alpha\right]$
$\exp(\exp t)$	$\exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp\left[\frac{\sigma}{2} \exp t\right]$

3.2. Граничный режим с обострением. Ниже будут построены п. а. р. задачи (2.1)—(2.3′).

Теорема 2.6. *Пусть функция* ψ_- *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t) \to 0, \quad t \to 1^-. \tag{2.62}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left\{\left[\frac{\psi_-^{\sigma+1}}{\psi_-'}\right](t)\right\}^{1/2}, \quad t \in (0, 1), \tag{2.63}$$

функция θ_a *является решением задачи* (2.55), (2.56) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta^\sigma(t, \xi) - \theta_a^\sigma(\xi)\|_C = O\left\{\psi_-^{q_1-\sigma}(t) \int_0^t (\psi_-^{\sigma-q_1}(\tau)\left|\left[\ln \frac{\psi_-^{\sigma/2}}{\varphi}\right]'(\tau)\right| d\tau\right\} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0, \tag{2.64}$$

где $q_1 < \sigma$ *вычисляется по формуле* (2.57).

Замечание 1. В условиях теоремы п. а. р. (2.4) удовлетворяет двум различным параболическим уравнениям, которые совпадают с (2.61), если в последних заменить ψ_+ на ψ_-.

Замечание 2. В условиях теоремы 2.6 справедлива оценка (см. доказательство теоремы 1)

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}=O\left\{\psi_-^{-1}(t)\,\varphi^{-3/2}(t)\int\limits_0^t\psi_-(\tau)\,\varphi^{3/2}(\tau)\left|\left[\ln\frac{\psi_-^{\sigma/2}}{\varphi}\right]'(\tau)\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to1^-]{}0.$$

В таблице 5 приведены асимптотические выражения для функций φ (см. (2.63)) при некоторых граничных режимах с обострением, удовлетворяющих условию (2.62).

Таблица 5

$\psi_-(t)$	$\varphi(t)$
$\exp\{\ln^\alpha[1-t)^{-1}]\}$, $\alpha>1$	$\alpha^{-1/2}(1-t)^{1/2}\exp\left\{\frac{\sigma}{2}\lvert\ln(1-t)\rvert^\alpha\right\}\lvert\ln(1-t)\rvert^{\frac{1-\alpha}{2}}$
$\exp\{(1-t)^{-1}\ln^\alpha[(1-t)^{-1}]\}$	$\cong(1-t)\exp\left\{\frac{\sigma}{2}(1-t)^{-1}\lvert\ln(1-t)\rvert^\alpha\right\}\lvert\ln(1-t)\rvert^{-\frac{\alpha}{2}}$
$\exp[(1-t)^{-\alpha}]$, $\alpha>0$	$\alpha^{-1/2}(1-t)^{\frac{1+\alpha}{2}}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(1-t)^{-\alpha}\right]$
$\exp\{\exp[(1-t)^{-\alpha}]\}$, $\alpha>0$	$\alpha^{-1/2}(1-t)^{\frac{1+\alpha}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}(1-t)^{-\alpha}\right]\times$ $\times\exp\left\{\frac{\sigma}{2}\exp[1-t)^{-\alpha}]\right\}$

В заключение этого параграфа отметим, что построенная система п. а. р. уравнения (2.1) является полной — конкретный вид п. а. р. определен при произвольных граничных режимах $\psi_\pm(t)$, достаточно «монотонных» для того, чтобы выражение $(\psi_\pm/\psi_\pm')'$ имело предел (конечный или бесконечный) при $t\to+\infty$ или $t\to1^-$.

§ 3. Приближенные автомодельные решения уравнений с нестепенными нелинейностями

Введение. Формальное определение п. а. р. В этом параграфе на основе результатов, полученных в § 2 применительно к уравнению (1.1) с $k(u)=u^\sigma$, построены широкие классы п. а. р. уравнений (1.1) с существенно нестепенными коэффициентами $k(u)$.

Так же, как в § 2, будем рассматривать для уравнения (1.1) краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathbf{A}(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\tag{3.1}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\geqslant0,\quad x\in\mathbf{R}^1_+;\quad u_0\in C(\mathbf{R}^1_+),\tag{3.2}$$

$$k(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}\in C(\mathbf{R}^1_+),\quad \sup u_0<+\infty,\quad \operatorname{mes}\operatorname{supp}u_0<+\infty$$

с одним из граничных режимов

$$u(t,0)=\varkappa_+(t)>0,\ t>0;\ \varkappa_+(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty,\ \varkappa_+\in C^2(\mathbf{R}^1_+);\tag{3.3}$$

$$u(t,0)=\varkappa_-(t)>0,\ t\in(0,1);\quad \varkappa_-(t)\xrightarrow[t\to1^-]{}+\infty,\ \varkappa_-\in C^2(0,1),\tag{3.3'}$$

последний из которых изменяется в режиме с обострением.

Построение п. а. р. будем проводить при некоторых дополнительных ограничениях на функцию k. В частности, считаем, что $k'(u)>0$, $u>0$

и $k(0)=0$, $k(+\infty)=+\infty$. Тогда функция k осуществляет взаимно-однозначное и монотонное отображение $\overline{\mathbf{R}}_+^1 \to \overline{\mathbf{R}}_+^1$. Поэтому определена обратная к k функция k^{-1}: $\overline{\mathbf{R}}_+^1 \to \overline{\mathbf{R}}_+^1$.

