УДК 517.949.2

Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях

Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А.

1. Введение

В случае краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (см. [1], [2]) проведено детальное изучение скорости сходимости однородных разностных схем и построены точные схемы и схемы любого порядка точности для случая негладких решений. Однако методы исследования, позволявшие получать весьма тонкие априорные оценки и теоремы о сходимости, не удалось перенести на многомерный случай.

В традиционном подходе к исследованию скорости сходимости разностных схем методом энергетических неравенств имеются два слабых места: во-первых, это анализ погрешности аппроксимации при помощи классической формулы Тейлора, что приводит к завышенным требованиям на гладкость искомого решения; во-вторых, это отсутствие аппарата получения неулучшаемых оценок погрешности в более слабых нормах на негладких решениях. С точки зрения теории и практики разностных методов большой интерес представляют такие оценки скорости сходимости, в которых порядок скорости сходимости согласован с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи.

Оценку скорости сходимости разностной схемы назовем согласованной с гладкостью искомого решения, если она имеет вид

$$\|y-u\|_{W_2^s(\omega)} \leqslant M|h|^{k-s}\|u\|_{W_2^k(\Omega)}, \quad k>s, \tag{1}$$

где k, s — целые неотрицательные числа, $\|\cdot\|_{W_2^s(\omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^k(\Omega)}$ — соболевские нормы на множестве функций дискретного и непрерывного аргумента соответственно.

Целесообразность такого определения можно аргументировать следующими соображениями: а) постановка дифференциальной задачи в классах $W_2^k(\Omega)$ является естественной; б) оценки такого рода характерны для метода конечных элементов (см. [3], [4]); в этом случае в левой части (1) стоит $W_2^s(\Omega)$ — норма в пространстве непрерывных функций, число $k-1$ обозначает степень полиномиальных восполнений дискретных функций, а s не превосходит половину порядка дифференциального уравнения. В некоторых случаях эти оценки являются неулучшаемыми. Получению согласованных априорных оценок вида (1) и оценке скорости сходимости разностных схем к обобщенным решениям эллиптических и параболических уравнений и посвящена данная работа. При этом используются разрешающий оператор точных разностных схем [1], [2], [5] и лемма Брамбла — Гильберта [4].

Для разностной схемы оценки вида (1) с $s=1$, $k=2{,}3$ были получены для первой краевой задачи для уравнения Пуассона и уравнений Ляме теории упругости в работах [6], [7]. С потерей половины порядка $(O(|h|^{k-s-0,5}))$ такие оценки получены в [8] для разностных схем для уравнений четвертого порядка с $s=2$, $k=3$, 4 и в [9] для собственных чисел для уравнений второго порядка с $k=2$.

Во всех этих работах исследование сходимости проводится в естественных энергетических нормах разностного оператора и используются классические априорные оценки для разностных решений (см. [10]). Для исследования сходимости разностной схемы в более слабых (чем энергетические) нормах решающую роль сыграли разрешающие операторы точных разностных схем. Здесь существенно используется математический аппарат, разработанный в работе [5].

Сходимость разностной схемы в норме $L_2(\omega)$ для уравнения $\Delta u = -f(x, u)$ в прямоугольнике рассматривалась в работах [11], [12]. В [11] для случая $f(x, u)=-cu+\bar{f}(x)$, $c=\text{const}\geqslant 0$ построена девятиточечная разностная схема, точность которой в зависимости от гладкого искомого решения характеризуется оценкой (1) с $s=0$, $k=2$, 3, 4. В [12] рассматривается случай, когда правая часть $f(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u. Доказана оценка (1) с $s=0$, $k=2$, если постоянная Липшица достаточно мала.

2. Вспомогательные обозначения. Свойства разрешающих операторов точных разностных схем

Пусть $\Omega=\{x=(x_1, x_2)\colon\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ l_\alpha>0,\ \alpha=1, 2\}$ — прямоугольник с границей Г. В Ω введем неравномерную сетку $\hat{\omega}=\hat{\omega}_1\times\hat{\omega}_2$, $\hat{\omega}_\alpha=\{x_\alpha=x_{\alpha i_\alpha},\ i_\alpha=1, 2, \ldots, N_\alpha-1\}$, $x_{\alpha i_\alpha}-x_{\alpha i_\alpha-1}=h_{\alpha i_\alpha}$, $\alpha=1, 2$, $h=h_{\alpha i_\alpha}$, $h^+=h_{\alpha i_\alpha+1}$, $\hbar=0{,}5\ (h+h^+)$.

