ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОКТЯБРЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 10

УДК 517.958:533.9

В. А. ГАЛАКТИОНОВ, С. П. КУРДЮМОВ, А. П. МИХАЙЛОВ,
А. А. САМАРСКИЙ

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛА В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. В работе исследуется асимптотическое поведение решений параболических уравнений типа нелинейной теплопроводности

$$u_t = [k(u)\, u_x]_x,\ 0 < t < T,\ x \in \mathbf{R}^1_+ = (0, +\infty), \tag{1.1}$$

где функция $k \in C(\overline{\mathbf{R}}^1_+) \cap C^2(\mathbf{R}^1_+)$ такова, что $k(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) = 0$. Для уравнения (1.1) рассматривается первая краевая задача в $Q_T = (0, T) \times \mathbf{R}^1_+$ с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbf{R}^1_+;\ u_0 \in C(\mathbf{R}^1_+),\ \sup u_0 < \infty, \tag{1.2}$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0,\ 0 < t < T;\ u_1 \in C(0, T), \tag{1.3}$$

причем

$$u_1(t) \to +\infty,\ t \to T^-. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1) возникает при изучении диффузии тепла в сплошной среде с коэффициентом теплопроводности k, нелинейным образом зависящим от температуры $u(t, x)$. В граничном условии (1.3) температура изменяется в режиме с обострением, т. е. возрастает до бесконечности при $t \to T^-$. Такие специфические граничные условия используются при описании различных существенно нестационарных физических процессов [1—4, 34, 45, 57].

2. В работах [1, 6—9] было установлено, что воздействие режимов с обострением

$$u_1(t) = (T - t)^n,\ 0 < t < T,\ n = \text{const} < 0, \tag{1.5}$$

на среду со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x,\ 0 < t < T,\ x \in \mathbf{R}^1_+,\ \sigma = \text{const} > 0, \tag{1.6}$$

приводит при $n \in [-1/\sigma, 0)$ к локализации тепла, когда тепловые возмущения, несмотря на неограниченный рост температуры в точке $x = 0$, не проникают далее определенной (и не зависящей от времени) длины. Это необычное свойство процессов нелинейной диффузии демонстрирует аналитическое решение задачи (1.6), (1.5) при $n = -1/\sigma$, построенное в [6]:

$$u_{(\sigma)}(t, x) = \begin{cases} (T - t)^{-1/\sigma}(1 - x/x_0)^{2/\sigma},\ 0 < t < T,\ x < x_0, \\ 0,\ 0 < t < T,\ x \geqslant x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Если же $n < -1/\sigma$ в (1.5), то $u(t, x) \to +\infty$ при $t \to T^-$ всюду в $\mathbf{R}^1_+$, и локализация тепла отсутствует.

Приведенные результаты получены на основе анализа автомодельных решений уравнения (1.6), построенных в [1, 10] (другим способом существование этих автомодельных решений установлено в [11, 12]), и теорем сравнения по краевым данным [5].

Исследование эффекта локализации тепла с коэффициентом $k(u)$ нестепенного вида было начато в работах [13, 14], где методом прямого сравнения решений различных параболических уравнений [13—15] получены достаточные условия локализации в средах с коэффициентами

$$k(u)=u^\sigma/[1+\lambda(u)],\ u>0,\ \sigma=\mathrm{const}>0,$$

где функция $\lambda \in C^2(\mathbf{R}_+^1)$ такова, что

$$\lambda(u)\geqslant 0,\ \lambda'(u)\geqslant 0,\ u>0. \tag{1.8}$$

Там же получены условия отсутствия локализации для коэффициентов $k(u)=u^\sigma[1+\lambda(u)]$, $u>0$, где $\lambda \in C^2(\mathbf{R}_+^1)$ удовлетворяет условиям (1.8).

Ниже проведено исследование эффекта локализации тепла в средах с достаточно произвольной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

3. Существование и единственность неотрицательного решения задачи (1.1)—(1.3) при всех $(t, x)\in Q_\tau=(0, \tau)\times \mathbf{R}_+^1$, $\tau<T$ установлены в [5]. Это решение является обобщенным: в точках вырождения уравнения (1.1), где $u(t, x)=0$, оно может не иметь необходимой гладкости; всюду в $P_T(u)=\{(t, x) : u(t, x)>0\}$ решение удовлетворяет уравнению в обычном смысле.