Также будем предполагать, что функция

$$\Phi_k(u) = [k(s)/k'(s)]'|_{s=k^{-1}(u)} \tag{3.4}$$

определена при всех $u \geqslant 0$ и имеет конечный, не равный нулю предел при $u \to +\infty$, который для удобства обозначим через $1/\sigma$, $\sigma = \text{const} > 0$, т. е.

$$\lim_{u \to +\infty} \left[\Phi_k(u) - \frac{1}{\sigma}\right] = 0. \tag{3.5}$$

Наиболее общий результат будет получен, когда коэффициент k дополнительно удовлетворяет еще двум условиям:

$$\Phi_k(u) - \frac{1}{\sigma} \geqslant 0, \quad u > 0, \tag{3.6}$$

$$[\Phi_k(u)]' \leqslant 0, \quad u \geqslant A_k = \text{const} > 0. \tag{3.7}$$

Как будет показано ниже, для задачи (3.1)—(3.3′) специального вида от условий (3.6), (3.7) можно отказаться.

В таблице 6 даны некоторые коэффициенты $k(u)$, удовлетворяющие условиям (3.5)—(3.7). Выбор постоянной $\gamma > 0$ в выписанных коэффициентах связан с условием (3.6). Нетрудно убедиться, что, выбирая γ достаточно большой, можно обеспечить его выполнение. Во втором столбце таблицы приведена функция k_0^{-1} — главный член асимптотического разложения функции $k^{-1}(u)$ при $u \to +\infty$, так что

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{k^{-1}(u)}{k_0^{-1}(u)} = 1.$$

В явном виде $k^{-1}(u)$ в рассматриваемых случаях определить нельзя.

Таблица 6

$k(u)$	$k_0^{-1}(u)$
$u^\sigma \ln^{-\alpha} \ln(\gamma + u)$, $\alpha > 0$	$u^{\frac{1}{\sigma}} \ln^{\frac{\alpha}{\sigma}} \ln u$
$u^\sigma \ln^{-\alpha}(\gamma + u)$, $\alpha > 0$	$\sigma^{-\frac{\alpha}{\sigma}} u^{\frac{1}{\sigma}} \ln^{\frac{\alpha}{\sigma}} u$
$u^\sigma \exp[-\ln^\alpha(\gamma + u)]$, $0 < \alpha < 1$	$u^{\frac{1}{\sigma}} \exp[\sigma^{-(\alpha+1)} \ln^\alpha u]$
$u^\sigma \exp\left[-\frac{\ln(\gamma + u)}{\ln^\alpha \ln(\gamma + u)}\right]$, $\alpha > 0$	$u^{\frac{1}{\sigma}} \exp\left[\sigma^{-2} \frac{\ln u}{\ln^\alpha \ln u}\right]$

Мы будем сопоставлять решения задач (3.1)—(3.3), (3.1)—(3.3′) с п. а. р. уравнения (1.5), построенными в § 2. При этом в связи со спецификой доказательства сходимости решения к п. а. р. удается использовать результаты, полученные только в теоремах 2.3—2.6, где выводятся оценки в норме $C(\mathbf{R}_+^1)$ (в теореме 1.2 также получена оценка сходимости в $C(\mathbf{R}_+^1)$, однако там рассматривалась задача в ограниченной области). Напомним, что п. а. р. $u_a(t, x)$ уравнения (1.5), построенные в

теоремах 2.3—2.6, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{C}_\sigma(u_a) + x\frac{\partial u_a}{\partial x}F_\pm(t), \tag{3.8}$$

где функции $F_\pm$ имеют вид

$$F_\pm(t) = \left[\ln\frac{\psi_\pm^l}{\varphi}\right]'(t), \quad l = \frac{\delta+\sigma}{2}, \tag{3.9}$$

и постоянная δ вычисляется по формулам

$$\delta = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)$$

для обычного граничного режима $u_a(t, 0) = \psi_+(t)$, $t>0$,

$$\delta = \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t)$$

для граничного режима с обострением $u_a(t, 0) = \psi_-(t)$, $t\in(0, 1)$. П. а. р. $u_a(t, x)$ уравнения (1.5) имеет в каждом из рассматриваемых случаев вид

$$u_a(t, x) = \psi_\pm(t)\,\theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}. \tag{3.10}$$

Нам будет удобнее вместо (3.8) рассматривать уравнение, которому удовлетворяет функция $U_a(t, x) = u_a^\sigma(t, x)$:

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \mathbf{D}_\sigma(U_a) + x\frac{\partial U_a}{\partial x}F_\pm(t). \tag{3.11}$$

Здесь оператор $\mathbf{D}_\sigma$ имеет вид

$$\mathbf{D}_\sigma(U) = U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2.$$

Проведем теперь необходимые преобразования с уравнением (3.1). Положим $U(t, x) = k(u(t, x))$. Тогда, как нетрудно убедиться, функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \Phi_k(U)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \tag{3.12}$$

и краевому условию $U(t, 0) = k(\varkappa_\pm(t))$.

Учитывая равенство (3.5), перепишем уравнение (3.12) в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{D}_\sigma(U) + \left[\Phi_k(U) - \frac{1}{\sigma}\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2. \tag{3.13}$$

Сопоставление решений уравнений (3.11) и (3.13) будем проводить на основе методики доказательства теорем 2.3—2.6 данной работы. Положим $U(t, x) - U_a(t, x) = z(t, x)$ и выясним, при каких условиях функция $\sup\limits_x|z(t, x)|$ растет «не слишком быстро» при $t\to+\infty$ или $t\to 1^-$. В первую очередь для этого необходимо добиться того, чтобы $z(t, 0) = 0$, т. е. положить

$$\varkappa_\pm(t) = k^{-1}(\psi_\pm^\sigma(t)). \tag{3.14}$$

Из (3.11), (3.13) следует, что функция z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \{\mathbf{D}_\sigma(U) - \mathbf{D}_\sigma(U_a)\} - \\ -\left\{x\frac{\partial U_a}{\partial x}F_\pm(t)\right\} + \left\{\left[\Phi_k(U) - \frac{1}{\sigma}\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right\}. \tag{3.15}$$