Равномерную сетку будем обозначать через ω, причем

$$\omega=\omega_1\times\omega_2,\quad \omega_\alpha=\{x_\alpha=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=1, 2, \ldots, N_\alpha-1,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha\},\quad \alpha=1, 2.$$

Через γ обозначим сеточные узлы, лежащие на границе Г, за исключением вершин прямоугольника. В дальнейшем используем стандартные обозначения для норм соболевских пространств $W_2^k(\Omega)$ функций, определенных на Ω (см. [13]). Аналоги норм для функций, заданных на сетке ω, будем обозначать через $W_2^k(\omega)$ (см. [10]). Всюду ниже M обозначает положительные постоянные, которые не зависят от шага сетки h, от решений исходной задачи и от разностной схемы. Разрешающие операторы точных разностных схем $\hat{T}^x$ на неравномерной сетке определяются следующей формулой (см. [11], [8]):

$$\hat{T}^x(W(\cdot))=\frac{\hbar^{-1}h}{\alpha(0, h)}\int_{-1}^{0}\alpha(s, h)\,w^*(s)\,ds+\frac{\hbar^{-1}h^+}{\beta(0, h^+)}\int_{0}^{1}\beta(s, h^+)\,w^*(s)\,ds,$$

$$w^*(s)=\begin{cases} w(x+sh), & -1\leqslant s\leqslant 0,\\ w(x+sh^+), & 0\leqslant s\leqslant 1,\end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha(s, h)=hv_1(x)$, $\beta(s, h^+)=h^+v_2(x)$ — шаблонные функции, связанные с дифференциальным оператором

$$L^{(k,q)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u, \tag{3}$$

$$0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2,\ k(x) \in L_1(0, 1), \quad q(x) \geqslant 0,\ q(x) \in L_p(0, 1),\ p \geqslant 1. \tag{3'}$$

Для случая равномерной сетки мы будем их обозначать через T^x. При воздействии разрешающим оператором на функцию двух переменных x_1 и x_2, чтобы указать переменную, по которой он действует, будем снабжать его дополнительным индексом. Так,

$$\hat{T}^{x_1}(u) = \hat{T}^{x_1}(u(\cdot, x_2)), \quad \hat{T}^{x_2}(u) = \hat{T}^{x_2}(u(x_1, \cdot)).$$

Обозначим через T_α^2 оператор T^{x_α} для случая $k = k_\alpha(x_\alpha) \equiv 1$, $q = q_\alpha(x_\alpha) \equiv 0$. Тогда, как нетрудно видеть, он определяется формулой

$$T_1^2(u) = T_1^2(u(\cdot, x_2)) = \frac{1}{h_1^2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}(\xi - x_1 + h_1)\,u(\xi, x_2)\,d\xi + \frac{1}{h_1^2}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}(x_1 + h_1 - \xi)\,u(\xi, x_2)\,d\xi$$

(аналогично определяется оператор T_2^2) и совпадает с квадратом оператора T_1 усреднения по Стеклову

$$T_1(u) = T_1(u(\cdot, x_2)) = \frac{1}{h_1}\int\limits_{x_1-0{,}5h_1}^{x_1+0{,}5h_1} u(\xi, x_2)\,d\xi.$$

При $k = k_\alpha(x_\alpha)$, $q = q_\alpha(x_\alpha)$ будем полагать

$$L^{(k,q)}u = L_\alpha u, \quad \alpha = 1{,}2.$$

Пусть для оператора L_α выполнены условия (3′). Тогда шаблонные функции $\alpha_i(s, h_i)$ и $\beta_i(s, h_i^+)$ являются монотонными по s ($\alpha_i(s, h_i)$ — монотонно возрастающая, $\beta_i(s, h_i^+)$ — монотонно убывающая при $s \in (-1,1)$, $i = 1,2$) и справедливы оценки

$$|\hat{T}^{x_1}(w)| \leqslant \hbar_1^{-1}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1^+}|w(\xi, x_2)|\,d\xi, \quad |\hat{T}^{x_2}(w) \leqslant \hbar_2^{-1}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2^+}|w(x_1, \xi)|\,d\xi. \tag{4}$$

Одно из основных свойств разрешающих операторов точных разностных схем заключено в следующем равенстве:

$$\hat{T}^{x_\alpha}(L_\alpha u) = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - d_\alpha u \equiv \Lambda_\alpha u, \quad x_\alpha \in \omega_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \tag{5}$$

где a_α и d_α определяются по формулам

$$a_i = a_i(x_i) = [\alpha_i(0, h_i)]^{-1}, \quad d_i = d_i(x_i) = \hat{T}^{x_i}(q_i(\cdot)).$$

Приведем еще выражение для $\hat{T}^x(1)$, которое нам понадобится в дальнейшем:

$$\hat{T}^x(1) = \frac{\hbar^{-1}h}{\alpha(0, h)}\int\limits_{-1}^{0}\alpha(s, h)\,ds + \frac{\hbar^{-1}h^+}{\beta(0, h^+)}\int\limits_{0}^{1}\beta(s, h^+)\,ds.$$

3. Сходимость разностных схем на решениях из $W_2^1(\Omega)$

Рассмотрим следующую эллиптическую задачу, дифференциальный оператор которой является оператором с разделяющимися переменными:

$$Lu = L_1 u + L_2 u = -f(x), \quad x \in \Omega, \ u(x) = 0, \ x \in \Gamma,$$
$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x_\alpha)\, u, \quad \alpha = 1, 2. \tag{6}$$

Задачу (6) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$\Lambda y \equiv (b_2\Lambda_1 + b_1\Lambda_2)\, y = -T^{x_1}T^{x_2}f = \varphi(x), \quad x \in \omega,$$
$$y(x) = 0, \ x \in \gamma, \quad b_\alpha = T^{x_\alpha}(1), \ \alpha = 1, 2, \tag{7}$$

где T^{x_α} — разрешающий оператор точной разностной схемы в направлении x_α определяется по формуле (2), а разностные операторы Λ_α определяются формулой (5). Отметим, что справедливо равенство $T^{x_1}T^{x_2} = T^{x_2}T^{x_1}$.

