31. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980, с. 288.
32. Бакушинский А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве.— ЖВМиМФ, 1967, 7, № 3, с. 672—676.
33. Бакушинский А. Б. Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанных на принципе итерационной регуляризации.— ЖВМиМФ, 1977, 17, № 6, с. 1350—1362.
34. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974, 374 с.
35. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975, 272 с.
36. Винокуров В. А., Петунин Ю. И., Плечко А. Н. Условия измеримости и регуляризуемости отображений обратных к непрерывным линейным отображениям.— ДАН СССР, 1975, 220, № 3, с. 509—511.
37. Винокуров В. А. Регуляризуемость почти всюду.— ЖВМиМФ, 1974, 14, № 3, с. 560—571.
38. Винокуров В. А. О погрешности приближенного решения линейных обратных задач.— ДАН СССР, 1979, 246, № 4, с. 792—793.
39. Страхов В. Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве.— Диф. уравн., 1970, 6, № 8, с. 1490—1495.
40. Страхов В. Н. О построении оптимальных по порядку приближенных решений линейных условно корректных задач.— Диф. уравн., 1973, 19, № 10, с. 1862—1874.
41. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974. Ротапринт.
42. Танана В. П. Об оптимальности методов решения нелинейных некорректных задач.— ДАН СССР, 1975, 220, № 5, с. 1035—1037.
43. Бакушинский А. Б. Оптимальные и квазиоптимальные методы решения некорректных линейных задач, порожденных регуляризирующими алгоритмами.— Изв. высш. учеб. зав., 1978, № 11, с. 137—140.
44. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 288 с.
45. Свешников А. Г., Ильинский А. С. Задачи проектирования в электродинамике.— ДАН СССР, 1972, 204, № 5, с. 1077—1081.
46. Гласко В. Б. Некоторые математические вопросы интерпретации геофизических наблюдений. Автореф. докт. дис. М.: Изд-во МГУ, 1972.
47. Заикин П. Н. Система полной автоматической обработки результатов спектрометрических экспериментов. Автореф. докт. дис. Дубна, ОИЯИ, 1978.
48. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Думова А. А., Митрофанов В. Б., Пергамент А. Х., Пергамент М. И. О многоцелевой проблемно-ориентированной системе обработки результатов экспериментов.— Препринт ИПМ, 1976, № 142.

Поступила в редакцию
30.03.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 15. ВЫЧИСЛ. МАТЕМ. И КИБЕРН., 1981, № 3

УДК 519.624/632

А. А. Самарский

К ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

1. В теории разностных схем важную роль играет понятие однородных разностных схем. Это понятие было введено в работах А. Н. Тихонова [1, 2], выполненных совместно с автором данной статьи. В [1, 2] и в последующих публикациях [3—13] была построена теория однородных разностных схем для линейных самосопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и даны ее приложения. Именно здесь были поставлены многие вопросы теории разностных схем, послужившие отправным пунктом для последую-

щих многочисленных исследований разностных схем для уравнений математической физики.

Под однородной разностной схемой понимается такая схема, вид которой не зависит ни от выбора конкретной задачи из заданного класса, ни от выбора сетки, а коэффициенты схемы определяются как функционалы коэффициентов дифференциального уравнения.

Основной вопрос теории — оценка точности однородных разностных схем для различных классов задач, которые определяются заданием вида дифференциального оператора и дополнительных (краевых, начальных) условий и заданием классов пространств, входных данных (коэффициентов и правых частей уравнений, начальных и граничных данных). Второй вопрос теории — как получить однородные схемы заданного качества?

2. В качестве модельной задачи, на которой можно пояснить основные идеи теории однородных разностных схем, рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$L^{(k,q,f)}u \equiv \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = \mu_1, \ u(1) = \mu_2, \ k(x) > 0, \ q(x) \geqslant 0,$$

где $k(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(0)}$ $[0, 1]$, а $Q^{(0)}$ $[0, 1]$ — класс кусочно-непрерывных функций, заданных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть $\omega = \{x_i = ih, i = 0, 1, ..., N\}$ — равномерная сетка с шагом $h = 1/N$.