В дальнейшем параболическое (относительно функции z) уравнение (3.15) будет анализироваться с помощью принципа максимума. Будут определены условия, при которых

$$\frac{1}{U(t,0)}\|U(t,x) - U_a(t,x)\|_C \to 0 \tag{3.16}$$

при $t\to+\infty$ или $t\to 1^-$. В силу (3.14), а также равенств $U=k(u)$, $U_a=\psi_\pm^\sigma\theta_a^\sigma(\xi)$, (3.16) эквивалентно условию

$$\left\|\frac{k(u(t,\xi\varphi(t)))}{k(\varkappa_\pm(t))} - \theta_a^\sigma(\xi)\right\|_C \to 0. \tag{3.16'}$$

Отсюда непосредственно следует, что при выполнении равенства (3.14) функция

$$\theta(t,\xi) = \left\{\frac{k(u(t,\xi\varphi(t)))}{k(\varkappa_\pm(t))}\right\}^{1/\sigma} \tag{3.17}$$

является автомодельным представлением решения рассматриваемой задачи. Соответствующее п. а. р. уравнение (3.1) имеет вид

$$u_a(t,x) = k^{-1}[\psi_\pm^\sigma(t)\,\theta_a^\sigma(\xi)], \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \tag{3.18}$$

и, как следует из (3.11), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u_a)\frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \left[\frac{1}{\sigma} - \Phi_k(u_a)\right]\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2 + x\frac{\partial u_a}{\partial x}F_\pm(t), \tag{3.19}$$

которое отличается от (3.1) двумя новыми членами в правой части.

Отметим, что для коэффициентов $k(u)$, удовлетворяющих условию (3.5), функция $\varphi(t)$ в (3.18) дает с точностью до постоянного множителя асимптотическое значение глубины проникновения тепловой волны $x_{эф}(t)$.

Будет показано, что в сделанных предположениях при специальном выборе функций $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ имеет место сходимость

$$\|\theta^\sigma(t,\xi) - \theta_a^\sigma(\xi)\|_C \to 0 \tag{3.20}$$

($t\to+\infty$ или $t\to 1^-$), которая с известной степенью точности обеспечивает совпадение асимптотических свойств решения рассматриваемой задачи и п. а. р. (3.18).

1. Приближенные автомодельные решения типа III и IV.

1.1. Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (3.1)—(3.3) с граничным режимом, определенным при всех $t>0$.

Теорема 3.1. *Пусть при некотором $\sigma>0$ выполняются условия* (3.5)—(3.7) *и пусть граничный режим* (3.3) *имеет вид $\varkappa_+(t) = k^{-1}(\psi_+^\sigma(t))$, $t>0$, где функция ψ_+ удовлетворяет условию* (2.34).

Тогда $\varphi(t)$ имеет вид (2.35), *функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи* (2.28), (2.29) *и при $t\to+\infty$ справедливо предельное равенство* (3.20).

Доказательство. Положим $z=U-U_a$. Тогда z удовлетворяет

уравнению (3.15), где разность $\mathbf{D}_\sigma(U)-\mathbf{D}_\sigma(U)$ можно записать в виде

$$\mathbf{D}_\sigma(U)-\mathbf{D}_\sigma(U_a)=U\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U_a}{\partial x}\right).$$

Отсюда в силу принципа максимума получаем $\sup\limits_x z(t,\ x)\leqslant z^+(t)$, $\inf\limits_x z(t,\ x)\geqslant z^-(t)$, где гладкие ограниченные функции $z^\pm$ при больших t удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}\frac{dz^+}{dt}\leqslant z^+\sup_x\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}+|F_+(t)|\sup_x\left|x\frac{\partial U_a}{\partial x}\right|+\\+\sup_x\left[\Phi_k(U(t,\ x(t)))-\frac{1}{\sigma}\right]\sup_x\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2,\end{gathered}\tag{3.21}$$

$$\frac{dz^-}{dt}\geqslant z^-\sup_x\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}-|F_+(t)|\sup_x\left|x\frac{\partial U_a}{\partial x}\right|,\tag{3.22}$$

при выводе которых использовалось условие (3.6). Нетрудно видеть, что в силу (2.35)

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}=\frac{\psi_+^\sigma(t)}{\varphi^2(t)}\frac{d^2\theta_a}{d\xi^2}\leqslant\frac{1}{m}\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)}q_m,\\ \left|x\frac{\partial U_a}{\partial x}\right|=\psi_+^\sigma(t)\left|\xi\frac{d\theta_a}{d\xi}\right|\leqslant\psi_+^\sigma(t)\,p_m,\\ \left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2=\frac{\psi_+^{2\sigma}(t)}{\varphi^2(t)}\left(\frac{d\theta_a}{d\xi}\right)^2\leqslant\frac{1}{m}\psi_+^{\sigma-1}(t)\,\psi_+'(t)\,r_m,\end{gathered}\tag{3.23}$$

где $q_m=\sup(\theta_a^\sigma)''$, $p_m=\sup|\xi\theta_a^{\sigma\prime}|$, $r_m=\sup(\theta_a^{\sigma\prime})^2$.