Покажем, что если решение задачи (6) из класса $W_2^1(\Omega)$, то имеет место аналог оценки (1) с $s=0$ и $k=1$. Специфика этой оценки в том, что решение $u(x)$ как функция из W_2^1 может быть не определено в узлах сетки. Поэтому мы будем сравнивать сеточное решение $y(x)$ с некоторым усреднением $\bar{u}(x)$ решения $u(x)$ в окрестности узла $x \in \omega$. Из разных возможностей мы выберем самые простые. В дальнейшем будем считать, что $\bar{u}(x)$ определяется следующим образом:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} T_1T_2u(x), & x \in \omega, \\ 0, & x \in \gamma \end{cases} \quad \text{или} \quad \bar{u}(x) = \begin{cases} T_1^2T_2^2u(x), & x \in \omega, \\ 0, & x \in \gamma. \end{cases}$$

Ниже оценивается сходимость разностных схем (7) на решениях исходной задачи (6) из класса $W_2^1(\Omega)$. Предположим, что относительно коэффициентов задачи (6) выполнены условия:

$$0 < c_1 \leqslant k_\alpha \leqslant c_2, \ k_\alpha(x_\alpha) \in L_1(\Omega), \ q_\alpha(x_\alpha) \geqslant 0, \ q_\alpha \in L_p(\Omega), \ p > 1, \ \alpha = 1, 2,$$
$$f(x) = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial f_\alpha(x)}{\gamma x_\alpha} + f_0(x), \ f_\alpha(x) \in L_2(\Omega), \quad \alpha = 1, 2, \ f_0(x) \in L_{2+\varepsilon}(\Omega), \quad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

которые обеспечивают принадлежность решения $u(x)$ к классу $W_2^1(\Omega)$ (см. [13]). Имеет место следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия* (8), *то разностная схема* (7) *имеет первый порядок точности в* $L_2(\omega)$ *и верна оценка*

$$\|y - \bar{u}\|_{L_2(\omega)} \leqslant M|h|\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{9}$$

где постоянная M *не зависит от* h *и решения* $u(x)$.

Остановимся на основных моментах доказательства. Для функции $z = y - \bar{u}$ получим следующую разностную задачу:

$$\Lambda z = -\Psi(x), \quad x \in \omega, \quad z(x) = 0, \ x \in \gamma,$$

где погрешность аппроксимации $\Psi(x)$ представляется в виде

$$\Psi(x)=\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha\eta_\alpha,\qquad \eta_\alpha=T^{x_{3-\alpha}}(u)-b_{3-\alpha}\bar{u},\quad \alpha=1,2.$$

Легко убедиться, что операторы $-b_\alpha^{-1}\Lambda_\alpha$, $\alpha=1, 2$, перестановочны, а также симметричны и положительны в смысле скалярного произведения с весом b_1b_2. Развивая общий операторный подход из [11], получим оценки

$$\|(b_1^{-1}\Lambda_1+b_2^{-1}\Lambda_2)^{-1}\, b_{3-\alpha}\Lambda_\alpha\|\leqslant 1,\quad \alpha=1, 2,$$

которые приводят к неравенству

$$\|\sqrt{b_1b_2}\,z\|_{L_2(\omega)}\leqslant\sum_{\alpha=1}^{2}\|\sqrt{b_1b_2}\,\eta_\alpha\|_{L_2(\omega)}.$$

Отсюда, учитывая свойства шаблонных функций и структуру операторов T^{x_α}, получаем

$$\|z\|_{L_2(\omega)}\leqslant M\sum_{\alpha=1}^{2}\|\eta_\alpha\|_{L_2(\omega)}. \tag{10}$$

Выражения η_α, $\alpha=1, 2$, являются линейными ограниченными в пространстве $W_2^1(\Omega)$ функционалами, которые обращаются в нуль на константах. Применяя лемму Брамбла — Гильберта [4], получим искомую оценку (9).

Замечание 1. Оценка (9) остается справедливой и для разностной схемы, построенной на произвольной неравномерной сетке в прямоугольнике Ω.

Замечание 2. Аналогичная теорема имеет место и для квазилинейных уравнений, когда от решения $u(x)$ зависит лишь правая часть.

Замечание 3. С небольшими изменениями строятся и исследуются разностные схемы на решениях из $W_2^1(\Omega)$ для краевых условий второго и третьего рода.