Рассмотрим все возможные однородные трехточечные схемы. Любая трехточечная схема может быть записана в виде

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h^2}\left[b_i(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{2}$$

$$y_0 = \mu_1, \ y_N = \mu_2.$$

Разностная схема (2) однородна, если в каждой точке x_i коэффифициенты a_i, b_i, d_i и φ_i являются значениями функционалов от коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ дифференциального уравнения. В общем случае a_i, b_i и d_i зависят от значений $k(x)$ и $q(x)$, а φ_i — от $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в окрестности (x_{i-1}, x_{i+1}) узла x_i. Простейшее семейство однородных разностных схем получим, предполагая, что a_i и b_i зависят только от $k(x)$, d_i — от $q(x)$, а φ_i — от $f(x)$. В этом случае

$$a_i = A^h[k(x_i + sh)], \ b_i = B^h[k(x_i + sh)],$$

$$d_i = D^h[q(x_i + sh)], \ \varphi_i = F^h[f(x_i + sh)], \ -1 \leqslant s \leqslant 1, \tag{3}$$

где $A^h\bar{k}(s)]$, $B^h[\bar{k}(s)]$ и т. д. — так называемые шаблонные функционалы, произвол в выборе которых ограничен требованиями разрешимости, аппроксимации, устойчивости и др. Разностная задача (2) разрешима, если

$$a_i > 0, \ b_i > 0, \ d_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, ..., N-1.$$

3. Схема (2) имеет n-й ($n = 1, 2$) порядок аппроксимации в классе гладких коэффициентов, если выполнены условия

$$\frac{1}{h}(b_i - a_i) = k_i' + O(h^n), \quad \frac{b_i + a_i}{2} = k_i + O(h^n),$$

$$d_i = q_i + O(h^n), \quad \varphi_i = f_i + O(h^n) \ (\text{см. } (3)). \tag{4}$$

В случае гладких коэффициентов условия (4) обеспечивают сходимость схемы (2) к решению задачи (1), а в случае разрывных коэффициентов это уже не так. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть простейшую задачу:

$$L^{(k)}u \equiv (k(x)u')' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = (0), \tag{5}$$

и аппроксимирующую ее разностную схему

$$\Lambda y_i = \frac{k_i}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1,$$

$$y_0 = y_N = 0. \tag{6}$$

В рассматриваемом случае

$$a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}$$

и условия (4) выполнены при $k(x) \in C^{(n+1)}[0, 1]$. Пусть теперь $k(x)$ кусочно-постоянна, т. е.

$$k(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \xi, \\ k, & \xi < x < 1. \end{cases}$$

Решением задачи (5) в этом случае является функция

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{kx}{k\xi + 1 - \xi}, & x < \xi, \\[2ex] \dfrac{1 - x}{k\xi + 1 - \xi}, & x > \xi, \end{cases}$$

в то время как решение разностной задачи (6) сходится к функции

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha x}{\alpha\xi + \beta(1 - \xi)}, & x < \xi. \\[2ex] \dfrac{\beta(1 - x)}{\alpha\xi + \beta(1 - \xi)}, & x > \xi, \end{cases}$$

где $\alpha = (3+k)/(5-k)$, $\beta = (3k+1)/(5k-1)$, которая при $k \neq 1$ не совпадает с функцией $u(x)$: $\tilde{u}(x) \neq u(x)$ при $k \neq 1$. Таким образом, схема (6) расходится в классе кусочно-непрерывных функций $k(x)$.

4. Среди схем (2) имеются схемы, для которых выполнено условие

$$b_i \equiv a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{7}$$

Такие схемы называются консервативными. Однородная консервативная схема имеет вид

$$\frac{1}{h^2}[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})] - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \tag{8}$$

где $a_i = A_i[k(xi+sh)]$, $A[\bar{k}(s)]$ — шаблонный функционал на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 0$. Если выполнены условия аппроксимации, то консервативная схема сходится в классе разрывных коэффициентов.

Схема (6) не является консервативной, так как для нее условие (7) не выполнено.

Для получения консервативных схем используются интегроинтерполяционный метод (метод баланса), а также вариационно-разностные методы.

Является ли консервативность необходимым условием сходимости в классе разрывных коэффициентов, т. е. следует ли из сходимости схемы ее консервативность?

Доказано, что для исходного семейства схем (2), у которых $\frac{1}{A^h}$, $\frac{1}{B^h}$, D^h, F^h являются линейными функционалами, консервативность однородной схемы (2); (т. е. условия (7)) необходима и достаточна для сходимости в классе кусочно-непрерывных коэффициентов. В этом семействе схем существует только одна схема второго порядка точности при k, q, $f \in Q^{(2)}[0, 1]$. В общем случае нелинейных функционалов A^h и B^h консервативность необходима для выполнения усиленного требования сходимости в классе разрывных коэффициентов, а именно требования коэффициентной устойчивости схемы.

