

При численном моделировании разностная схема интерпретируется как дискретный аналог физико-математической модели рассматриваемого явления^{/1/}. Это означает, что качество схемы должно определяться не только каноническими категориями теории численных методов, но и тем, насколько полно соответствующая дискретная модель отражает физические закономерности исследуемого процесса и, следовательно, тесно связанные с ним свойства уравнений. С этой точки зрения естественно строить разностные алгоритмы, отправляясь непосредственно от методов описания процессов, принятых в физике и математике.

Одним из универсальных и фундаментальных способов описания и исследования проблем теоретической и математической физики являются вариационные принципы^{/2-4/}. Благодаря своей конструктивности и относительной простоте они нередко кладутся в основу теоретического рассмотрения многих классических разделов физики. Одновременно вариационный подход широко используется для построения обобщенных решений уравнений математической физики. Последнее обстоятельство позволяет надеяться на успешное применение вариационных принципов и в тех случаях, когда обоснование существования и единственности решения отсутствует. Именно с таким положением часто приходится иметь дело при решении прикладных, в особенности нелинейных задач.

Многие важнейшие свойства физических процессов сопряжены со свойствами варьируемых функционалов. Так, формулировка законов сохранения импульса и энергии основана на отсутствии явной зависимости лагранжиана от пространственных координат и времени. Дополнительное достоинство вариационных принципов, облегчающее их использование, заключается в их инвариантности относительно систем отсчета.

В^{/5-8/} было предложено использовать вариационный подход для построения конечно-разностных моделей гидродинамики, магнитогидродинамики и диффузионных процессов. Далее этот подход развивался в^{/9-14/}.

I. Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского и уравнения гидродинамики. Лагранжев способ описания основан на глубокой аналогии

сплошной среды с континуальной системой частиц /15, 16/. Эту связь механики континуума с механикой конечного числа материальных точек целесообразно использовать при построении дискретной модели.

Рассмотрим сначала адиабатическое движение произвольного конечного объема V , ограниченного поверхностью Γ и состоящего из одних и тех же континуальных частиц. Следуя принятой аналогии, лагранжиан L такой системы можно представить в виде

$$L(t) = \int_{M(V)} \left(\frac{|w|^2}{2} - \epsilon \right) dm.$$

Обозначения: t - время, $r(x, y, z)$ - радиус-вектор точки, $w(u, v, w)$ - вектор скорости частицы, V - объем, dV - элемент объема, m - масса, dm - элемент массы, ρ - плотность, ϵ - удельная массовая внутренняя энергия, p - давление, d/dt - субстанциональная производная по времени.

В соответствии с принципом наименьшего действия Гамильтона - Остроградского, движение среды как механической системы доставляет стационарное значение $\delta S=0$ функционалу действия

$$(I.1) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt.$$

Варьирование функционала (I.1) должно проводиться с учетом связей: закона сохранения массы

$$(I.2) \quad \delta(dm) = \delta(\rho dV) = 0,$$

первого начала термодинамики

$$(I.3) \quad \delta\epsilon = (p/\rho^2)\delta\rho,$$

кинематической связи

$$(I.4) \quad dr/dt = w.$$

Варьирование (I.1) с учетом (I.2)-(I.4) показывает, что условие стационарности (I.1) выполняется, если справедливо уравнение, выражающее собой закон сохранения импульса:

$$(I.5) \quad \rho \frac{dw}{dt} + \text{grad} p = 0.$$

Соотношение (I.2) переходит в уравнение неразрывности

$$(I.6) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} w = 0.$$

а (I.3) - в уравнение изменения энергии

$$(I.7) \quad \rho \frac{d\epsilon}{dt} + p \text{div} w = 0.$$

В процессе варьирования используется также закон сохранения объема

$$(I.8) \quad \frac{d}{dt} (dV) = dV \operatorname{div} w.$$

Систему уравнений гидродинамики (I.4)-(I.7) замыкает уравнение состояния

$$(I.9) \quad R(P, \rho, \varepsilon) = 0.$$

Существование законов сохранения для уравнений гидродинамики связано с возможностью их вариационного представления. Отсутствие явной зависимости лагранжиана от координат и времени приводит к закону сохранения импульса

$$(I.10) \quad \frac{d}{dt} \int_{M(V)} w dm + \oint_{F(V)} p \cdot n_F dF = 0$$

и энергии

$$(I.11) \quad \frac{d}{dt} \int_{M(V)} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} w^2 \right) dm + \oint_{F(V)} P(w, n_F) dF = 0.$$

Напомним, что закон сохранения массы и условие адиабатичности процесса вводятся в качестве связей.

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского без изменений обобщается на случай учета объемных диссипативных процессов с "вязким давлением" q :

$$\delta \varepsilon = -\frac{P+q}{\rho^2} \delta \rho.$$

Уравнения (I.5), (I.6) для такого неадиабатического движения среды принимают вид

$$\rho \frac{dw}{dt} + \operatorname{grad}(P+q) = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + (P+q) \operatorname{div} w = 0.$$

2. Построение уравнений дискретной среды на основе вариационного подхода. Предполагая движение среды плоским и зависящим только от двух пространственных декартовых координат x и y , зафиксируем в качестве независимых пространственных переменных лагранжевы координаты α и β . Используя известный произвол в выборе α , β , можно считать, что исходному объему V , ограниченному поверхностью F , на плоскости α , β соответствует единичный квадрат G , ограниченный контуром Γ (см. рис. I).