Введем некоторые дополнительные ограничения на функции, входящие в формулировку задачи (1.1)—(1.3). Будем считать выполненным неравенство

$$\int_0^1 [k(u)/u]\, du<+\infty, \tag{1.9}$$

которое является необходимым и достаточным условием конечности скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1.1) [5, 16]. Также предполагаем, что $k'(u)>0$ при всех достаточно малых $u>0$. Начальную функцию $u_0(x)$ считаем финитной: $\operatorname{mes} \operatorname{supp} u_0=\operatorname{mes}\{x|u_0(x)>0\}<+\infty$, что в силу (1.9) обеспечивает финитность по x решение задачи (1.1)—(1.3) при каждом $0<t<T$ [5]. Кроме того, предполагаем, что в $\mathbf{R}_+^1$ существует непрерывная производная $dF(u_0(x))/dx$, где $F(u)=\int\limits_0^u k(u)du$.

4. Теперь можно дать следующее

Определение 1. Будем говорить, что в задаче (1.1)—(1.3) с заданным при $x=0$ граничным режимом с обострением (см. (1.4)) существует локализация тепла, если найдется такая постоянная $l^*<+\infty$, что

$$\operatorname{mes} \operatorname{supp} u(t, x)\leqslant l^*,\ 0<t<T. \tag{1.10}$$

Минимально возможную величину l^* в (1.10) будем называть глубиной локализации (отметим, что $l^*\geqslant \operatorname{mes} \operatorname{supp} u_0$).

Если же $\operatorname{mes} \operatorname{supp} u(t, x)\to+\infty$ при $t\to T^-$, то локализация тепла отсутствует.

В связи с введенным определением возникает следующая задача: установить по заданному (достаточно произвольному) коэффициенту $k(u)$ в (1.1) классы граничных режимов с обострением, приводящих к локализации тепла в задаче (1.1)—(1.3) или к ее отсутствию.

Для изучения в указанной постановке эффекта локализации в данной работе применяется метод обобщенного (операторного) сравнения решений различных параболических уравнений [17, 18], основные положения которого изложены в § 2.

Другой метод изучения локализации тепла состоит в построении так называемых приближенных автомодельных решений (п.а.р.) задачи (1.1)—(1.3), которые не удовлетворяют уравнению (1.1), но к которым решение рассматриваемой задачи асимптотически сходится [21, 22, 27, 39, 56]. Такие решения удается построить в случае коэффициентов k существенно нестепенного вида [27, 56]; когда подходящих точных автомодельных или каких-либо других инвариантных решений уравнение (1.1) не имеет. Анализ пространственно-временной структуры п.а.р. дает в ряде случаев достаточные условия отсутствия локализации в задаче (1.1)—(1.3) (см. § 4).

Доказательство существования локализации в средах с произвольными $k(u)$ проведено в § 3. Столь же общий результат об отсутствии локализации установлен в § 4. В § 5 дается краткий обзор результатов исследования режимов с обострением и эффекта локализации в нелинейных средах с объемными источниками или стоками тепла.

5. Исследование эффекта локализации в задаче (1.1)—(1.3) в каждом из рассматриваемых случаев проводится в однопараметрических семействах граничных режимов с обострением (например, таким семейством являются функции (1.5), где $n<0$ — параметр). Подобное исследование в многопараметрических семействах функций $u_1(t)$ является задачей значительно более трудной. Решение ее граничит с определением необходимых и достаточных условий локализации* в задаче (1.1)—(1.3), что сложно сделать даже для уравнения (1.6). Поясним последнее утверждение примером.

Пример 1. Граничный режим

$$u_1(t)=(T-t)^{-1/\sigma},\quad 0<t<T, \tag{1.11}$$

которому соответствует автомодельное решение (1.7), приводит к локализации тепла в задаче (1.6), (1.11). Как показывает анализ одного инвариантного решения уравнения (1.6), возможность построения которого указана в [19], при краевом условии (см. (1.11))

$$u_1(t)=(T-t)^{-1/\sigma}[\ln^2(T-t)]^{1/\sigma},\quad 0<t<T, \tag{1.12}$$

локализация тепла в задаче (1.6), (1.12) отсутствует, причем существует такая постоянная $A>0$, что для любых $0<t<T$

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} u(t,x)\geqslant A|\ln(T-t)|\xrightarrow[t\to T^-]{}+\infty.$$

В то же время других инвариантных решений, порождаемых граничными режимами с обострением, уравнение (1.6) не имеет** [19].