5. При изучении вопроса о точности однородных схем в $Q^{(m)}$ ($Q^{(m)}[0, 1]$ — класс кусочно-непрерывных вместе с m производными функций на отрезке $[0, 1]$) потребовалось уточнить понятие аппроксимации схемы. Дело в том, что в окрестности точек разрыва погрешность аппроксимации ψ не стремится к нулю при $h \to 0$ (в общем случае $\psi = O\left(\frac{1}{h}\right)$), и важно правильно оценить влияние этого факта на точность схемы. Было показано, что аппроксимацию можно понимать в смысле нормы

$$\|\psi\|_* = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^{i} h \psi_k \right|, \tag{9}$$

а для погрешности $z = y - u$, где y — решение разностной задачи (8), u — решение задачи (1), верна априорная оценка $\|z\|_C = \|y - u\|_C \leqslant M\|\psi\|_*$, $M = \text{const} > 0$, в сеточной норме C. Именно такое понимание аппроксимации позволило правильно оценить точность разностной схемы в классах $Q^{(m)}$ разрывных коэффициентов. Аналог нормы (8) на неравномерной сетке оказался эффективным при оценке погрешности аппроксимации ψ однородных разностных схем на неравномерных сетках. Погрешность аппроксимации на таких сетках представляется в «дивергентном» виде

$$\psi_i = \eta_{\hat{x},i} + \overset{0}{\psi}_i, \quad \eta_{\hat{x},i} = (\eta_{i+1} - \eta_i)/\hbar_i, \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \tag{10}$$

где обе функции η и $\overset{0}{\psi}$ имеют в узле x_i более высокий (например, второй, если, k, q, $f \in C^{(2)}[0, 1]$) порядок малости, чем ψ. Благодаря представлению погрешности аппроксимации в виде (10) и использованию нормы типа (9) было показано, что любая из однородных консервативных разностных схем на произвольной последовательности неравномерных сеток имеет тот же порядок точности, что и на равномерных сетках, как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов.

6. Весьма значительным этапом в теории однородных разностных схем явилось построение для задачи (1) точной схемы, которая оказалась однородной и консервативной. Хотя точная численная реализация точной схемы и невозможна, полученные на ее основе так называемые усеченные схемы m-го ранга дают пример конструктивного построения однородных консервативных схем, имеющих точность $O(h^{2m+2})$ в классе кусочно-непрерывных коэффициентов. Более того, доказанная при исследовании усеченных схем теорема сравнения разностных схем указала путь для изучения и других схем при минимальных предположениях о гладкости коэффициентов.

7. Развитый математический аппарат позволил исследовать сходимость и точность однородных разностных схем для задачи Штурма — Лиувилля с разрывными коэффициентами

$$(ku')'-qu+\lambda ru=0,\ 0<x<1,\ u'(0)-\sigma_1 u(0)=0,$$
$$u'(1)+\sigma_2 u(1)=0,\ \sigma_1\geqslant 0,\ \sigma_2\geqslant 0.$$

Теория однородных разностных схем, построенная для задачи (1), послужила отправным пунктом для развития теории однородных разностных схем для многих задач математической физики, из которых для дальнейшего обзора мы выберем лишь те, которые связаны с обыкновенными дифференциальными уравнениями (не претендуя на полноту обзора и выделяя лишь те работы, которые непосредственно связаны с [1—13]).

8. Последовавшие за работами [1—13] исследования развивали полученные там результаты в различных направлениях. В [14—16] рассматривались краевые задачи и задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с оператором

$$L^{(k,p,q)}u\equiv\frac{d^2}{dx^2}\left[k(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u \qquad (11)$$

при различных самосопряженных граничных условиях. Построена теория однородных разностных схем, включающая случаи разрывных коэффициентов и неравномерной сетки. Погрешность аппроксимации схем для уравнения четвертого порядка при наличии разрывов коэффициентов и на неравномерной среде ведет себя еще более прихотливо, чем в случае уравнений второго порядка, но и здесь дальнейшее ослабление нормы для погрешности аппроксимации и использование соответствующих априорных оценок позволили исследовать точность схемы с максимальной полнотой. Изучена не только краевая задача для уравнения $L^{(k,p,q)}u=f$, но и задача Штурма — Лиувилля.