Введем в G прямоугольную разностную сетку $\bar{\omega}_h$, равномерную по каждому направлению и состоящую из узлов ω_{ij} :

$$\bar{\omega}_h = \left\{ \omega_{ij} = (\alpha_i, \beta_j); \quad \alpha_i = i \Delta \alpha, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad \beta_j = j \Delta \beta, \quad j = 0, 1, \dots, M \right\}.$$

Совокупность узлов, лежащих на Γ , обозначим γ_h , остальные узлы будем называть внутренними и обозначать их множество символом ω_h :

$$\omega_h = \{ \omega_{ij} \in G \setminus \Gamma \}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h, \quad \gamma_h = \{ \omega_{ij} \in \Gamma \}.$$

Введем также в рассмотрение множество четырехугольных ячеек $\Omega_h = \{ \Omega_{ij}, i=0, 1, \dots, N-1, j=0, 1, \dots, M-1 \}$, каждая из которых имеет своими вершинами четыре узла ω_{kl} , составляющих шаблон $\mathcal{W}_\omega(\Omega)$ ячейки Ω_{ij} :

$$\mathcal{W}_\omega(\Omega_{ij}) = \{ \omega_{ij}, \omega_{i+1, j}, \omega_{i+1, j+1}, \omega_{i, j+1} \}.$$

Узлы в шаблоне $\mathcal{W}_\omega(\Omega_{ij})$ всегда упорядочены так, чтобы при их последовательном переборе ячейка Ω_{ij} обходилась против часовой стрелки. Любая ячейка взаимно-однозначно определяется своим центром, который будем поэтому обозначать тем же символом: $\Omega_{ij} = \{ \alpha_{i+0.5} = (i+0.5)\Delta\alpha, \beta_{j+0.5} = (j+0.5)\Delta\beta \}$. Такая система обозначений позволит в дальнейшем избежать недоразумений.

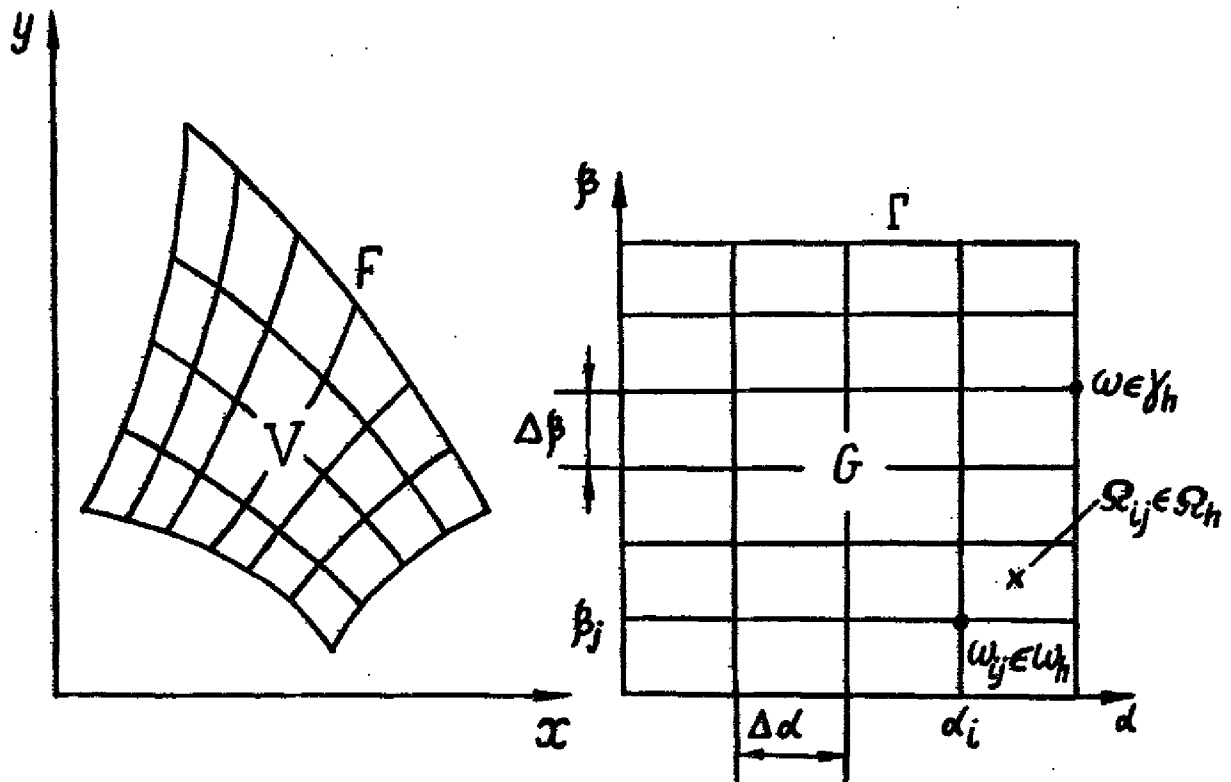


Рис. I.