Замечание 4. Для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в цилиндрических координатах с осевой симметрией

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r, z),\ (r, z)\in\Omega;\quad u(r, z)=0,\ (r, z)\in\Gamma$$

имеет место аналог теоремы 1. Сингулярность в коэффициентах уравнения создает дополнительные трудности при доказательстве теоремы, но аккуратное применение разработанной техники и в этом случае приводит к результату, аналогичному утверждению теоремы 1 (см. [14]).

Замечание 5. Для эллиптического уравнения, у которого переменные разделяются только в главной части, содержащей производные,

$$(\overset{0}{L}_1+\overset{0}{L}_2)u-q(x)u=-f(x),\quad \overset{0}{L}_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right),\ \alpha=1, 2,$$
$$q(x)=q(x_1, x_2)\geqslant 0,\ x\in\Omega,$$

построим схему

$$\sum_{\alpha=1}^{2}T^{x_{3-\alpha}}(1)(\overset{0}{a}_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}-\overset{0}{T}{}^{x_1}\overset{0}{T}{}^{x_2}(q)\,y=-\overset{0}{T}{}^{x_1}\overset{0}{T}{}^{x_2}(f),\quad x\in\omega,\ y(x)=0,\ x\in\gamma,$$

где $\overset{0}{a}_\alpha=h_\alpha\left(\int\limits_{x_\alpha-h_\alpha}^{x_\alpha}\frac{d\xi}{k_\alpha(\xi)}\right)^{-1}$, а операторы $\overset{0}{T}{}^{x_\alpha}$ являются разрешающими операторами точных разностных схем для $\overset{0}{L}_\alpha = L_\alpha^{(k_\alpha, 0)}$, $\alpha=1, 2$. Пусть функции $k_\alpha(x_\alpha)$, $\alpha=1, 2$, и $f(x)$ удовлетворяют условиям (8) и $q(x) \in L_\infty(\Omega)$. Тогда для этой схемы будет справедлива оценка (9). Доказательство этого факта опирается на специальный вид погрешности аппроксимации и на следующее утверждение: пусть A_α, B — линейные операторы, заданные на вещественном гильбертовом пространстве H, и пусть

$$A_\alpha = A_\alpha^* \geqslant \nu_\alpha E, \quad \alpha=1, 2, \quad A_1A_2 = A_2A_1, \quad B=B^* \geqslant 0, \ \|B\| \geqslant \mu,$$

где $\nu_\alpha = \mathrm{const} > 0$, $\mu = \mathrm{const} > 0$ не зависят от h. Тогда имеют место неравенства

$$\|(A_1+A_2+B)^{-1}A_\alpha\| \leqslant M, \quad \alpha=1, 2,$$

где постоянная M зависит только от ν_α и μ.

4. Коэффициентная устойчивость

Практическое использование разностной схемы (7) может вызвать определенные затруднения, связанные с нахождением ее коэффициентов. Для построения более простой разностной схемы такого же порядка точности нам понадобится лемма с коэффициентной устойчивости (k0-устойчивости) схемы (7). Для ее получения наряду с разностной схемой (7) рассмотрим «более простую» схему вида:

$$\tilde{\Lambda}\tilde{y} \equiv (\tilde{b}_2\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{b}_1\tilde{\Lambda}_2)\,\tilde{y} = -\tilde{\varphi}(x), \ x \in \omega, \quad \tilde{y}(x) = 0, \ x \in \gamma, \tag{11}$$

где $\tilde{\Lambda}_\alpha y \equiv (\tilde{a}_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - \tilde{d}_\alpha y$, $\tilde{b}_\alpha = \tilde{b}_\alpha(x_\alpha)$, $\alpha=1, 2$. Тогда для функции $v = y - \tilde{y}$ будем иметь краевую задачу

$$\Lambda v = -(\tilde{\Lambda} - \Lambda)\,y - (\tilde{\varphi} - \varphi) = -\tilde{\Psi}, \ x \in \omega, \quad v(x) = 0, \ x \in \gamma, \tag{12}$$

где Λ определяется согласно (7).

Представим первое слагаемое в $\tilde{\Psi}$ следующим образом:

$$(\tilde{\Lambda} - \Lambda)\,y = [(\tilde{b}_2 - b_2)\Lambda_1 + (\tilde{b}_1 - b_1)\,\Lambda_2 + \tilde{b}_2\,(\tilde{\Lambda}_1 - \Lambda_1) + \tilde{b}_1\,(\tilde{\Lambda}_2 - \Lambda_2)]\,\tilde{y}.$$

Положим

$$\eta_0 = (\tilde{b}_2 - b_2)\,\Lambda_1\tilde{y} + (\tilde{b}_1 - b_1)\,\Lambda_2\tilde{y}, \quad \eta_\alpha = b_{3-\alpha}\,(\tilde{\Lambda}_\alpha - \Lambda_\alpha)\,\tilde{y}, \ \alpha = 1, 2.$$