6. Результаты, полученные в § 3, 4, позволяют с помощью выводов работы [20] подробно изучить эффективную локализацию тепла в средах с коэффициентом теплопроводности нестепенного вида (см. также [21—23]). Эффективная локализация в задаче (1.1)—(1.3) означает, что неограниченное возрастание температуры осуществляется в области конечных размеров.

Кроме того, достаточные условия локализации (см. § 3) нетрудно,

* В ряде случаев это исследование удается провести с помощью п. а. р.

** Однако при произвольных граничных режимах оно допускает построение специального вида п. а. р.

следуя [23], переформулировать применительно к задаче Коши для уравнения (1.1). В задаче Коши локализация тепла понимается как неизменность носителя решения в течение конечного времени [1, 7—9, 13, 14] (один пример локализованного в указанном смысле решения уравнения (1.6) построен также в [24]; условие неподвижности в течение конечного времени «точки фронта» обобщенного решения уравнения (1.1) изучалось в [25, 26]).

В заключение этого параграфа отметим, что некоторые из результатов настоящей работы были ранее получены в [23].

§ 2. ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ

Ниже формулируется теорема операторного сравнения решений различных параболических уравнений, основанного на поточечных оценках старшей производной мажорирующего решения [17, 18]. Для вывода этих оценок нам понадобится следующее

Определение 2. Краевые данные задачи (1.1)—(1.3) и ее решение будем называть критическими, если всюду в $P_T(u)$ выполняется неравенство

$$u_t(t, x) \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Пусть $u_0 \in C^2$ всюду, где $u_0(x)>0$, $u_1 \in C^1(0, T)$, $u \in C^{2,4}_{t,x}(P_T(u)) \cap \cap C(Q_T)$. Тогда справедливо следующее утверждение [13—15].

Лемма 1. *В сделанных предположениях для критичности краевых данных задачи (1.1)—(1.3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:*

$$(k(u_0)\, u_0')' \geqslant 0, \quad x \in \{x \mid x \in \mathbf{R}^1_+,\ u_0(x) > 0\}, \tag{2.2}$$

$$u_1'(t) \geqslant 0, \quad 0 < t < T. \tag{2.3}$$

1. Введем в рассмотрение функцию $E(s)$, дважды непрерывно дифференцируемую при всех $s \in \mathbf{R}^1_+$, причем $E(0)=0$, $E(+\infty)=+\infty$ и $E'(s)>0$ при $s>0$. Последние условия означают, что E осуществляет взаимно-однозначное отображение $\overline{\mathbf{R}}^1_+ \to \overline{\mathbf{R}}^1_+$. Поэтому в $\mathbf{R}^1_+$ определено обратное преобразование $E^{-1}(s)$, которое удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к функции E.

Положим $E^{-1}(u(t, x)) = V(t, x)$ в Q_T. Функция V удовлетворяет уравнению

$$V_t = k(E)\, V_{xx} + \frac{[k(E)\, E']'}{E'} (V_x)^2. \tag{2.4}$$

Пусть краевые данные задачи (1.1)—(1.3) являются критическими. Тогда, как следует из (2.1), (2.4), всюду в $P_T(u)$ выполняется поточечная оценка

$$V_{xx} \geqslant -\{[k(E)\, E']'/k(E)\, E'\}(V_x)^2, \tag{2.5}$$

которая понадобится при доказательстве теоремы сравнения.

2. Рассмотрим две краевые задачи для различных параболических уравнений ($\nu=1, 2$)

$$u_t^{(\nu)} = [k^{(\nu)}(u^{(\nu)})\, u_x^{(\nu)}]_x, \quad (t, x) \in Q_T, \tag{2.6}$$

$$u^{(\nu)}(0, x) = u_0^{(\nu)}(x), \quad x \in \mathbf{R}^1_+; \quad u^{(\nu)}(t, 0) = u_1^{(\nu)}(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.7}$$

Пусть функции, входящие в формулировку задач (2.6), (2.7), удовлетворяют всем требованиям, предъявленным в § 1 к функциям k, u_0, u_1 при постановке задачи (1.1)—(1.3).

Пусть выполняются неравенства

$$u_0^{(2)}(x) \geqslant E^{-1}(u_0^{(1)}(x)), \quad x \in \mathbf{R}_+^1, \tag{2.8}$$

$$u_1^{(2)}(t) \geqslant E^{-1}(u_1^{(1)}(t)), \quad 0 < t < T. \tag{2.9}$$

Задача обобщенного (операторного) сравнения решений $u^{(2)}$ и $u^{(1)}$ состоит в определении условий, при которых $u^{(2)} \geqslant E^{-1}(u^{(1)})$ всюду в Q_T. Теорема сравнения доказывается при следующих дополнительных предположениях: $u_0^{(2)}(x) \in C^2$ всюду, где $u_0^{(2)}(x) > 0$, $u_1^{(2)}(t) \in C^1(0, T)$, $u^{(2)} \in C_{t,x}^{2,4}(P_T(u^{(2)})) \cap C(Q_T)$.