Будем использовать также шаблон $\mathcal{W}_\Omega(\omega)$, составленный из ячеек Ω_{kl} , имеющих своей вершиной узел ω_{ij} :

$$\mathcal{W}_\Omega(\omega_{ij}) = \{ \Omega_{i,j}, \Omega_{i-1,j}, \Omega_{i-1,j-1}, \Omega_{i,j-1} \};$$

здесь также соблюдается правило обхода.

Образами ячеек $\Omega_{ij} \in \Omega_h$ на плоскости x, y оказываются некоторые плоские четырехугольные объемы V_{ij} с криволинейными границами. Вершинами каждого V_{ij} являются образы узлов $\omega_{kl} \in \mathcal{W}_\Omega(\Omega_{ij})$ на плоскости x, y , для которых нет смысла вводить новые обозначения, как и для образов центров ячеек Ω_{ij} . Множество $V_h = \{V_{ij} : i=0, 1, \dots, N-1; j=0, 1, \dots, M-1\}$ образует разбиение исходного объема V , которому таким способом поставлена в соответствие система конечного числа частиц с конечной массой, формально отождествляемая с "лагранжевым" множеством ячеек Ω_h .

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать безындексные обозначения $\Omega = \Omega_{ij}$, $\omega = \omega_{ij}$, $f = f_{ij}$, $\Delta_\alpha f = f_{i+1,j} - f_{ij}$, $\Delta_\beta f = f_{i,j+1} - f_{ij}$, $f_\alpha = \Delta_\alpha f / \Delta\alpha$, $f_\beta = \Delta_\beta f / \Delta\beta$. Удобно будет также использовать символы усреднения по шаблонам:

$$\langle f \rangle_\Omega = 0.25 \sum_{\omega_{kl} \in \mathcal{W}(\Omega)} f_{kl}, \quad f_{kl} \leftrightarrow \omega_{kl},$$

$$\langle f \rangle_\omega = 0.25 \sum_{\Omega_{kl} \in \mathcal{W}(\omega)} f_{kl}, \quad f_{kl} \leftrightarrow \Omega_{kl}.$$

Будем также прибегать к сокращенной записи:

$$\langle \Omega, f_\alpha \rangle = 0.5 [(f_\alpha)_{ij} + (f_\alpha)_{i,j+1}], \quad \langle \Omega, f_\beta \rangle = 0.5 [(f_\beta)_{ij} + (f_\beta)_{i+1,j}].$$

Лагранжиан L_h дискретной системы частиц, моделирующих сплошную среду, естественно записать в виде

$$L_h(t) = \sum_{\Omega_h} m \left(\frac{\langle u^2 + v^2 \rangle_\Omega}{2} - \varepsilon \right).$$

Функционал действия

$$S_h = \int_{t_0}^{t_1} L_h(t) dt.$$

Закон сохранения массы

$$(I.12) \quad \rho v = m.$$

Первое начало термодинамики с учетом объемных вязких сил применительно к элементу объема

$$(I.13) \quad m d\varepsilon = -(P+q) dv.$$

Кинематические соотношения, отнесенные к узлам,

$$(I.14) \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v.$$

Закон сохранения объема v удобно представить в "якобианной" форме:

$$v = (\langle \Omega, x_\alpha \rangle \langle \Omega, y_\beta \rangle - \langle \Omega, x_\beta \rangle \langle \Omega, y_\alpha \rangle) \Delta_\alpha \Delta_\beta.$$

В этом случае величина v в точности равна площади фигуры на плоскости (x, y) , получаемой спрямлением криволинейных сторон образа Ω .

Громоздкий процесс варьирования в дискретном случае можно заменить, используя непосредственно условия экстремальности Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_n}{\partial u} \right) = \frac{\partial L_n}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_n}{\partial v} \right) = \frac{\partial L_n}{\partial y},$$

которые с учетом уравнений связи (I.12)-(I.14) принимают вид

$$(I.15) \quad \langle m \rangle_\omega \frac{du}{dt} = \sum_{\omega_{kl} \in \Omega(\omega)} (P_{kl} + q_{kl}) \frac{\partial v_{kl}}{\partial x},$$

$$\langle m \rangle_\omega \frac{dv}{dt} = \sum_{\omega_{kl} \in \Omega(\omega)} (P_{kl} + q_{kl}) \frac{\partial v_{kl}}{\partial y}.$$

Дифференцируя объем v по времени, получаем дифференциально-разностное уравнение закона сохранения объема ячейки

$$(I.16) \quad \frac{dv}{dt} = \sum_{\omega_{kl} \in \Omega(\omega)} (u_{kl} \frac{\partial v}{\partial x_{kl}} + v_{kl} \frac{\partial v}{\partial y_{kl}}).$$

Сопоставляя это соотношение с (I.8), выводим разностный аналог выражения для дивергенции:

$$(I.17) \quad D = \frac{1}{v} \sum_{\omega_{kl} \in \Omega(\omega)} (u_{kl} \frac{\partial v}{\partial x_{kl}} + v_{kl} \frac{\partial v}{\partial y_{kl}}).$$

Уравнение энергии в "энтропийной" форме следует из (I.13):

$$m \frac{d\varepsilon}{dt} = - (P+q) \frac{dv}{dt}.$$

После подстановки в него (I.16) оно принимает обычный вид:

$$m \frac{d\varepsilon}{dt} = - (P+q) \sum_{\omega_{kl} \in \Omega(\omega)} (u_{kl} \frac{\partial v}{\partial x_{kl}} + v_{kl} \frac{\partial v}{\partial y_{kl}}).$$

Замыкает систему дифференциально-разностных уравнений уравнение состояния (I.9).