Рассмотрим теперь последний член в правой части (3.21). Пусть $z^+(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Тогда в силу условий (3.6), (3.7) для достаточно больших t получим оценку

$$\Phi_k(U(t,\ x(t)))-\frac{1}{\sigma}=\Phi_k(U_a(t,\ x(t))+z^+(t))-\frac{1}{\sigma}\leqslant\Phi_k(z^+(t))-\frac{1}{\sigma}.\tag{3.24}$$

С учетом оценок (3.23), (3.24) неравенства (3.21), (3.22) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{dz^+}{dt}\leqslant z^+\frac{q_m}{m}\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)}+p_m\psi_+^\sigma(t)|F_+(t)|+\\+\frac{r_m}{m}\psi_+^{\sigma-1}(t)\,\varphi_+'(t)\left[\Phi_k(z^+(t))-\frac{1}{\sigma}\right],\end{gathered}\tag{3.25}$$

$$\frac{dz^-}{dt}\geqslant z^-\frac{q_m}{m}\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)}-p_m\psi_+^\sigma(t)|F_+(t)|.\tag{3.26}$$

Поскольку $\|\theta(t,\ \xi)-\theta_a(\xi)\|_C\leqslant\psi_+^{-\sigma}(t)\max\{|z_-(t)|,\ z_+(t)\}$ при больших t, для доказательства сходимости достаточно показать, что $(z_+/\psi_+^\sigma)(t)\to\to 0$ и $(z_-/\psi_+^\sigma)(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Проверим первое условие. Пусть $(z_+/\psi_+^\sigma)\to\mu\geqslant 0$ при $t\to+\infty$. Тогда из (3.25) имеем

$$\begin{gathered}\mu=\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{dz^+}{dt}\Big/\sigma\psi_+^{\sigma-1}\psi_+'\right\}\leqslant\frac{q_m}{m\sigma}\mu+\frac{p_m}{\sigma}\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi_+}{\psi_+'}|F_+(t)|+\\+\frac{r_m}{m\sigma}\lim_{t\to+\infty}\left[\Phi_k(z^+(t))-\frac{1}{\sigma}\right]=\frac{q_m}{m\sigma}\mu+I_1+I_2,\end{gathered}\tag{3.27}$$

причем $I_1=0$ в силу условия (2.34) (см. доказательство теоремы 3) и $I_2=0$ в силу (3.5) и предположения о том, что $z^+(t)\to+\infty$, $t\to+\infty$. Тогда из (3.27) получаем $\mu\leqslant(q_m/m\sigma)\mu$ или, что то же самое, $\mu(q_m-m\sigma)\geqslant 0$. Учитывая оценку (3.25), заключаем, что $\mu=0$.

Аналогичным образом анализируется неравенство (3.26). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь один конкретный случай применения теоремы 3.1.

Пример 1. Пусть в уравнении (3.1) $k(u)=u^\sigma/\ln(\gamma+u)$, где $\sigma>0$ и $\gamma>1$ — постоянные, т. е. уравнение (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^\sigma}{\ln(\gamma+u)}\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{3.28}$$

Нас будет интересовать зависимость от времени глубины проникновения тепловой волны, порождаемой граничным режимом

$$u(t,\ 0)=\varkappa_+(t)=t^m\ln^\alpha(2+t),\quad t>0. \tag{3.29}$$

Здесь $m>0$, α — произвольные постоянные.

Заданная функция $k(u)$ удовлетворяет условиям (3.5)—(3.7). Поэтому, следуя теореме 3.1, определим функции $\psi_+(t)$ из равенства (3.14)

$$\psi_+(t)=k^{1/\sigma}[\varkappa_+(t)]\simeq m^{-1/\sigma}t^m\ln^{\alpha-1/\sigma}t,\quad t\to+\infty.$$

Условие (2.34) при этом выполняется. Отсюда в силу теоремы 3.1 заключаем, что в задаче (3.28), (3.29) температурная волна движется при $t\to+\infty$ по закону

$$\varphi(t)=\left\{m\frac{\psi_+^{\sigma+1}(t)}{\psi_+'(t)}\right\}^{1/2}\simeq m^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1+m\sigma}{2}}\ln^{\frac{\alpha\sigma}{2}-1}t.$$

1.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача (3.1)—(3.3′). В этом случае справедливо утверждение, аналогичное теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть при некотором* $\sigma>0$ *выполняются условия* (3.5)—(3.7) *и пусть граничный режим с обострением* (3.3) *имеет вид* $\varkappa_-(t)=k^{-1}(\psi_-^\sigma(t))$, $t\in(0,\ 1)$, *где функция* ψ_- *удовлетворяет условию* (2.48).

Тогда $\varphi(t)$ *имеет вид* (2.49), функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (2.43), (2.44) *и при* $t\to1^-$ *справедливо предельное равенство* (3.20).

Пример 2. Пусть в задаче для уравнения (3.28) граничный режим с обострением имеет вид

$$\varkappa_-(t)=(1-t)^n\ln^\alpha[1+(1-t)^{-1}],\quad t\in(0,\ 1), \tag{3.30}$$

где $n<0$, α — постоянные. В этом случае функция

$$\psi_-(t)=k^{1/\sigma}[\varkappa_-(t)]\simeq(-n)^{-\frac{1}{\sigma}}(1-t)^n\ln^{\alpha-\frac{1}{\sigma}}[(1-t)^{-1}],\quad t\to1^-,$$

удовлетворяет условию (2.48) и поэтому режиму с обострением (3.30) соответствует волна, движущаяся по закону

$$\varphi(t)=\left\{(-n)\frac{\psi_-^{\sigma+1}(t)}{\psi_-'(t)}\right\}^{1/2}\simeq(-n)^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\ln^{\frac{\alpha\sigma}{2}-1}[(1-t)^{-1}]$$

при $t\to1^-$. В частности, при $n=-1/\sigma$ этот закон имеет вид

$$\varphi(t)\simeq\sigma^{1/2}\ln^{\frac{\alpha\sigma}{2}-1}[(1-t)^{-1}],\quad t\to1^-.$$

Отсюда следует, что в случае уравнения (3.28) S-режим распространения тепловой волны, при котором ее глубина проникновения постоянна при $t \to 1^-$ ([2], [3], [18]), порождает граничный закон (см. (3.30) при $n = -1/\sigma$, $\alpha = 2/\sigma$)

$$\varkappa_-(t) = (1-t)^{-1/\sigma} \ln^{2/\sigma}[1 + (1-t)^{-1}), \quad t \in (0, 1).$$

Ниже будет показано, что при специальных граничных режимах с обострением $\varkappa_-(t)$ теорему 3.2 можно доказать при более слабых, чем (3.6), (3.7), ограничениях на коэффициент k.