Теорема сравнения. *Пусть краевые данные задачи (2.6), (2.7), соответствующей $\nu=2$, являются критическими. Пусть, кроме того, при всех $s>0$ выполнены неравенства*

$$k^{(2)}(s) \geqslant k^{(1)}(E(s)), \tag{2.10}$$

$$[k^{(2)}(s)/k^{(1)}(E(s))E'(s)]' \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Тогда $u^{(2)} \geqslant E^{-1}(u^{(1)})$ всюду в Q_T.

При доказательстве этой теоремы существенным образом используется оценка (2.5), которой удовлетворяет решение $u^{(2)}(t, x)$. Также учитывается, что решения задач (2.6), (2.7) могут быть получены как пределы при $k \to \infty$ последовательностей гладких положительных и ограниченных решений $\{u_k^{(\nu)}(t, x)\}$ соответствующих уравнений [5], причем, как нетрудно убедиться, монотонно убывающие с ростом k последовательности бесконечно дифференцируемых функций $\{u_k^{(2)}(0, x)\}$ и $\{u_k^{(2)}(t, 0)\}$, которые равномерно сходятся на каждом ограниченном множестве соответственно к $u_0^{(2)}(x)$ и $u_1^{(2)}(t)$, могут быть выбраны критическими. Тогда при каждом $k = 1, 2, \ldots$ для функции $u_k^{(2)}(t, x)$ всюду в Q_T будет выполняться оценка типа (2.5). Кроме того, нетрудно добиться того, чтобы функции $u_{ik}^{(1)}$, $u_{ik}^{(2)}$, $i = 0, 1$, удовлетворяли соответственно неравенствам (2.8), (2.9). Тем самым теорема сравнения может быть доказана сначала в случае достаточно гладких решений $u_k^{(\nu)}$, и тогда справедливость сформулированной выше теоремы устанавливается предельным переходом $k \to \infty$ [17, 18].

§ 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА

Основным содержанием этого параграфа является доказательство существования эффекта локализации тепла в средах с произвольной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

1. В этом пункте будем предполагать, что

$$k(s) \to +\infty, \quad s \to +\infty. \tag{3.1}$$

Случай ограниченных коэффициентов $k(s)$ будет рассматриваться в п. 2.

Исследование эффекта локализации в задаче (1.1)—(1.3) проводится на основе операторного сравнения решений уравнений (1.1) и (1.6).

Определим по заданному коэффициенту k в уравнении (1.1), какие функции E обеспечивают выполнение в Q_T неравенства $u_{(\sigma)}(t, x) \geqslant E^{-1}(u(t, x))$. Как следует из теоремы сравнения (см. § 2), для этого в силу критичности функции $u_{(\sigma)}(t, x)$ необходимо найти, хотя бы при одном $\sigma>0$, решение $E(s)$ следующей системы обыкновенных дифференциальных неравенств:

$$k(s) \leqslant E^{\sigma}(s), \quad s \in \mathbf{R}_{+}^{1}, \tag{3.2}$$

$$[k(s)/E^{\sigma}(s) E'(s)]' \leqslant 0, \quad s \in \mathbf{R}_{+}^{1}. \tag{3.3}$$

Неравенства (3.2), (3.3) совпадают с условиями (2.10), (2.11), если в последних положить $k^{(1)}(s)=k(s)$, $k^{(2)}(s)=s^{\sigma}$ и заменить E на E^{-1}.

В следующей лемме даны достаточные условия разрешимости системы неравенств (3.2), (3.3).

Лемма 2. *Пусть существует такая положительная постоянная* α, *что*

$$[k^{\alpha}]'(0) < +\infty. \tag{3.4}$$

Тогда при любых $0<\sigma\leqslant\sigma_0=1/\alpha$ *существует решение* $E(s)$ *системы* (3.2), (3.3).

Замечание 1. Разрешимость системы (3.2), (3.3) зависит только от характера поведения $k(s)$ при малых $s\to 0$ (условие (3.4) является «локальным»).