Не останавливаясь на подробном выводе, отметим, что непосредственной проверкой можно установить справедливость разностных аналогов законов сохранения импульса и энергии (I.10), (I.11) для дифференциально-разностных уравнений, что является прямым следствием вариационного способа их получения.

Выражение (I.17) фактически определяет собой некоторый оператор DIV на множестве сеточных функций $w_h = \{u_h, v_h\}$, заданных в $\bar{\omega}_h$:

$$(I.18) \quad \text{DIV}_{\bar{\omega}_h \rightarrow \Omega_h + \gamma_h} w_h =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{V} \sum_{\omega_{ke} \in \mathcal{W}_\omega(\Omega)} (u_{ke} \frac{\partial v}{\partial x_{ke}} + v_{ke} \frac{\partial v}{\partial y_{ke}}) \text{ на } \Omega_h, \\ \frac{1}{\sigma} \sum_{\omega_{ke}} (u_{ke} \frac{\partial v^*}{\partial x_{ke}} + v_{ke} \frac{\partial v^*}{\partial y_{ke}}) \text{ на } \gamma_h. \end{cases}$$

Здесь \mathcal{W}_γ - шаблон, составленный из пары граничных узлов $\omega_{ke} \in \gamma_h$, упорядоченных в направлении обхода Γ против часовой стрелки; v^* - нулевой объем прилегающей к \mathcal{W}_γ , фиктивной ячейки $\Omega^* \in \Omega_h^*$; σ - элемент "разностной" длины дуги, отвечающий \mathcal{W}_γ .

Тогда сопряженным к DIV оказывается оператор $(\text{DIV})^* = -\text{GRAD}$, где

$$\text{GRAD } g_h = \left(- \frac{1}{\langle\langle v \rangle\rangle_\omega} \sum_{\Omega_{ke} \in \mathcal{W}_\Omega(\omega)} g_{ke} \frac{\partial v_{ke}}{\partial x} - \frac{1}{\langle\langle v \rangle\rangle_\omega} \sum_{\Omega_{ke} \in \mathcal{W}_\Omega(\omega)} g_{ke} \frac{\partial v_{ke}}{\partial x} \right) \text{ на } \bar{\omega}_h.$$

Оператор GRAD действует, очевидно, на множестве сеточных функций g_h , задаваемых на $\Omega_h + \gamma_h$.

Можно показать, что

$$(g_h, \text{DIV} w_h) = -((\text{GRAD } g_h, w_h)),$$

где скалярные произведения $(,)$ и $((,))$ определяются следующим образом:

$$((w_h^{(1)}, w_h^{(2)})) = \sum_{\bar{\omega}_h} (u^{(1)} u^{(2)} + v^{(1)} v^{(2)}) \langle\langle v \rangle\rangle_\omega,$$

$$(g_h^{(1)}, g_h^{(2)}) = \sum_{\Omega_h} g^{(1)} g^{(2)} v + \sum_{\gamma_h} g^{(1)} g^{(2)} \sigma.$$

С помощью операторов GRAD и DIV систему дифференциально-разностных уравнений гидродинамики можно представить в виде

$$\rho_h v_h = m_h, \quad v_h = v_h(r_h), \quad r_h = \{x_h, y_h\}, \quad \frac{dr_h}{dt} = w_h, \quad w_h = \{u_h, v_h\},$$

$$(\rho_\omega)_h \frac{dw_h}{dt} = - \text{GRAD}(P_h + g_h), \quad (\rho_\omega)_h = \frac{\langle\langle m_h \rangle\rangle_\omega}{\langle\langle v_h \rangle\rangle_\omega},$$

$$\rho_h \frac{d\varepsilon_h}{dt} = - (P_h + q_h) \text{DIV} w_h, \quad R(P_h, \rho_h, \varepsilon_h) = 0,$$

$$\rho_h, \varepsilon_h \in \Omega_h \quad m_h, v_h, P_h, q_h \in \Omega_h + \gamma_h,$$

$$\langle\langle v_h \rangle\rangle_\omega, (\rho_\omega)_h, \langle\langle m_h \rangle\rangle_\omega, r, w_h \in \bar{\omega}_h.$$

Следствиями здесь являются уравнения сохранения объема и неразрывности:

$$\frac{dv_h}{dt} = v_h \text{DIV} w_h, \quad \frac{d\rho_h}{dt} + \rho_h \text{DIV} w_h = 0.$$