Пусть функция k удовлетворяет условию (3.5) и неравенству

$$\eta_k = \sup_{s \in \mathbf{R}^1_+} \left| \Phi_k(s) - \frac{1}{\sigma} \right| < 1. \tag{3.31}$$

Условиям (3.5), (3.31) удовлетворяют коэффициенты $k(u)$ из таблицы 6, а также коэффициенты, указанные в таблице 7. При этом постоянную $\gamma > 1$ следует выбирать достаточно большой.

Таблица 7

$k(u)$	$k_0^{-1}(u)$
$u^\sigma \ln^\alpha \ln(\gamma + u)$, $\alpha > 0$	$u^{\frac{1}{\sigma}} \ln^{-\frac{\alpha}{\sigma}} \ln u$
$u^\sigma \ln^\alpha (\gamma + u)$, $\alpha > 0$	$\sigma^{\frac{1}{\sigma}} u^{\frac{1}{\sigma}} \ln^{-\frac{\alpha}{\sigma}} u$
$u^\sigma \exp[\ln^\alpha(\gamma + u)]$, $0 < \alpha < 1$	$u^{\frac{1}{\sigma}} \exp[-\sigma^{-(\alpha+1)} \ln^\alpha u]$
$u^\sigma \exp\left[\frac{\ln(\gamma + u)}{\ln^\alpha \ln(\gamma + u)}\right]$, $\alpha > 0$	$u^{\frac{1}{\sigma}} \exp\left[-\sigma^{-2} \frac{\ln u}{\ln^\alpha \ln u}\right]$

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega(u) = \sup_{s \in (0, u)} \left| \Phi_k(s) - \frac{1}{\sigma} \right| s. \tag{3.32}$$

Нетрудно видеть, что в силу (3.5)

$$\frac{\omega(u)}{u} \to 0, \quad u \to +\infty. \tag{3.33}$$

Теорема 3.3. *Пусть при некотором $\sigma > 0$ выполняются условия (3.5), (3.31) и пусть граничный режим с обострением (3.3′) имеет вид $\varkappa_-(t) = k^{-1}(\psi_-^\sigma(t))$, $t \in (0, 1)$, где функция ψ_- удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t) \to -\sigma, \quad t \to 1^-. \tag{3.34}$$

Тогда $\varphi(t)$ имеет вид (2.49), функция $\theta_a(\xi)$ вычисляется по формуле (2.46) и справедлива следующая оценка скорости сходимости решения задачи (3.1)—(3.3′) к п. а. р. (3.18):

$$\|\theta^\sigma(t, \xi) - \theta_a^\sigma(\xi)\|_C = O\left\{\psi_-^{\nu-\sigma}(t) \max\left[\int_0^t \psi_-^{\sigma-\nu}(\tau) \left|\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}\right| d\tau, \right.\right.$$
$$\left.\left. \int_0^t \psi_-^{-\nu-1}(\tau) \psi_-'(\tau) \omega[\psi_-^\sigma(\tau)] d\tau\right]\right\} \xrightarrow[t \to 1^-]{} 0, \tag{3.35}$$

где $\nu=\sigma(\sigma+2\eta_k)/(\sigma+2)<\sigma$ *и функция* ω *имеет вид* (3.32).

Доказательство. Из уравнения (3.15) в результате применения принципа максимума получаем, что $\sup\limits_x |z(t, x)| \leqslant z_0(t)$, где гладкая ограниченная функция z_0 удовлетворяет при $t\to 1^-$ неравенству

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant z_0 \sup_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |F_+(t)| \sup_x \left| x \frac{\partial U_a}{\partial x} \right| + \\ + \sup_x \left| \Phi_k(U(t, x(t))) - \frac{1}{\sigma} \right| \left[\frac{\partial U_a}{\partial x}(t, x(t)) \right]^2,$$

Здесь $F_+(t) = -\varphi'(t)/\varphi(t)$ (см. (3.9) при $\delta=-\sigma$). Далее, имеем $U_a(t,x) = \psi_+^\sigma(t)\theta_a^\sigma(x/\varphi(t))$, где функция $\theta_a(\xi)$ представима в явном виде (см. (2.46)). Отсюда в силу (2.49)

$$\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} = \frac{\psi_+^\sigma(t)}{\varphi^2(t)} \frac{d^2\theta_a^\sigma}{d\xi^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma+2} \frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)},$$

$$\left| x \frac{\partial U_a}{\partial x} \right| = \psi_+^\sigma(t) \left| \xi \frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \right| \leqslant \frac{1}{2} \psi_+^\sigma(t).$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что функция $\theta_a(\xi)$ удовлетворяет тождеству

$$\left(\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \right)^2 (\xi) = \frac{2\sigma}{\sigma+2} \theta_a^\sigma(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1. \tag{3.36}$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial U_a}{\partial x} \right)^2 = \frac{\psi_+^{2\sigma}(t)}{\varphi^2(t)} \left(\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \right)^2 = \frac{2\sigma^2}{\sigma+2} \frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)} U_a. \tag{3.37}$$

Поскольку $z_0(t) \geqslant |U(t, x(t)) - U_a(t, x(t))| \geqslant U_a(t, x(t)) - U(t, x(t))$, т. е. $U_a(t, x(t)) \leqslant z_0(t) + U(t, x(t))$, из (3.37) получим

$$\left(\frac{\partial U_a}{\partial x} \right)^2 (t, x(t)) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma+2} \frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)} U(t, x(t)) + \frac{2\sigma^2}{\sigma+2} \frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)} z_0(t).$$