Доказательство. Введем вместо E новую неизвестную функцию ω, удовлетворяющую неравенствам

$$\omega(s) > 0, \quad \omega'(s) \geqslant 0, \quad s \in \mathbf{R}_{+}^{1}, \tag{3.5}$$

и с ее помощью запишем (3.3) при некотором фиксированном $\sigma \in (0, \sigma_0]$ в следующем виде:

$$k(s)/E^{\sigma}(s) E'(s) = 1/\omega(s), \quad s \in \mathbf{R}_{+}^{1}.$$

Отсюда

$$E(s) = \left[(1+\sigma) \int_{0}^{s} k(\eta)\, \omega(\eta)\, d\eta\right]^{1/(1+\sigma)}, \quad s \in \mathbf{R}_{+}^{1}. \tag{3.6}$$

В силу предположения (3.4) и условия $\sigma \leqslant \sigma_0$ имеем

$$[k^{1/\sigma}]'(0) = \frac{1}{\sigma\alpha} \{k^{\frac{1}{\sigma}-\alpha} [k^{\alpha}]'\}(0) < +\infty.$$

Поэтому всегда можно найти функцию $\omega(s)$, удовлетворяющую неравенствам (3.5), такую, что в $\mathbf{R}_{+}^{1}$

$$\omega(s) \geqslant [k^{1/\sigma}(s)]'. \tag{3.7}$$

Покажем, что построенный указанным способом оператор (3.6) является решением системы неравенств (3.2), (3.3). Условие (3.3) справедливо в силу предположений (3.5). Неравенство (3.2) в новых обозначениях принимает вид

$$\int_{0}^{s} k(\eta) \{[k^{1/\sigma}(\eta)]' - \omega(\eta)\}\, d\eta \leqslant 0$$

и, как следует из (3.7), выполняется при всех $s \in \mathbf{R}_{+}^{1}$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть существует такая постоянная* $\alpha>0$, *что* $[k^{\alpha}(s)]'' \geqslant 0$ *всюду в* $\mathbf{R}_{+}^{1}$. *Тогда функция* $E(s)=k^{\alpha}(s)$ *является решением системы неравенств* (3.2), (3.3) *при* $\sigma=1/\alpha$.

Замечание 2. Покажем, что условие (3.4) обеспечивает выполнение неравенства (1.9). Действительно, в силу (3.4) найдется такая постоянная $M<+\infty$, что

$$k(s)\leqslant Ms^{1/\alpha},\quad 0<s<1,$$

и поэтому

$$\int\limits_0^1 [k(s)/s]\,ds\leqslant M\alpha<+\infty.$$

Отметим, что существуют такие $k(s)$, при которых система (3.2), (3.3) решения не имеет. Это относится, например, к функции $k(s)=(-\ln s)^\mu$, $\mu<-1$, определенной при $0<s<\varepsilon<1$. В то же время условие (1.9) в этом случае выполняется, поскольку

$$\int\limits_0^\varepsilon [(-\ln s)^\mu/s]\,ds=-(-\ln\varepsilon)^{\mu+1}/(\mu+1)<+\infty.$$

На основе выводов леммы 2 в следующей теореме сформулированы достаточные условия локализации тепла.

Теорема 1. *Пусть функция k удовлетворяет предположению леммы 2 и пусть E — некоторое решение системы неравенств (3.2), (3.3), отвечающее фиксированному $\sigma>0$. Тогда если краевые данные удовлетворяют неравенствам*

$$u_0(x)\leqslant E^{-1}[T^{-1/\sigma}(1-x/x_0)^{2/\sigma}],\quad 0<x<x_0,\quad u_0(x)=0,\quad x\geqslant x_0,$$

$$u_1(t)\leqslant E^{-1}[(T-t)^{-1/\sigma}],\quad 0<t<T,$$

где $x_0=[2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}$, то в задаче (1.1)—(1.3) существует локализация тепла с глубиной $l^*\leqslant x_0$. Кроме того, всюду в Q_T справедлива оценка

$$u(t,x)\leqslant E^{-1}[u_{(\sigma)}(t,x)].$$

Отметим, что в силу леммы 2 сам факт существования режимов с обострением, приводящих к локализации тепла в задаче (1.1)—(1.3), не зависит от характера поведения $k(s)$ при $s\to\infty$.

Рассмотрим два примера.