Перейдем к получению априорной оценки функции v в сеточной норме $W_2^1(\omega)$. Для этого умножим обе части уравнения в (12) скалярно на v. Тогда будем иметь

$$\|\tilde{y} - y\|^2_{W_2^1(\omega)} \leqslant M \sum_{\beta=0}^{2} |(\eta_\beta, \tilde{y} - y)| + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} \|\tilde{y} - y\|_{W_2^1(\omega)}. \tag{13}$$

Учитывая неравенства

$$|(\eta_0, v)| \leqslant M \max_\alpha \|\tilde{b}_\alpha - b_\alpha\|_{C(\omega)} \|\tilde{y}\|_{W_2^1(\omega)} \|v\|_{W_2^1(\omega)},$$

$$|(\eta_\alpha, v)| \leqslant M \max_\alpha \|\tilde{b}_{3-\alpha}\|_{C(\omega)} \ [\|\tilde{a}_\alpha - a_\alpha\|_{C(\omega)} +$$

$$+ \|\tilde{d}_\alpha - d_\alpha\|_{W_2^{(-1)}(\omega)}]\,\|\tilde{y}\|_{W_2^1(\omega)} \|v\|_{W_2^1(\omega)},$$

из (13) получаем

$$\|\tilde{y} - y\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant M\,\{\max_\alpha [\|\tilde{b}_\alpha - b_\alpha\|_{C(\omega)} +$$

$$+ \|b_{3-\alpha}\|_{C(\omega)} (\|\tilde{a}_\alpha - a_\alpha\|_{C(\omega)} + \|\tilde{d}_\alpha - d_\alpha\|_{W_2^{(-1)}(\omega)})] + \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)}\}\,\|\tilde{y}\|_{W_2^1(\omega)}.$$

Отсюда следует

Лемма 1. *Пусть коэффициенты b_α разностной схемы* (7) *ограничены и задача* (11) *имеет единственное решение, ограниченное в* $W_2^1(\omega)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\tilde{y}-y\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant M \{\max_\alpha [\|\tilde{b}_\alpha - b_\alpha\|_{C(\omega)} + \|\tilde{a}_\alpha - c_\alpha\|_{C(\omega)} + \|\tilde{d}_\alpha - d_\alpha\|_{N_2^{(-1)}(\omega)}] + \\ + \|\tilde{\varphi}-\varphi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)}\} \|\tilde{y}\|_{W_2^1(\omega)}.$$

Следствие 1. *Любая разностная схема вида* (11), *коэффициенты которой* $\tilde{b}_\alpha$, $\tilde{a}_\alpha$ *в норме* $C(\omega)$, *а коэффициенты* $\tilde{d}_\alpha$, $\tilde{\varphi}$ *в норме* $W_2^{(-1)}(\omega)$ *отличаются на* $O(|h|)$ *от соответствующих коэффициентов и правой части схемы* (7), *имеет первый порядок точности в* $L_2(\omega)$. *В частности, это утверждение имеет место для схемы, построенной при помощи усе-ченных одномерных схем нулевого ранга.*

5. Построение схемы второго порядка на решениях из W_2^2

Представляет интерес построение разностной схемы второго порядка точности, когда решение исходной задачи принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу с разделяющимися переменными:

$$Lu \equiv (L_1+L_2)u = -f(x),\ x\in\Omega, \quad u(x)=0,\ x\in\Gamma, \tag{14}$$

где $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\,(x_{3-\alpha})\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, $\alpha = 1, 2$. Будем предполагать, что выполнены условия

$$0<c_1\leqslant k_\alpha(x_{3-\alpha})\leqslant c_2,\ k_\alpha\in L_1(\Omega),\ \alpha=1,\ 2, \quad f(x)\in L_2(\Omega). \tag{15}$$

Эти условия обеспечивают принадлежность решения задачи (14) классу $W_2^2(\Omega)$ (см. [13]).

Построим разностную схему вида

$$\Lambda y \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} b_{3-\alpha}\Lambda_\alpha y = \sum_{\alpha=1}^{2} \hat{T}^{x_{3-\alpha}}(k_\alpha)\, y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = -\hat{T}^{x_1}\hat{T}^{x_2}(f), \quad x\in\hat{\omega}, \tag{16}$$

$$y(x)=0, \quad x\in\gamma.$$

Для погрешности $z=y-u$ будем иметь задачу

$$\Lambda z = \sum_{\alpha=1}^{2} \eta_{\alpha\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}, \ x\in\hat{\omega}, \quad z(x)=0,\ x\in\gamma,$$

где $\eta_\alpha = \eta_\alpha(u) = \hat{T}^{x_{3-\alpha}}(k_\alpha u) - \hat{T}^{x_{3-\alpha}}(k_\alpha)u$, $\alpha=1,\ 2$. Функционалы $\eta_\alpha(u)$ обращаются в нуль на многочленах нулевой степени.