С учетом полученных оценок неравенство для функции z_0 запишется следующим образом:

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma+2} \frac{\psi_+'}{\psi_+} z_0 + \frac{1}{2} \psi_+^\sigma |F_+| + \sup_x \frac{2\sigma^2}{\sigma+2} \left| \Phi_k(U) - \frac{1}{\sigma} \right| U \frac{\psi_+'}{\psi_+} + \\ + \sup_x \frac{2\sigma^2}{\sigma+2} \left| \Phi_k(U) - \frac{1}{\sigma} \right| \frac{\psi_+'}{\psi_+} z_0. \tag{3.38}$$

Нетрудно видеть, что при t, близких к 1,

$$\left| \Phi_k(U) - \frac{1}{\sigma} \right| U \leqslant \omega[\psi_+^\sigma(t)].$$

Кроме того, в силу (3.31)

$$\left| \Phi_k(U) - \frac{1}{\sigma} \right| \leqslant \eta_k.$$

Поэтому из (3.38) выводим неравенство

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant \nu \frac{\psi_+'}{\psi_+} z_0 + \frac{1}{2} \psi_+^\sigma |F_+| + \frac{2\sigma^2}{\sigma+2} \frac{\psi_+'}{\psi_+} \omega[\psi_+^\sigma],$$

где $\nu=\sigma(\sigma+2\eta_k)/(\sigma+2)$, причем $\nu<\sigma$ в силу (3.31). Из последнего не-

равенства получаем при $t\to 1^-$ оценку

$$z_0(t) = O\left\{\psi_-^{\nu}(t)\int_0^t \psi_-^{\sigma-\nu}(\tau)\,|F_+(\tau)|\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \psi_-^{\nu}(t)\int_0^t \psi_-^{-\nu-1}(\tau)\,\psi_-'(\tau)\,\omega\,[\psi_-^{\sigma}(\tau)]\,d\tau.\right.$$

Поскольку $\|\theta^\sigma - \theta_a{}^\sigma\|_C \leqslant \psi_-^{-\sigma}(t)\,z_0(t)$ при всех t, близких к 1, для доказательства сходимости $\theta^\sigma \to \theta_a{}^\sigma$, $t\to 1^-$, достаточно показать, что

$$\psi_-^{\nu-\sigma}(t)\int_0^t \psi_-^{\sigma-\nu}(\tau)\,|F_+(\tau)|\,d\tau +$$

$$+ \psi_-^{\nu-\sigma}(t)\int_0^t \psi_-^{-\nu-1}(\tau)\,\psi_-'(\tau)\,\omega\,[\psi_-^{\sigma}(\tau)]\,d\tau = I_1(t) + I_2(t) \to 0$$

при $t\to 1^-$. Раскрывая неопределенность в выражении $I_1(t)$, имеем

$$\lim_{t\to 1^-} I_1(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{(\sigma-\nu)}\left(\frac{\psi_-|\varphi'|}{\varphi\psi_-'}\right)(t) =$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\frac{1}{(\sigma-\nu)}\left[\psi_-^{-\sigma}\left(\frac{\psi_-^{\sigma+1}}{\psi_-'}\right)'\right](t) = \frac{1}{(\sigma-\nu)}\left[\sigma + \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right)'(t)\right].$$

Отсюда в силу (3.34) $I(1^-)=0$. Раскрыв неопределенность в выражении $I_2(t)$, получим

$$\lim_{t\to 1^-} I_2(t) = \frac{1}{(\sigma-\nu)}\lim_{t\to 1^-}\frac{\omega\,[\psi_-^{\sigma}(t)]}{\psi_-^{\sigma}(t)} = \frac{1}{(\sigma-\nu)}\lim_{s\to+\infty}\frac{\omega(s)}{s}.$$

Поэтому из (3.33) заключаем, что $I_2(1^-)=0$. Итак, $\theta^\sigma\to\theta_a{}^\sigma$ при $t\to 1^-$, причем справедлива оценка сходимости (3.35). Теорема доказана.

Пример 3. Пусть уравнение (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \ln^2(\gamma+u)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{3.39}$$

Рассмотрим воздействия граничного режима с обострением

$$u(t,0) = \varkappa_-(t) = (1-t)^{-1/\sigma}\ln^\alpha(1+(1-t)^{-1}], \quad t\in(0,1),$$

где α — постоянная.

Функция k в (3.39) удовлетворяет предположениям теоремы 3.3 (см. таблицу 7). Из (3.14) определим функцию ψ_-:

$$\psi_-(t) = k^{1/\sigma}[\varkappa_-(t)] \simeq \frac{1}{\sigma^{2/\sigma}}(1-t)^{-1/\sigma}\ln^{\alpha+2/\sigma}[(1-t)^{-1}], \quad t\to 1^-.$$

Она удовлетворяет условию (3.34). Поэтому в силу теоремы 3.3 глубина проникновения тепловой волны изменяется при $t\to 1^-$ по закону

$$\varphi(t) = \left\{\frac{1}{\sigma}\frac{\psi_-^{\sigma+1}(t)}{\psi_-'(t)}\right\}^{1/2} \simeq \frac{1}{\sigma^2}\ln^{2+\alpha\sigma}[(1-t)^{-1}].$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\alpha > -2/\sigma$ волна проникает как угодно далеко (HS-режим), если $\alpha < -2/\sigma$, то глубина ее проникновения сокращается вплоть до нуля (LS-режим), и, наконец, в случае $\alpha = -2/\sigma$ реализуется S-режим — глубина проникновения волны стабилизируется при $t\to 1^-$, причем $x_{\text{эф}}(1^-) > 0$.