Пример 2. Пусть $k(s)=[\exp(s)-1]^\lambda$ при $s\in\mathbf{R}^1_+$, где $\lambda>0$ — фиксированная постоянная. Из следствия к лемме 2 вытекает, что оператор

$$E(s)=\exp(s)-1,\quad E^{-1}(s)=\ln(1+s)$$

является решением системы (3.2), (3.3) при $\sigma=\lambda$. Тогда из теоремы 1 заключаем, что краевые данные, удовлетворяющие неравенствам

$$u_0(x)\leqslant\ln[1+T^{-1/\lambda}(1-x/x_0)^{2/\lambda}],\quad 0<x<x_0,$$

$$u_0(x)=0,\quad x\geqslant x_0=[2(\lambda+2)/\lambda]^{1/2},$$

$$u_1(t)\leqslant\ln[1+(T-t)^{-1/\lambda}],\quad 0<t<T,$$

обеспечивают существование локализации тепла в задаче (1.1)—(1.3) с глубиной $l^*\leqslant x_0$, причем $u(t,x)\leqslant\ln[1+u_{(\lambda)}(t,x)]$ всюду в Q_T.

Пример 3. Пусть теперь $k(s)=\exp[\exp(s)-1]-1$ при $s\in\mathbf{R}^1_+$. Здесь искомым оператором, отвечающим $\sigma=1$, будет

$$E(s)=k(s),\quad E^{-1}(s)=\ln\{1+\ln(1+s)\}.$$

Отсюда если

$$u_0(x)\leqslant E^{-1}[T^{-1}(1-x/x_0)^2],\quad 0<x<x_0,$$

$$u_0(x)=0,\quad x\geqslant x_0=\sqrt{6},$$

$$u_1(t)\leqslant \ln\{1+\ln[1+(T-t)^{-1}]\},\quad 0<t<T,$$

то в задаче (1.1)—(1.3) существует локализация тепла с глубиной $l^*\leqslant\sqrt{6}$.

2. Рассмотрим теперь случай ограниченных коэффициентов $k(s)$. Без потери общности можно считать, что

$$k(s)\leqslant 1,\quad s\in \mathbf{R}^1_+. \tag{3.8}$$

В работах [21, 22, 39] изучалось воздействие граничных режимов с обострением на среду с постоянными свойствами, диффузия тепла в которой описывается линейным уравнением

$$v_t=v_{xx},\quad 0<t<T,\quad x\in\mathbf{R}^1_+ \tag{3.9}$$

(рассматривался случай $v(0, x)\equiv 0$, что несущественно в силу принципа суперпозиции). Было, в частности, установлено, что граничный режим с обострением

$$v(t,\ 0)=\exp[(T-t)^n],\quad 0<t<T, \tag{3.10}$$

где $n=-1$, приводит к эффективной локализации тепла с глубиной $L^*=2$ (см. также [20]), т. е. $v(t, x)$ при $x>2$ ограничена сверху равномерно по t, причем

$$v(t,\ x)\leqslant v(T^-,\ x)=\pi^{-1/2}\left[1-\left(\frac{2}{x}\right)^2\right]^{-1/2}\int\limits_{\frac{x^2-4}{4T}}^{\infty}\exp(-\eta)\,\eta^{-1/2}d\eta \tag{3.11}$$

и $v(t, x)\to+\infty$ при $t\to T^-$ для любых $0\leqslant x\leqslant 2$.

Воспользуемся этим результатом. В силу (3.8) оператор E сравнения решений уравнений (1.1) и (3.9) определяется из неравенства

$$[E'(s)/k(s)]'\geqslant 0,\quad s\in\mathbf{R}^1_+,$$

откуда

$$E(s)=\int\limits_0^s k(\eta)\,\omega(\eta)\,d\eta,\quad s\in\mathbf{R}^1_+, \tag{3.12}$$

где $\omega(s)$—произвольная функция, удовлетворяющая условиям (3.5). При этом следует учитывать, что должно быть выполнено условие $E(\infty)=\infty$, т. е. $\int\limits_0^\infty k(\eta)\,\omega(\eta)\,d\eta=\infty$.