Проводя замену производных по времени конечными разностями $df/dt \approx f_t = (\hat{f} - f) / \Delta t$, $f = f^n$, $\hat{f} = f^{n+1}$, где n - номер временного слоя, $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, получаем семейство разностных схем гидродинамики, которые при соответствующем выборе весов являются полностью консервативными:

$$\rho_h w_h = m_h, \quad v_h = v(r_h), \quad (r_h)_t = w_h^{(0.5)}$$

$$(I.19) \quad (\tilde{\rho}_\omega)_h (w_h)_t + \text{GRAD}^{(0.5)} (P_h^{(\sigma p)} + g_h^{(\sigma q)}) = 0, \quad (\tilde{\rho}_\omega)_h = \frac{\langle\langle m_h \rangle\rangle_\omega}{\langle\langle v_h \rangle\rangle_\omega^{(0.5)}}$$

$$(\tilde{\rho}_\omega)_h (w_h)_t + \text{GRAD}^{(0.5)} (P_h^{(\sigma p)} + q_h^{(\sigma q)}) = 0, \quad (\tilde{\rho}_\omega)_h = \frac{\langle\langle m_h \rangle\rangle_\omega}{\langle\langle v_h \rangle\rangle_\omega^{(0.5)}}$$

$$(v_h)_t = v_h^{(0.5)} \text{DIV}^{(0.5)} w_h^{(0.5)}$$

Операторы $\text{DIV}^{(0.5)}$ и $\text{GRAD}^{(0.5)}$ получаются из (I.18) заменой каждого множителя операторных коэффициентов соответствующей полусуммой по временным слоям. Параметры σ_p , σ_q остаются произвольными.

Можно показать, что построенная полностью консервативная схема при произвольных $0 \leq \sigma_p, \sigma_q \leq 1$ имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству. При этом выражения $\text{DIV } w_h$ и $\text{GRAD } p_h$ аппроксимируют, соответственно, $\text{div } w$ и $\text{grad } p$. При $\sigma_p = \sigma_q = 0.5$ схема имеет второй порядок аппроксимации и по времени.

Устойчивость (I.19) является безусловной при $\sigma_p, \sigma_q \geq 0.5$; в противном случае имеет место ограничение на шаг по времени.

Вариационный подход позволяет без каких-либо принципиальных изменений строить полностью консервативные схемы в цилиндрических, сферических и любых произвольных системах координат^{/9,10,12/}.

Вариационный подход успешно применялся также для построения полностью консервативных схем идеальной МГД. В этом случае вводились дополнительные члены в лагранжиане, соответствующие энергии магнитного поля, а также дополнительная связь, соответствующая условию вмерзности.

Совершенно очевидно, что вариационный подход сохраняет свою силу и в случае трех пространственных измерений.

3. Вариационно-дискретные модели диффузионных процессов. При численном моделировании прикладных задач сравнительно редко удается ограничиваться рассмотрением бездиссипативного движения среды. Часто такое движение сопровождается различными физическими эффектами, такими, как диффузионный перенос тепла, магнитного поля и т.д., которые в общем случае необходимо рассматривать на подвижных криволинейных нерегулярных сетках.

Для многих задач характерна сильная пространственная и временная неоднородность коэффициентов в уравнениях. Особенно типично это для задач физики плазмы. В результате обычные алгоритмы решения уравнения типа теплопроводности оказываются неприемлемыми из-за критической потери точности вычислений. В подобных ситуациях целесообразно наряду с основными функциями вводить в рассмотрение их потоки. Поток форма уравнений позволяет строить устойчивые однородные вычислительные алгоритмы, слабо чувствительные к разбросу коэффициентов и допускающие вырождение уравнений. Отыскание потоков имеет и самостоятельный интерес. Таким образом, заслуживают внимания алгоритмы, с помощью которых можно одновременно получать как сами исходные функции (температуры, магнитного поля и т.д.), так и соответствующие им потоки (тепла, электрического поля и т.д.).

Вариационные принципы эффективно используются при построении разностных схем для уравнения типа теплопроводности^{/13,14/}. Рассмот-

рим уравнение теплопроводности в потоковой форме

$$(I.20) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} w = 0,$$

$$(I.21) \quad w + k \operatorname{grad} u = 0$$

в односвязной плоской области v , лежащей в плоскости декартовых координат (x, y) ; здесь u — температура, w — вектор теплового потока. Пусть на границе Γ задано однородное граничное условие для нормальной компоненты потока; n — единичная внешняя нормаль к контуру Γ . В каждый фиксированный момент времени $t \geq 0$ поле тепловых потоков, удовлетворяющих поставленному граничному условию, доставляет минимум функционалу

$$(I.22) \quad \Phi(w) = \int_v \frac{|w|^2}{k} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_v u^2 dv,$$

в котором функции u и k считаются заданными и не варьируются. Вариация $\partial u / \partial t$ находится из уравнения (I.20), которое играет роль связи. Если исключить $\partial u / \partial t$ из (I.22) с помощью (I.20), то (I.22) приобретает вид

$$(I.23) \quad \Phi(w) = \int_v \left(\frac{|w|^2}{k} - 2u \operatorname{div} w \right) dv.$$