Результаты [14—16] удалось в [17—18] обобщить и развить на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка и на случай уравнений порядка $2m$. Основное внимание в этих работах уделяется изучению однородных разностных схем в классе разрывных коэффициентов и на неравномерных сетках.

9. Для задачи Штурма — Лиувилля для уравнения второго порядка $L^{(k,q)}u+\lambda r(x)u=(ku')'-qu+\lambda r(x)u=0$ $(r(x)>0)$ в [19—20] построена и исследована точная трехточечная разностная схема; она однородна и консервативна. Полученные на ее основе усеченные схемы консервативны и обладают тем же порядком сходимости в классе разрывных коэффициентов и на неравномерной сетке, что и в случае соответствующей краевой задачи. Указаны эффективные алгоритмы.

10. Особый интерес представляют краевые задачи и задачи на собственные значения, когда дифференциальный оператор имеет регулярную особенность:

$$Lu \equiv u' - \frac{q(x)}{x^2} u, \quad 0 < x < 1. \tag{12}$$

Проведенное в [21] изучение точных и усеченных разностных схем показало, что в случае оператора (12) все прежние результаты о скорости сходимости усеченных схем в классе разрывных коэффициентов и на неравномерных сетках остаются в силе.

11. Точная разностная схема для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$L^{(p,Q)}\mathbf{u} = \frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right) - Q(x)\mathbf{u} = -\mathbf{f}(x), \quad x \in (0, 1), \tag{13}$$

где $P(x) = [p_{\alpha\beta}(x)]^n_{\alpha,\beta=1}$, $Q(x) = [q_{\alpha\beta}(x)]^n_{\alpha,\beta=1}$ — заданные вещественные матрицы, построена в [22—23]. Оказалось, что хотя дифференциальный оператор (13) имеет дивергентную форму, точная разностная схема получается, вообще говоря, недивергентной. Дивергентность (консервативность) точной схемы будет иметь место, если матрицы $P(x)$, $P(\bar{x})$, $Q(x)$ и $Q(\bar{x})$ при любых x, $\bar{x} \in [0, 1]$ попарно-перестановочны. Были построены усеченные схемы m-го ранга и исследована их точность. В частности, если

$$P(x) = P^*(x) \geqslant c_1 E > 0, \quad Q(x) = Q^*(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

(E — единичная матрица) и матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ являются липшицевыми, а $\mathbf{f}(x) \in Q^{(0)}[0, 1]$, т. е. $\mathbf{f}(x)$ — кусочно-непрерывный вектор, то усеченная схема m-го ранга имеет $(2m+2)$-й порядок точности в равномерной метрике. Аналогичные результаты были получены и для задач на собственные значения для систем дифференциальных уравнений второго порядка.

12. Вопросы существования и единственности точных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка оказались (см. [24]) тесным образом связанными с существованием и единственностью решения задач типа Валле—Пуссена. Существуют (см. [24]) такие самосопряженные дифференциальные уравнения четвертого порядка, для которых не существует пятиточечной разностной схемы, приводимой к самосопряженному виду. Построены усеченные схемы m-го ранга и исследована их точность.

13. В [25] точная и усеченная схемы построены для задачи Штурма — Лиувилля, оператор которой вырождается на концах отрезка, т. е.

$$L^{(p,q)}u = [(1-x^2)p(x)u']' - q(x)u(x), \quad |x| < 1.$$

Усеченные схемы имеют точность, порядок которой в 2 раза меньше, чем в регулярном случае и в случае задачи с вырождением из [21].

14. Представляет интерес построение точных разностных схем для дифференциальных уравнений в неограниченных областях на конечных сетках. Первые результаты в этом направлении были получены в [26]. Изучение точности усеченных разностных схем оказалось тесно связанным с теорией сингулярно возмущенных уравнений, основы которой были заложены в работах А. Н. Тихонова, его учеников и последователей.

В [27] рассмотрены несамосопряженные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной $\varepsilon u''+r(x)u'-q(x)u=-f(x)$. После приведения уравнения к самосопряженному виду можно построить точную и усеченную схемы m-го ранга. Оказалось, что усеченные схемы имеют равномерную по малому параметру ε точность, оцениваемую величиной $O(h^{m+1})$. Отмечено, что первая из схем, обладающих равномерной по малому параметру точностью [28], является простейшей дискретной схемой, полученной из усеченной схемы первого ранга.