Итак, пусть оператор (3.12) обеспечивает сравнение решений уравнений (1.1) и (3.9). Тогда любой граничный закон

$$u_1(t)\leqslant E^{-1}\{\exp[(T-t)^{-1}]\},\quad 0<t<T, \tag{3.13}$$

приводит к (эффективной) локализации тепла в задаче (1.1)—(1.3) с глубиной $L^*\leqslant 2$ (без потери общности полагаем $u_0(x)\equiv 0$), причем при всех $x>2$, $0<t<T$ справедлива оценка (см. (3.11))

$$u(t,\ x)<E^{-1}[v(T^-,\ x)].$$

Переход от эффективной локализации к локализации тепла в строгом смысле (см. определение 1) осуществляется следующим образом. Фиксируем произвольное $x^*>2$. Тогда $u(t, x^*)<E_0^{-1}[v(T^-, x^*)]<+\infty$ при любых $0<t\leqslant T$. Отсюда следует, что в области $(0, T)\times\{x>x^*\}$ функция $u(t, x)$ не превосходит автомодельного решения $\Theta[(x-x^*)/t^{1/2}]$ уравнения (1.1), существование которого установлено в [28]. Функция $\Theta(\zeta)$ удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} (k(\Theta)\Theta')' + \dfrac{1}{2}\Theta'\zeta = 0, & \zeta\in\mathbf{R}^1_+ \left({}' = \dfrac{d}{d\zeta}\right), \\ \Theta(0) = E^{-1}[v(T^-, x^*)], & \Theta(\infty) = 0, \end{cases}$$

причем, как показано в [28], из предположения (1.9) следует, что $\Theta(\zeta)$ является финитной функцией, т. е. $\Theta(\zeta)\equiv 0$ при всех $\zeta\geqslant\zeta_0$ (отметим, что величина $\zeta_0<+\infty$ зависит от выбора x^*).

Таким образом, установлено, что воздействие граничного режима с обострением, удовлетворяющего неравенству (3.13), приводит к локализации тепла в задаче (1.1)—(1.3), причем для глубины локализации справедлива оценка

$$l^* \leqslant \inf_{x^*>2}\{x^* + \zeta_0(x^*)T^{1/2}\} < +\infty. \tag{3.14}$$

Заметим, что возможен и обратный переход — от строгой локализации к эффективной (см. [20]). Он осуществляется на основе вывода специальной энергетической оценки (в норме $L^1(\mathbf{R}^1_+)$) разности двух решений уравнения (1.1), отвечающих одному и тому же граничному условию.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Пусть $k(s)=2s/(1+s^2)$ при $s\in\mathbf{R}^1_+$. Условие (3.8) в этом случае выполнено. Полагая $\omega(s)\equiv 1$ в (3.12), для оператора E получаем выражение

$$E(s) = \ln(1+s^2), \quad E^{-1}(s) = [\exp(s) - 1]^{1/2}.$$

Отсюда любой граничный режим вида

$$u_1(t) \leqslant \{\exp\{\exp[(T-t)^{-1}]\} - 1\}^{1/2}, \quad 0<t<T,$$

приводит к эффективной локализации с $L^*\leqslant 2$ и в силу (3.14) — к локализации в строгом смысле.

Пример 5. Пусть $k(s) = 2s\{(1+s^2)[1+\ln(1+s^2)]\}^{-1}$, $s\in\mathbf{R}^1_+$. Тогда искомым оператором, которому соответствует $\omega\equiv 1$ в (3.12), является функция

$$E(s) = \ln[1+\ln(1+s^2)], \quad E^{-1}(s) = \{\exp[\exp(s) - 1] - 1\}^{1/2}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае локализация тепла имеет место при любых граничных режимах, удовлетворяющих неравенству

$$u_1(t) \leqslant \exp\{\exp\{\exp[(T-t)^{-1}] - 1\} - 1\}^{1/2}.$$

Замечание. Исходя из результатов, полученных в [27, 56] с помощью построения приближенных автомодельных решений уравнений типа (1.1), можно утверждать, что при выполнении неравенства

$$\int_1^\infty [k(s)/s]\,ds < +\infty$$

(этому условию удовлетворяют коэффициенты k в примерах 4 и 5) к локализации (в строгом смысле или эффективной) приводит действие любых граничных режимов с обострением *.

§ 4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ

В этом параграфе через $u_{(\sigma)}(t, x)$ будет обозначаться решение уравнения (1.6), удовлетворяющее граничному условию

$$u_{(\sigma)}(t,\ 0) = (T-t)^n,\quad 0<t<T,\quad n<-1/\sigma. \tag{4.1}$$

Как установлено в [1, 7—10], в задаче (1.6), (4.1) локализация отсутствует и существует такая постоянная $A>0$, что

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} u_{(\sigma)}(t,\ x) \geqslant A(T-t)^{\frac{(1+n\sigma)}{2}} \xrightarrow[t\to T^-]{} +\infty \tag{4.2}$$

при всех $0<t<T$.