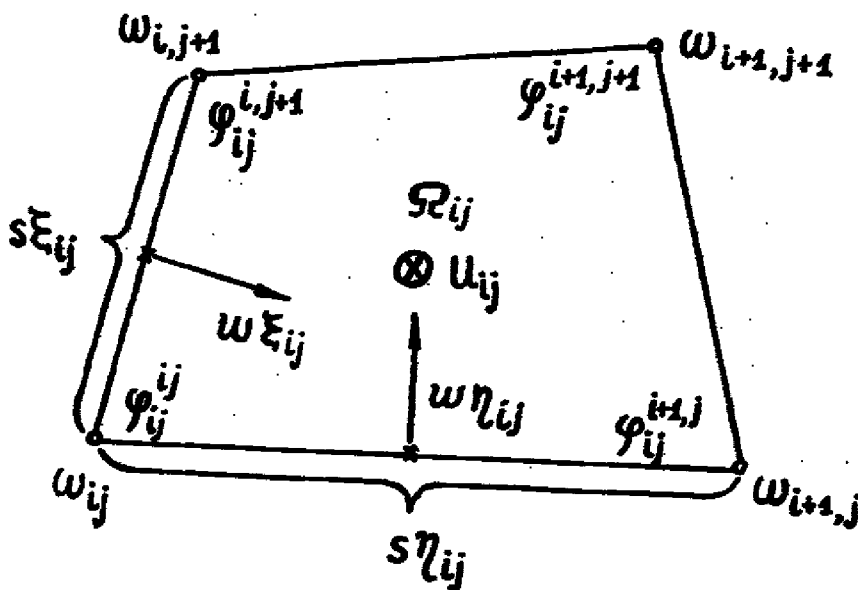


Рис. 2.

Таким образом, отыскание поля потоков w в каждый момент времени можно проводить на основе минимизации функционала (I.23), а величину u находить из уравнения баланса (I.20). В случае задания граничных условий других типов в функционал (I.23) следует добавить в качестве слагаемых соответствующие интегралы по границе Γ .

Заменим область G дискретным множеством точек разностной сетки. Пусть существуют функции $\xi(x, y), \eta(x, y)$, осуществляющие гладкое взаимно-однозначное отображение области V на единичный квадрат $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$. Выбрав величины ξ, η в качестве криволинейных координат, покроем область V четырехугольной сеткой, являющейся образом прямоугольной равномерной сетки в квадрате на плоскости (ξ, η) . Значения сеточной функции u^h и коэффициента k^h будем считать постоянными внутри каждой ячейки сетки. Поле потоков будем описывать с помощью пары сеточных функций w_ξ^h, w_η^h , представляющих собой проекции вектора теплового потока на нормали к серединам сторон ячейки, направленные в сторону возрастания ξ и η соответственно. Индексация сеточных величин пояснена на рис.2. Такая дискретизация позволяет написать интегроинтерполяционное соотношение баланса тепла для ячейки Ω_{ij} :

$$(I.24) \quad v u_t = -v_\xi (s_\xi w_\xi) - v_\eta (s_\eta w_\eta).$$

Здесь символы v_ξ, v_η обозначают операторы взятия разности (вперед) по направлениям ξ и η . Величина v^h - объем ячейки Ω , коэффициенты s_ξ, s_η аппроксимируют длины сторон ячейки. Уравнение (I.24) можно представить в операторной форме

$$(I.25) \quad D(u_h)_t = R w_h,$$

где $w_h = \{w_\xi^h, w_\eta^h\}$ - сеточная вектор-функция, R - блочный оператор, действующий из пространства сеточных вектор-функций w_h в пространство сеточных функций u_h , D - диагональный оператор. Можно показать, что (I.24) аппроксимирует дифференциальное уравнение (I.20) со вторым порядком по пространству и первым по времени.

Для отыскания поля потоков аппроксимируем функционал на разностной сетке выражением

$$(I.26) \quad \Phi_h(w_h) = \sum_{\Omega_k} \left\{ \frac{|w_h|^2}{k} v - 2u [\Delta_\xi (s_\xi w_\xi) + \Delta_\eta (s_\eta w_\eta)] \right\}.$$

Модуль вектора потока в центре ячейки Ω вычисляется по формуле (см. /17/)

$$(w_h)_{ij}^2 = \left[0.25 \sum_{s,\ell=0}^1 (w_\xi_{i+s,j})^2 + (w_\eta_{i,j+\ell})^2 + \right.$$

$$+(-1)^{s+l} \cos \varphi_{ij}^{i+s, j+l} w \xi_{i+s, j} w \eta_{i, j+l} \left(\sin^2 \varphi_{ij}^{i+s, j+l} \right)^{-1} ,$$

где $\varphi_{ij}^{i+s, j+l}$ - угол между сторонами ячейки (см. рис. 2).

Выписывая условия минимума функционала (I.26), получаем разностный аналог уравнений (I.21):

$$0.25 \sum_{s, l=0}^1 \frac{(V/k)_{i-s, j}}{\sin^2 \varphi_{i-s, j}^{i, j+l}} \left[w \xi_{ij} + (-1)^{s+l} \cos \varphi_{i-s, j}^{i, j+l} w \eta_{i-s, j+l} \right] +$$

$$(I.27) \quad + s \xi_{ij} (u_{ij} - u_{i-1, j}) = 0 ,$$

$$0.25 \sum_{s, l=0}^1 \frac{(V/k)_{i, j-l}}{\sin^2 \varphi_{i, j-l}^{i+s, j}} \left[w \eta_{ij} + (-1)^{s+l} \cos \varphi_{i, j-l}^{i+s, j} w \xi_{i+s, j-1} \right] +$$

$$+ s \eta_{ij} (u_{ij} - u_{i, j-1}) = 0 ,$$

или, в операторной форме,

$$(I.28) \quad L w_h = G u_h .$$

Уравнения (I.27) аппроксимируют (I.21) со вторым порядком по пространству. Операторы D, R, L, G обладают свойствами

$$(I.29) \quad D = D^* \gg \delta_1 E, \quad \delta_1 > 0, \quad R^* = -G, \quad L = L^* \gg \delta_2 E, \quad \delta_2 > 0 .$$

Исключая из системы (I.25), (I.28) температуру, можно получить уравнение для потоков в дивергентной форме:

$$(I.30) \quad L(w_h)_t + A w_h = 0, \quad A = -G D^{-1} R .$$

Из (I.29) следует, что $A = A^* > 0$. Уравнение (I.30), как показано в /13/, аппроксимирует со вторым порядком по пространству и первым по времени дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial (w/k)}{\partial t} = \text{grad}(\text{div} w) .$$

Для исследования устойчивости построенного алгоритма можно применить результаты общей теории устойчивости разностных схем /1/. В силу отмеченных свойств операторов R, G и L , схема (I.30) абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени.