15. В [29, 30] проведено обобщение теории однородных разностных схем на случай коэффициентов менее гладких, чем из $Q^{(0)}[0, 1]$. Оказалось (см. [28]), что все основные результаты по теории точных разностных схем остаются в силе, если коэффициенты уравнения (1) допускают существование обобщенного из $W_2^1[0, 1]$ решения задачи (1). Однако, как показано в [29], при слабых предположениях о коэффициентах точность усеченных схем, вообще говоря, уменьшается по сравнению со случаем $Q^{(0)}$.

16. Новым направлением в теории однородных разностных схем явилось использование операторов точных разностных схем для построения и исследования разностных схем для уравнений в частных производных (в том числе и квазилинейных) [29]. Построенные на этом пути разностные схемы обладают тем свойством, что для них можно установить оценки скорости сходимости при минимальных требованиях на гладкость решения исходных дифференциальных уравнений. Так, в [31] для двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца (в области Ω) была построена девятиточечная разностная схема (на сетке ω), точность которой характеризуется оценкой

$$\|y-u\|_{L_2(\omega)}\leqslant M|h|^{2+s}\|u\|_{W_2^{2+s}(\Omega)},\quad s=0,\ 1,\ 2.$$

Для задач на собственные значения для эллиптического оператора второго порядка с коэффициентом при функции u из L_2 в выпуклой многоугольной области была построена разностная схема, имеющая точность по собственным значениям $O(h^{3/2})$. Аналогичные вопросы для бигармонического уравнения были рассмотрены в [32, 33]. Для осесимметричного уравнения Пуассона в [34] построена разностная схема, точность которой в сеточной весовой норме $L_2(\omega)$ есть $O(|h|^2)$ в предположении, что решение исходной задачи принадлежит весовому пространству $W_2^2(\Omega)$, связанному с цилиндрической системой координат. При этом оказалось, что второй порядок точности достигается только при специальном выборе неравномерной сетки по оси r. Показано, что такая сетка определяется однозначно, и приведено полное исследование ее свойств.

17. Исследование однородных разностных схем, проведенное для обыкновенного дифференциального уравнения (11), послужило конструктивной и методической основой для теории разностных методов решения многомерных стационарных и нестационарных задач математической физики. Важную роль сыграло понятие консервативности разностных схем. Консервативные и полностью консервативные схемы [35] эффективно используются при решении многих линейных и нелинейных задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами.— ДАН СССР, 1956, 108, № 3, с. 393—396.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах.— ДАН СССР, 1958, 122, № 4, с. 562—565.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов.— ДАН СССР, 1959, **124**, № 3, с. 529—542.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об одной наилучшей однородной разностной схеме.— ДАН СССР, 1959, **174**, № 4, с. 779—782.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности.— ДАН СССР, 1960, **131**, № 3, с. 514—517.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О канонических однородных разностных схемах.— ДАН СССР, 1960, **131**, № 4, с. 761—764.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О коэффициентно-устойчивых разностных схемах.— ДАН СССР, 1960, **131**, № 6, с. 1264—1267.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах.— ЖВМиМФ, 1961, **1**, № 1, с. 5—63.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках.— ЖВМиМФ, 1961, **1**, № 3, с. 425—441.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Разностная задача Штурма—Лиувилля.— ЖВМиМФ, 1961, **1**, № 5, с. 784—805.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках.— ЖВМиМФ, 1962, **2**, № 5, с. 812—833.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности на неравномерных сетках.— ЖВМиМФ, 1963, **3**, № 1, с. 79—98.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об устойчивости разностных схем.— ДАН СССР, 1963, **149**, № 3, с. 529—531.
14. Хао Шоу. Однородные разностные схемы для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами.— ЖВМиМФ, 1963, **3**, № 5, с. 841—860.
15. Хао Шоу. Разностные задачи Штурма—Лиувилля для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами.— ЖВМиМФ, 1963, **3**, № 6, с. 1014—1031.
16. Самарский А. А., Хао Шоу. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнения четвертого порядка.— В кн.: Вычисл. методы и прогр. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 3—16.
17. Боярчук А. К. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для системы дифференциальных уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами.— Диф. уравн., 1966, **2**, № 11, с. 1474—1483.
18. Боярчук А. К., Шмоток В. И. Однородные разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка с разрывными коэффициентами.— Диф. уравн., 1969, **5**, № 11, с. 2068—2084.
19. Приказчиков В. Г. Однородные разностные схемы 4-го порядка точности для задачи Штурма—Лиувилля.— В кн.: Вычисл. методы и прогр. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1965, с. 232—236.
20. Приказчиков В. Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма—Лиувилля.— ЖВМиМФ, 1969, **9**, № 2, с. 315—336.
21. Багмут Г. И. Разностные схемы высокого порядка точности для обыкновенного дифференциального уравнения с регулярной особенностью.— ЖВМиМФ, 1969, **9**, № 1, с. 221—226.
22. Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка.— ДАН УССР. Сер. «А», 1978, № 4, с. 302—305.
23. Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г. Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка.— Диф. уравн., 1979, **15**, № 7, с. 1194—1205.
24. Бурханов Ш. А., Гуминская Н. А., Макаров В. Л., Приказчиков В. Г. О точных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.— ДАН УССР. Сер. «А», 1978, № 9, с. 778—781.
25. Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М. Точная и усеченные разностные схемы для задачи Штурма—Лиувилля с вырождением.— Диф. уравн., 1980, **16**, № 7, с. 1625—1675.
26. Макаров В. Л., Гочева С. Г. Разностные схемы любого порядка точности для дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси.— Диф. уравн., 1981, **17**, № 3, с. 527—540.
27. Алексеевский М. В. Разностные схемы высокого порядка точности для сингулярно возмущенных краевых задач. — Диф. уравн., 1981, **17**, № 7.
28. Ильин А. М. Разностные схемы для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.— Матем. заметки, 1969, **6**, вып. 2, с. 237—248.
29. Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем

к оценке скорости сходимости метода прямых.— ЖВМиМФ, 1980, **20**, № 2, с. 371—387.
30. Макаров В. Л., Самарский А. А. К вопросу о скорости сходимости усеченных схем m-го ранга для обобщенных решений.— Диф. уравн., 1980, **16**, № 7, с. 1276—1282.
31. Макаров В. Л., Сабдуллаев С. С. К вопросу о сходимости разностных схем для уравнения Гельмгольца в прямоугольнике.— В кн.: Вопросы вычисл. и прикл. матем. Вып. 58. Ташкент, 1979, с. 30—38.
32. Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Пирназаров С. О сходимости разностных решений к решениям бигармонического уравнения из классов W_2^k.— Вести. Каракалп. филиала АН УзССР, 1980, № 1, 1791, с. 3—10.
33. Лазаров Р. Д. О сходимости разностных решений к обобщенным решениям уравнений четвертого порядка.— Препринт ОИЯИ. Дубна, 1980, Р11-80-839.
34. Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы второго порядка точности для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях из W_2^2.— ДАН СССР.
35. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
14.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 15. ВЫЧИСЛ. МАТЕМ. И КИБЕРН., 1981, № 3

УДК 517.9

А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЗА ПОСЛЕДНИЕ ПЯТЬ ЛЕТ

Введение. Теория сингулярных возмущений возникла на основе работ А. Н. Тихонова [1—3], появившихся тридцать лет назад, и за последующий период выросла в крупное направление в области дифференциальных уравнений и математической физики.

В обзорных статьях, посвященных 70-летию А. Н. Тихонова [4, 5], была достаточно детально изложена история развития теории сингулярных возмущений начиная от основополагающих работ А. Н. Тихонова. Настоящий обзор ставит целью осветить наиболее значительные результаты в этой области за последние 5 лет. Заранее оговоримся, что речь пойдет главным образом о работах учеников А. Н. Тихонова и учеников его учеников.

Напомним некоторые основные факты теории сингулярных возмущений. Сингулярно возмущенная система уравнений имеет вид (z и y — вектор-функции, $\mu>0$ — малый параметр, $0\leqslant t\leqslant T$)

$$\mu dz/dt=F(z,\ y,\ t),\ dy/dt=f(z,\ y,\ t). \tag{1}$$

Решение ее определяется некоторыми дополнительными условиями (начальными или краевыми) для z и y. Полагая $\mu=0$, получим так называемую *вырожденную* систему уравнений

$$0=F(\bar z,\ \bar y,\ t),\ d\bar y/dt=f(\bar z,\ \bar y,\ t). \tag{2}$$

Основной вопрос теории сингулярных возмущений состоит в следующем: будет ли решение системы (2) служить приближением для решения исходной системы (1) при малых μ? Какие дополнительные условия следует при этом задать для решения системы (2) (ясно, что всем дополнительным условиям, заданным для (1), решение (2) удовлетворить не может)?