Покажем, что существует такая неравномерная сетка $\hat{\omega}$, что η_α обращается в нуль на многочленах первой степени, что должно обеспечить второй порядок точности. Рассмотрим для определенности функционал η_1. При $u\equiv x_2$ имеем

$$\eta_1(x_2) = (\hbar_2 h_2)^{-1}\int_{x_2-h_2}^{x_2}(\xi - x_2 - h_2)(\xi - x_2)\,k_1(\xi)\,d\xi +$$

$$+(\hbar_2 h_2^+)^{-1}\int\limits_{x_2}^{x_2+h_2^+}(x_2+h_2^+-\xi)(\xi-x_2)k_1(\xi)\,d\xi=$$

$$=\hbar_2^{-1}\int\limits_0^1(1-s)\,s\,[(h_2^+)^2k_1(x_2+sh_2^+)-$$

$$-h_2^2k_1(x_2-sh_2)]\,ds\equiv\hbar_2^{-1}p(h_2,h_2^+).$$

Предположим для простоты, что $k_1(x_2)$ является монотонно возрастающей функцией. Тогда будут справедливы неравенства $p(h_2,0)<0$, $p(h_2,h_2)\geqslant 0$. Отсюда следует, что при заданном h_2 существует такое $\zeta=h_2^+\in(0,h_2]$ — решение уравнения $p(h_2,\zeta)=0$, что $\eta_1=0$ на полиномах первой степени. Таким образом, начиная с любого h_{21}, находим последовательно $h_{22},\ldots,h_{2N_2}$. При $h_{21}=1/N_2$ имеем $\sum\limits_{j=1}^{N_2}h_{2j}<1$; если же взять $h_{21}=1$, то $\sum\limits_{j=1}^{N_2}h_{2j}>1$. Следовательно, существует такой шаг h_{21}, что $\sum\limits_{j=1}^{N_2}h_{2j}=1$. При этом выполняются неравенства

$$1/N_2<h_{21}<c_2/(N_2c_1),\quad c_1/(c_2N_2)<h_{2N_2}<1/N_2.$$

Таким образом, сетка $\hat{\omega}_2$ построена. Аналогично строится и сетка $\hat{\omega}_1$ для функционала η_2.

Нетрудно убедиться, что операторы $b_\alpha^{-1}\Lambda_\alpha$, $\alpha=1,2$, симметричны, отрицательно определены в смысле скалярного произведения с весом b_1b_2 и перестановочны. Учитывая свойства (4) операторов $\hat{T}^{x\alpha}$, для решения z получим оценку (10). Применяя развитую выше технику, убеждаемся в том, что верна

Теорема 2. *Пусть для задачи* (14) *выполнены условия* (15). *Тогда существует такая неравномерная сетка* $\hat{\omega}$, *на которой разностная схема* (16) *имеет второй порядок точности, т. е. будет справедлива оценка* (1) *с* $s=0$ *и* $k=2$.

Замечание 6. Если в задаче (6) $q_\alpha(x_\alpha)\equiv 0$, то простой заменой переменных она сводится к задаче (14).

Теорема 3. *Если выполнены условия* (15) *и, кроме того,* $k_\alpha(x_{3-\alpha})\in\in W_\infty^1(\Omega)$, *то разностная схема* (16) *имеет второй порядок точности на равномерной сетке* ω.

Для того чтобы доказать это утверждение, нам нужно оценить функционалы η_α на равномерной сетке. Рассмотрим для определенности функционал $\eta_1(u)$. Имеем

$$\eta_1(u)=h_2^{-2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2}(\xi-x_2+h_2)k_1(\xi)\int\limits_{x_2}^{\xi}\frac{\partial u(x_1,\zeta)}{\partial\zeta}\,d\zeta\,d\xi+$$

$$+h_2^{-2}\int\limits_{x_2}^{x_2+h_2}(x_2+h_2-\xi)k_1(\xi)\int\limits_{x_2}^{\xi}\frac{\partial u(x,\zeta)}{\partial\zeta}\,d\zeta\,d\xi=$$

$$=h_2^{-2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2}(\xi-x_2+h_2)k_1(\xi)\int\limits_{x_2}^{\xi}\left[\frac{\partial u}{\partial\zeta}(x_1,\zeta)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial r}(r,p)dr\,dp\right]d\zeta\,d\xi+$$

$$+h_2^{-2}\int\limits_{x_2}^{x_2+h_2}(x_2+h_2-\xi)k_1(\xi)\int\limits_{x_2}\left[\frac{\partial u}{\partial\zeta}(x_1,\zeta)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial r}(r,p)\,dr\,dp\right]d\zeta\,d\xi+$$

$$+(h_1h_2)^{-1}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial r}(r,p)\,dr\,dp\,\eta_1(x_2).$$

Ввиду того, что

$$|\eta_1(x_2)|\leqslant h_2\left|\int\limits_0^1(1-s)s\,|k_2(x_2+sh_2)-k_2(x_2-sh_2)|\,ds\leqslant\right.$$

$$\leqslant Mh_2^2\,\|k_2\|_{W^1_\infty(\Omega)},$$

то из предыдущего соотношения получаем оценку

$$|\eta_1(u)|\leqslant M\,|h|^2\,(h_1h_2)^{-1/2}\,\|u\|_{W_2^2(e)},$$

где $e=(x_1-h_1,\ x_1+h_1)\times(x_2-h_2,\ x_2+h_2)$. Аналогичная оценка имеет место и для $\eta_2(u)$. Подставляя эти оценки в (10), получаем справедливость доказываемого утверждения.