Проведенное рассмотрение без существенных изменений переносится на случай произвольной системы координат^{/13/}, а также на трехмерный случай. Наряду с полностью неявным уравнением (1.30) можно рассмотреть аналогичное уравнение с весом σ , что позволяет повысить аппроксимацию по времени до второго порядка при $\sigma = 0.5$. Построенный алгоритм применим и в случае подвижных пространственных сеток, причем все свойства разностных операторов и порядок аппроксимации сохраняются и в этом случае.

4. Решение многомерных прикладных задач. Полностью консервативные схемы, полученные с помощью вариационного подхода, успешно применялись при численном решении ряда многомерных прикладных задач. Рассматривались, в частности, задачи, связанные с магнитогидродинамическим инерционным удержанием плазмы. Одна из таких систем основана на идее квазисферической компрессии плазмы тяжелым цилиндрическим жидкометаллическим лайнером, сходящимся к оси. Численное моделирование показало возможность образования кумулятивных струй, возникающих в процессе опережающего схлопывания концов лайнера (рис.3). Развитие струй заметно снижает эффективность сжатия и может привести к разрушению плазмы, находящейся под лайнером. В процессе вычислительного эксперимента^{/18/} был найден оптимальный режим схлопывания лайнера, при котором интенсивность кумулятивных струй выражена достаточно слабо и не препятствует требуемой степени компрессии плазмы (рис.4).

На основе разработанной методики проведено исследование устойчивости процесса магнитной кумуляции^{/19/}, численное моделирование транспортировки плазмы в канале магнитопровода^{/20/}, спонтанного развития магнитных полей^{/21/} и др.

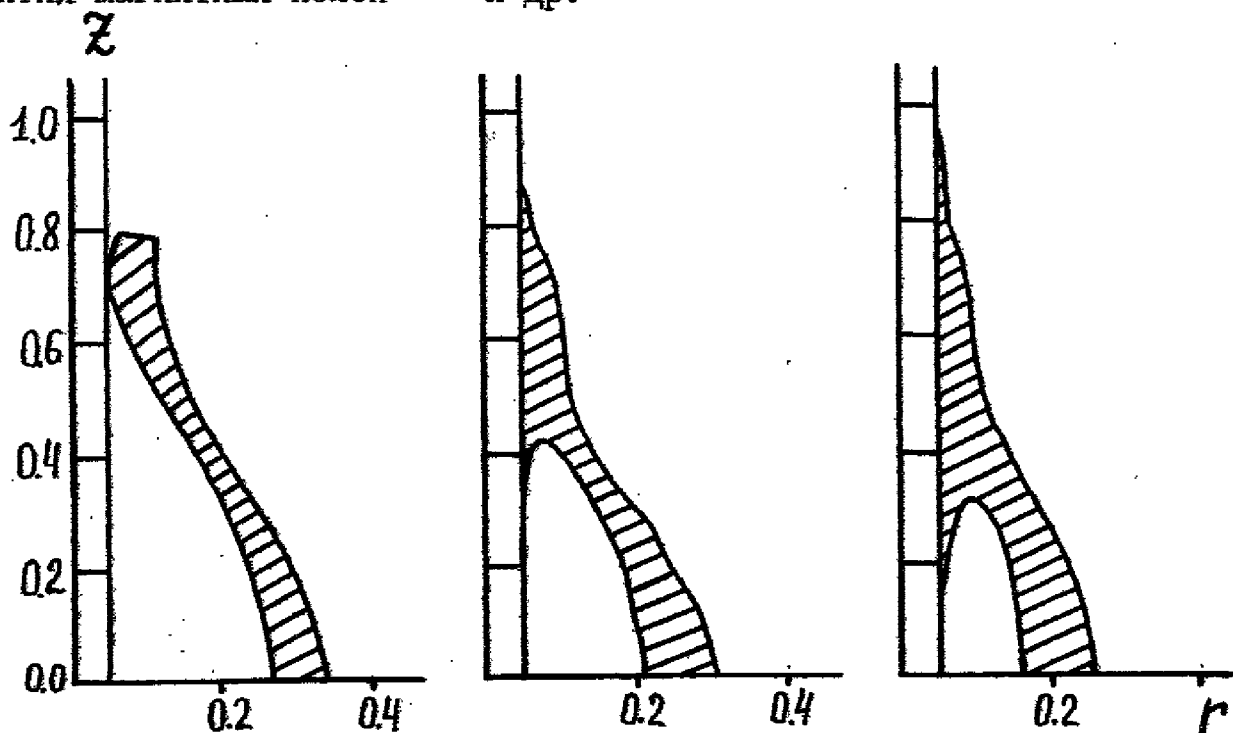


Рис.3.