Замечание. Узловым моментом доказательства теоремы 3.3 и тем, что отличает его от доказательства предыдущей теоремы, является применение тождества (3.36) (такая же техника использовалась в [39], [40]). Нетрудно видеть, что в аналогичных целях можно использовать неравенство

$$\left[\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi}(\xi)\right]^2 \leqslant C_0\theta_a^\sigma(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1, \tag{3.40}$$

где $C_0>0$ — постоянная. Проверим, можно ли на этом пути доказать теорему 3.3 для более общих граничных режимов $\varkappa_-(t)=k^{-1}(\psi_-^\sigma(t))$, где ψ_- — удовлетворяет условию (2.48), которые рассматривались в теореме 3.2 для более узкого класса коэффициентов $k(u)$. Легко убедиться, что решение задачи (2.43), (2.44) при $n<-1/\sigma$ в принципе не может удовлетворять неравенствам типа (3.40), поскольку $(\theta_a^\sigma)'(\xi_0)\neq 0$, а $\theta_a^\sigma(\xi_0)=0$ (здесь $\xi_0=\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a<+\infty$). Напротив, при $n\in(-1/\sigma, 0)$ оценка (3.40) имеет место. Для этого достаточно сопоставить асимптотики функций $(\theta_a^\sigma)'$ и θ_a^σ при $\xi\to+\infty$ (однако в этом случае постоянная C_0 не вычисляется в явном виде).

Таким образом, теорема 3.3 верна не только при выполнении условия (3.34), но и для более общих граничных режимов ψ_- таких, что

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t)\to\frac{1}{n}, \quad t\to 1^-; \quad n=\text{const}\in\left(-\frac{1}{\sigma}, 0\right).$$

При этом необходимо вместо (3.31) потребовать выполнения неравенства

$$\eta_k=\sup_{s\in\mathbf{R}_+^1}\left|\Phi_k(s)-\frac{1}{\sigma}\right|<-\frac{q_n+n\sigma}{C_0},$$

где $q_n<(-n)\sigma$ вычисляется по формуле (2.47).

2. Приближенные автомодельные решения типа V.

2.1. Граничный режим без обострения. В следующем утверждении построены п. а. р. задачи (3.1)—(3.3). Оно доказывается так же, как теорема 3.1.

Теорема 3.4. *Пусть при некотором* $\sigma>0$ *выполняются условия* (3.5)—(3.7) *и пусть граничный режим* (3.3) *имеет вид* $\varkappa_+(t)=k^{-1}(\psi_+^\sigma(t))$, $t>0$, *где функция* ψ_+ *удовлетворяет условию* (2.58).

Тогда $\varphi(t)$ *имеет вид* (2.59), *функция* $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (2.55), (2.56) *и при* $t\to+\infty$ *выполняется предельное равенство* (3.20).

Пример 4. Пусть в задаче (3.28), (3.2), (3.3)

$$\varkappa_+(t)=\exp[(1+t)^m], \quad t>0,$$

где $m>0$ — постоянная. Тогда

$$\psi_+(t)=k^{1/\sigma}(\varkappa_+(t))=(1+t)^{-m/\sigma}\exp[(1+t)^m]$$

при $t\to+\infty$. Эта функция удовлетворяет условию (2.58). Поэтому в силу теоремы 3.4 закон движения полуширины тепловой волны при больших t имеет вид

$$\varphi(t)=\left\{\frac{\psi_+^{\sigma+1}(t)}{\psi_+'(t)}\right\}^{1/2}\simeq m^{-1/2}t^{(1-2m)/2}\exp\left[\frac{\sigma}{2}t^m\right].$$

2.2. Граничный режим с обострением. Ниже рассматривается задача (3.1)—(3.3′).

Теорема 3.5. *Пусть при некотором* $\sigma>0$ *выполняются условия* (3.5)—(3.7) *и пусть граничный режим* (3.3′) *имеет вид* $\varkappa_-(t)=k^{-1}(\psi_-^{\sigma}(t))$, $t\in(0,1)$, *где функция* ψ_- *удовлетворяет условию* (2.62).

Тогда $\varphi(t)$ *имеет вид* (2.63), *функция* $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (2.55), (2.56) *и при* $t\to1^-$ *выполняется предельное равенство* (3.20).

Пример 5. Пусть в задаче (3.28), (3.2), (3.3′)

$$\varkappa_-(t)=\exp[(1-t)^n],\quad t\in(0,1),$$

где $n<0$ — постоянная. В этом случае функция

$$\psi_-(t)=k^{1/\sigma}(\varkappa_-(t))=(1-t)^{-n/\sigma}\exp[(1-t)^n]$$

удовлетворяет условию (2.62), и тогда из теоремы 3.5 следует, что глубина проникновения тепловой волны при $t\to1^-$ оценивается по формуле

$$\varphi(t)=\left[\frac{\psi_-^{\sigma+1}(t)}{\psi_-'(t)}\right]\simeq(-n)^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1-2n}{2}}\exp\left[\frac{\sigma}{2}(1-t)^n\right].$$