Из вышеизложенного делаем вывод, что при «плохих» свойствах коэффициентов k_α схема (16) имеет второй порядок точности на специальной неравномерной сетке. Если же коэффициенты «более гладкие», то второй порядок точности сохраняется и на равномерной сетке.

6. Уравнение четвертого порядка

Согласованные оценки типа (1) удается получить и для некоторых задач для уравнения четвертого порядка. Рассмотрим вторую краевую задачу для следующего уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)=f(x),\quad x\in\Omega,\\ u(x)=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(x)=0,\quad x\in\Gamma,\end{gathered}\tag{17}$$

где n — внешняя нормаль к границе Γ. Плоскость $(x_1,\ x_2)$ покроем сеткой $E_h=\{x=(x_1,\ x_2):\ x_\alpha=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,\ \pm1,\ \ldots,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$ и введем обозначения $\omega=\Omega\cap E_h$, $\bar\omega=\bar\Omega\cap E_h$, $\gamma=\bar\omega\setminus\omega$, $\gamma_{\pm\alpha}=\{x\in\gamma:\ \cos(x_\alpha,\ n)=\pm1\}$, $\alpha=1,\ 2$. Задачу (17) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{2}\left(T_{3-i}^2(a_{ij})\,y_{\bar x_j x_j}\right)_{\bar x_i x_i}=T_1^2T_2^2f,\quad x\in\omega,\\ y(x)=0,\ \ x\in\gamma,\quad y_{\bar x_\alpha x_\alpha}(x)=0,\ \ x\in\gamma_{\pm\alpha},\ \ \alpha=1,\ 2.\end{gathered}\tag{18}$$

Если $f(x)\in W_2^{l-1}(\Omega)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{2}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant c_0(\xi_1^2+\xi_2^2)$, $c_0>0$, $a_{ij}(x)\in W_\infty^{l}(\Omega)\cap\cap W_2^{1+l}(\Omega)$, $l=0,\ 1$, то для разностной схемы (18) будет справедлива оценка (1) с $s=2$, $k=3+l$.

Аналогичные результаты получены и для квазилинейного уравнения четвертого порядка.

7. Параболические уравнения

Применим разработанный выше метод для построения и исследования сходимости разностной схемы для параболических уравнений. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T],$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \; x \in \Omega, \quad u(x, t) = 0, \; x \in \Gamma, \; 0 < t < T, \tag{19}$$

где оператор L определяется из (6). Для этой задачи построим чисто неявную разностную схему

$$b_1 b_2 y_{\bar{t}} = \Lambda y + \varphi, \quad x \in \omega, \; t \in \omega_\tau,$$
$$y(x, 0) = T^{x_1} T^{x_2} u_0(x), \quad x \in \omega, \quad y(x, t) = 0, \; x \in \gamma, \; t \in \omega_\tau, \tag{20}$$
$$y = y^j = y(x, t_j), \quad y_{\bar{t}} = (y^j - y^{j-1})/\tau, \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

где $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \; j = 1, 2, \ldots, J, \; \tau = T/J\}$ и все обозначения из пункта 3. В дальнейшем займемся исследованием сходимости разностной схемы (20) на обобщенных решениях из $W_2^{1,1}(Q_T)$.

Введем следующий оператор T_0 усреднения по Стеклову по переменной:

$$T_0 u(x, t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} u(x, \xi)\, d\xi, \; t \in \omega_\tau, \quad T_0 u(x, t) = u_0(x), \; t = 0,$$

и обозначим $\bar{\bar{u}}(x, t) = T_0 \bar{u}(x, t)$, а усреднение $\bar{u}(x, t)$ взято из пункта 3.

Имеет место

Теорема 4. *Пусть решение $u(x, t)$ задачи (19) принадлежит пространству $W_2^{1,1}(Q_T)$. Тогда решение разностной схемы (20) сходится в норме $L_2(\omega \times \omega_\tau)$ к усредненной функции $\bar{\bar{u}}$ от исходного решения u, причем выполнена оценка*

$$\| y - \bar{\bar{u}} \|_{L_2(\omega \times \omega_\tau)} \leqslant M \left(\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + |h| \cdot \| u \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \right) \tag{21}$$

с постоянной M, не зависящей от τ и h.