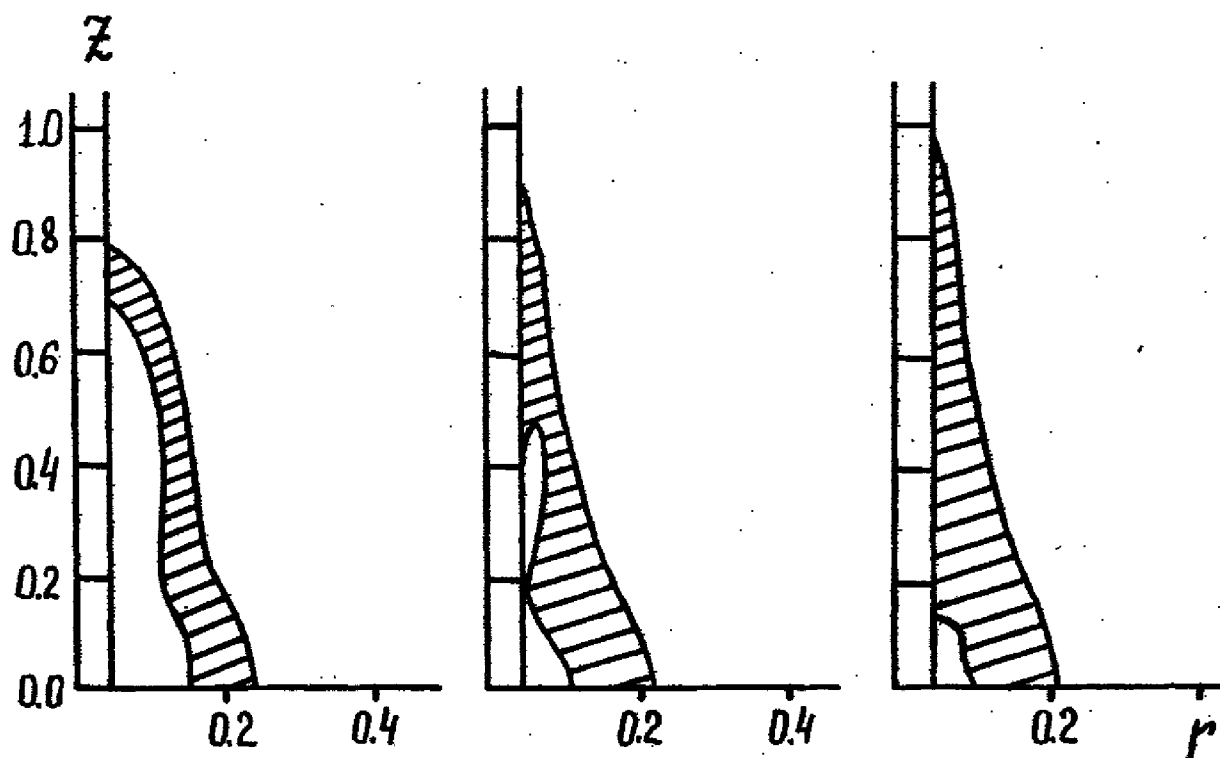


Рис. 4.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., "Наука", 1977.
2. Ландау Л.М., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. I, II. М., "Наука", 1973.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1967.
4. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
5. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 65.
6. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике. Докл. АН СССР, 1977, 235, № 6, 1285-1288.
7. Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Алгоритм численного решения второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на непрямоугольной сетке. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 113.
8. Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Вариационно-разностные схемы для уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках. Докл. АН СССР, 1979, 246, № 6, 1342-1346.
9. Головизнин В.М., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений гидродинамики в сферических координатах. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 16.

10. Фаворский А.П. Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 159; Дифференц. ур-ния, 1980, № 7, 1309-1322.
11. Головизнин В.М. и др. Численное моделирование МГД-задач на основе вариационного подхода. Тр. VI Междунар. конф. по числ. методам в гидродинамике, Тбилиси, 1978, т.П, М., ИПМ АН СССР, 1978, 81-88.
12. Головизнин В.М. и др. Вариационные схемы магнитной гидродинамики в произвольной системе координат. В сб.: "Изучение гидродинамич. неустойчивости числ. методами". М., ИПМ АН СССР, 1980, 162-185.
13. Коршия Т.К. и др. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, 20, № 2, 401-421.
14. Коршия Т.К. и др. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения диффузии магнитного поля. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 179.
15. Гантмахер Ф.Р. Аналитическая механика. М., "Наука", 1963.
16. Seliger R.L., Whitham G.B. Variational principles in continuum mechanics. Proc. Roy. Soc., 1968, A-305, 1-25.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., "Наука", 1970.
18. Гасилов В.А. и др. Численное моделирование компрессии тороидальной плазмы квазисферическим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 71.
19. Волкова Р.А. и др. Численное моделирование обжатия магнитного поля кумулирующим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № III.
20. Головизнин В.М. и др. Численное исследование разлета плазмы в магнитном поле. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 61.
21. Гамалий Е.Г. и др. Генерация и эволюция спонтанных магнитных полей в плотной лазерной плазме. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 155.