Литература

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— ПМТФ, 1977, № 1, с. 3—23.
3. *Курдюмов С. П.* Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением: Дисс. на соиск. ученой степени докт. физ.-мат. наук: М.: Инст. прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1979.
4. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В сб., посвященном семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. М.: АН СССР, 1950.
5. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, с. 67—78.
6. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестационарной фильтрации газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 6, с. 761—763.
7. *Баренблатт Г. И.* Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 6, с. 739—742.
8. *Баренблатт Г. И.* О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 4, с. 409—414.
9. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности — ДАН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492—495.
10. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн.— ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 4, с. 703—719.
11. *Marshak R. E.* Effect of radiation on shock wave behaviour.— Phys. Fluids, 1958, v. 1, p. 24—29.
12. *Pattle R. E.* Diffusion from an instantaneous point source with concentration dependent coefficient.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1959, v. 12, p. 407—409.
13. *Serrin J.* Asymptotic behaviour of velocity profilts in the Prandtl boundary layer theory.— Proc. Roy. Soc., 1967, A209, p. 491—507.
14. *Atkinson F. V., Peletitr L. A.* Similarity profiles of flows through porous media.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1971, v. 42, p. 369—379.
15. *Peletier L. A.* Asymptotic behaviour of solutions of the porous media equation.— SIAM J. Appl. Math., 1971, v. 21, p. 542—551.
16. *Craven A. H., Peletier L. A.* Similarity solutions for degenerate quasilinear parabolic equations.— J. Math. Anal. Appl., 1972, v. 38, p. 73—81.
17. *Atkinson F. V., Peletier L. A.* Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1974, v. 54, p. 373—392.
18. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.
19. *Gilding B. H., Peletier L. A.* On a class of similarity solutions of the porous media equation.— J. Math. Anal. Appl., 1976, v. 55, p. 351—364.
20. *Gilding B. H., Peletier L. A.* On a class of similarity solutions of the porous media equation. II.— J. Math. Anal. Appl., 1977, v. 57, p. 522—538.
21. *Галактионов В. А., Михайлов А. П.* Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ АН СССР, № 53, М.: ИПМ, 1977.

22. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте. Препринт ИПМ АН СССР, № 103, М.: ИПМ, 1977.
23. *Pimbley G. H.* Wave solutions travelling along quadratic path for the equation $(\partial u/\partial t)-(k(u)u_x)_x=0$.— Quart. Appl. Math., 1977, v. 35, p. 129—138.
24. *Duyn C. J., van, Peletier L. A.* Asymptotic behaviour of solutions of a nonlinear diffusion equation.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1977, v. 65, p. 363—377.
25. *Gilding B. H.* Stabilization of flows through porous media.— SIAM J. Math. Anal., 1979, v. 10, p. 237—246.
26. *Babu D. K., Genuchten M. Th., van.* A similarity solution to a nonlinear diffusion equation of the singular type; a uniform valid solution by perturbation.— Quart. Appl. Math., 1979, v. 37, p. 11—21.
27. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности.— Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1196—1204.
28. *Баренблатт Г. И., Вишик М. И.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, с. 411—417.
29. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юйлинь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР, Сер. матем., 1958, т. 22, № 5, с. 667—704.
30. *Сабинина Е. С.* Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 4, с. 794—797.
31. *Калашников А. С.* О возникновении особенностей у решений уравнений нестационарной фильтрации.— ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 2, с. 440—443.
32. *Aronson D. G.* Regularity properties of flows through porous media.— SIAM J. Appl. Math., 1969, v. 17, c. 461—467.
33. *Aronson D. G.* Regularity properties of flows through porous media: a counterexample.— SIAM J. Appl. Math., 1970, v. 19, p. 299—307.
34. *Aronson D. G.* Regularity properties of flows through porous media: the interface.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1970, v. 37, p. 1—10.
35. *Калашников А. С.* Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений.— Вестник МГУ, Сер. матем., мех., 1972, № 6, с. 45—49.
36. *Калашников А. С.* О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры.— ЖВМ и МФ, 1976, № 3, с. 689—697.
37. *Knerr B. F.* The porous medium eqaution in one dimension.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, v. 249, p. 381—415.
38. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифф. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
39. *Галактионов В. А.* О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности.— Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1660—1676.
40. *Галактионов В. А.* Приближенные автомодельные решения уравнений типа нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ АН СССР, № 106, М.: ИПМ, 1980.
41. *Kamin S.* Similar solutions and the asymptotics of filtration equations.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1976, v. 60, p. 171—183.
42. *Friedman A., Kamin S.* The asymptotic behaviour of gas in an n-dimensional porous medium.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 262, p. 551—263.
43. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1451—1461.
44. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной. Препринт ИПМ АН СССР. № 21, М.: ИПМ, 1979.
45. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О сравнении решений параболических уравнений.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 3, с. 586—589.
46. *Галактионов В. А.* Условия ψ-критичности и методы сравнения решений параболических уравнений. Препринт ИПМ АН СССР, № 151, М.: ИПМ, 1979.
47. *Галактионов В. А.* Два метода сравнения решений параболических уравнений.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 832—835.
48. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ АН СССР. № 181, М.: ИПМ, 1979.
49. *Галактионов В. А.* Приближенные автомодельные решения уравнения теплопроводности.— ДАН СССР, 1982.
50. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью. Препринт ИПМ АН СССР, № 28, М.: ИПМ, 1979.
51. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами.— ДАН СССР, 1979, № 2, т. 247, с. 349—353.
52. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1981, т. CLVIII, с. 153—162.
53. *Sattinger D. H.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems.— Indiana Univ. Math. J., 1972, v. 21, p. 979—1000.
54. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

55. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* Условие усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР, № 106, М.: ИПМ, 1977.
56. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
57. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836—839.
58. *Bluman G., Kumei S.* On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)]-(\partial u/\partial t)=0$.— J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 1019—1023.
59. *Munier A., Burgan J. R., Gutierrez J., Fijalkow E., Feix M. R.* Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation.— SIAM J. Appl. Math., 1981, vol. 40, p. 191—207.
60. *Caffarelli L. A., Friedman A.* Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium.— Amer. J. Math., 1979, v. 101, p. 1193—1218.
61. *Caffarelli L. A., Friedman A.* Regularity of the free boundary of a gas flow in an n-dimensional porous medium.— Indiana Univ. Math. J., 1980, v. 29, p. 361—391.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию
21.1.1982