Доказательство. Для функции $z = y - \bar{\bar{u}}$ получим задачу

$$b_1 b_2 z_{\bar{t}} = \Lambda z + \Psi, \; x \in \omega, \quad z(x, t) = 0, \; x \in \gamma, \; t \in \omega_\tau,$$
$$z(x, 0) = T^{x_1} T^{x_2} u_0(x) - b_1 b_2 \bar{\bar{u}}(x, t)\big|_{t=0}, \quad x \in \omega. \tag{22}$$

Погрешность аппроксимации Ψ можно представить в виде

$$\Psi = \eta_{0\bar{t}} + \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2,$$

где

$$\eta_0(x, t) = T^{x_1} T^{x_2} u(x, t) - b_1 b_2 \bar{\bar{u}}(x, t), \quad x \in \omega, \; t \in \omega_\tau,$$
$$\eta_1(x, t) = b_2 u - T_0 T^{x_2}(u), \quad \eta_2(x, t) = b_1 u - T_0 T^{x_1}(u).$$

Для решения задачи (22) имеет место априорная оценка

$$\| z \|_{L_2(\omega \times \omega_\tau)} \leqslant M \sum_{\alpha=0}^{2} \| \eta_\alpha \|_{L_2(\omega \times \omega_\tau)}. \tag{23}$$

Доказательство этого неравенства проводится в два этапа. Методом выделения стационарных неоднородностей (см. [2]) доказывается априорная оценка, связанная с погрешностью эллиптической части оператора. Затем получается оценка решения разностной схемы с правой частью $\eta_{0\bar{t}}$ (см. [12]).

Для получения оценки (21) достаточно оценить L_2-норму функции η_α, $\alpha=0, 1, 2$. Выражения η_α являются линейными ограниченными функционалами в пространстве $W_2^{1,1}(Q_T)$, которые обращаются в нуль на константе. Используя технику, разработанную в [8], из (23) выводим искомую оценку (21).

Замечание 7. Аналогичный результат получается и для схемы с весами. В частности, при $\tau\leqslant 2/\|\Lambda\|$ получена оценка сходимости явной схемы.

Замечание 8. Оценка сходимости доказана при произвольных τ и $|h|$. Таким образом, предельный переход в (21) при $\tau\to 0$ дает оценку скорости сходимости метода прямых для задачи (19) порядка $O(|h|)$ на решениях из $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Замечание 9. Результаты пункта 5 удается перенести и на параболические задачи вида (19).

Замечание 10. Полученные оценки имеют место и в случае, когда правая часть f зависит от u и удовлетворяет условию Липшица по этой переменной.

Замечание 11. Все изложенные выше результаты сохраняют силу и для трехмерного случая.

Замечание 12. Можно получить оценку сходимости разностной схемы (20) при более слабых предположениях о гладкости решения $u(x, t)$ по переменной t. Следуя [15], обозначим через

$$\tau_1(v, \delta)_{L_2} = \left\{\int_0^T \sup_{0\leqslant\eta\leqslant\delta} \|v(x, t) - v(x, t-\eta)\|^2_{L_2(\Omega)} dt\right\}^{1/2}$$

интегральный τ_1-модуль непрерывности функции $v(x, t)$ по переменной t. Тогда оказывается, что если $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$, то имеет место оценка

$$\|y-\overline{\overline{u}}\|_{L_2(\omega\times\omega_\tau)}\leqslant M[\tau_1(u, \tau)_{L_2} + |h|\cdot\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}].$$

Если $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L_2(Q_T)$, то из этой оценки следует (21). Но здесь мы получаем сходимость при более слабых предположениях о гладкости искомого решения (в частности, если $u(x, t)$ имеет ограниченную вариацию по переменной t; см. [15]).

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах высокого порядка точности.— ДАН СССР, 1960, т. 131, № 3, с. 514—517.
2. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
3. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: АН Арм. ССР, 1979. 235 с.
4. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
5. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 2, с. 371—387.
6. *Weinelt W.* Untersuchungen zur Konvergenzgeschwindigkeit bei Differenzenverfahren.—Wiss. Z. d. Tech. Hochsch. Karl-Marx-Stadt, 1978, B. 20, № 6, s. 763—769.
7. *Лазаров Р. Д.* О сходимости разностных схем для некоторых осесимметричных задач математической физики в классах обобщенных решений.— ДАН СССР, 1981, т. 258, № 6, с. 1301—1304.
8. *Лазаров Р. Д.* О сходимости разностных решений к обобщенным решениям уравнений четвертого порядка.— Дифф. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1295—1303.
9. *Войцеховский С. А., Макаров В. Л.* Об оценке скорости сходимости разностных схем в задачах на собственные значения для выпуклых областей.— ДАН СССР, 1980, т. 234, № 5, с. 1035—1038.

10. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
11. *Макаров В. Л., Саддуллаев С. С.* К вопросу о сходимости разностных схем для уравнения Гельмгольца в прямоугольнике.— В сб.: Вопросы вычисл. и прикл. матем. Ташкент, 1979, вып. 58, с. 30—38.
12. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений.— ДАН СССР, 1981, т. 259, № 2, с. 282—286.
13. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
14. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы второго порядка точности для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях из W_2^2.— ЖВМ и МФ, 1981, т. 21, № 5, с. 1168—1179.
15. *Андреев А. А., Попов В. А., Сендов Бл.* Оценки погрешности численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— ЖВМ и МФ, 1981, т. 21, № 3, с. 635—650.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1981