1. Определим, какие функции E обеспечивают операторное сравнение решения $u_{(\sigma)}$ уравнения (1.6) с решением задачи (1.1)—(1.3). Как следует из теоремы сравнения (см. § 2), для этого необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных неравенств

$$k(s) \geqslant E^\sigma(s),\quad s\in \mathbf{R}^1_+, \tag{4.3}$$

$$[k(s)/E^\sigma(s)E'(s)]' \geqslant 0,\quad s\in \mathbf{R}^1_+. \tag{4.4}$$

Достаточные условия ее разрешимости даны в следующем утверждении.

Лемма 3. *Пусть существует такая положительная постоянная α, что*

$$[k^\alpha]'(0) > 0. \tag{4.5}$$

Пусть выполняется условие (3.1) и, кроме того, функция $[k^\alpha]'(s)$ имеет при $s>0$ лишь конечное число точек экстремума, в которых $[k^\alpha]''(s)=0$. Тогда при $\sigma=1/\alpha$ существует решение $E(s)$ системы (4.3), (4.4).

Доказательство. Вводя функцию $\omega(s)$, удовлетворяющую условиям

$$\omega(s)>0,\quad \omega'(s)\leqslant 0,\quad s\in \mathbf{R}^1_+, \tag{4.6}$$

заменим условие (4.4) равенством (3.6). Тогда неравенство (4.3) принимает вид

$$\int_0^s k(\eta)\{[k^{1/\sigma}(\eta)]' - \omega(\eta)\}\,d\eta \geqslant 0,\quad s\in \mathbf{R}^1_+. \tag{4.7}$$

Предположение (4.5) обеспечивает возможность построения функции $\omega(s)$, удовлетворяющей условиям (4.6) и неравенству $\omega(s)\leqslant [k^{1/\sigma}(s)]'$, при достаточно малых s. Остальные предположения леммы **, как нетрудно убедиться, позволяют продолжить $\omega(s)$ в область больших значений s с сохранением условий (4.6), (4.7) так, чтобы выполнялось равенство $E(\infty)=\infty$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть существует такая постоянная $\alpha>0$, что $[k^\alpha(s)]''\leqslant 0$ при всех $s\in\mathbf{R}^1_+$. Пусть, кроме того, выполняется условие*

---

* Это же утверждение вытекает из анализа инвариантного решения уравнения (1.1) типа бегущей волны.

** Они являются только достаточными.

(3.1). *Тогда оператор* $E(s)=k^{\alpha}(s)$ *является решением системы неравенств* (4.3), (4.4) *при* $\sigma=1/\alpha$.

Замечание. Существуют такие функции k, для которых условие (4.5) не выполняется ни при каких $\alpha>0$. Это относится, например, к $k(s)=\exp(-s^{\nu})$, $\nu=\mathrm{const}<0$.

2. На основании выводов леммы 3 формулируется следующая

Теорема 2. *Пусть функция* $k(s)$ *удовлетворяет предположениям леммы* 3 *и пусть* E — *некоторое решение системы неравенств* (4.3), (4.4), *отвечающее фиксированному* $\sigma>0$. *Тогда, если*

$$u_1(t)\geqslant E^{-1}[(T-t)^n],\quad 0<t<T,$$

где $n<-1/\sigma$, *то в задаче* (1.1)—(1.3) *отсутствует локализация тепла,* $u(t,x)\to+\infty$ *при* $t\to T^-$ *всюду в* $\mathbf{R}^1_+$ *и при некотором* $A>0$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}u(t,x)\geqslant A(T-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\xrightarrow[t\to T^-]{}\infty,\quad 0<t<T.$$

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 6. Пусть $k(s)=\ln^{\lambda}(1+s)$, $s\in\mathbf{R}^1_+$; $\lambda=\mathrm{const}>0$, т. е. уравнение (1.1) имеет вид

$$u_t=[\ln^{\lambda}(1+u)u_x]_x,\quad 0<t<T,\quad x\in\mathbf{R}^1_+. \tag{4.8}$$

Нетрудно видеть, что решением неравенств (4.3), (4.4) при $\sigma=\lambda$ будет функция

$$E(s)=\ln(1+s),\quad E^{-1}(s)=\exp(s)-1,\quad s\in\mathbf{R}^1_+,$$

и поэтому к отсутствию локализации приводят любые граничные режимы вида

$$u_1(t)=\exp[(T-t)^n]-1,\quad 0<t<T, \tag{4.9}$$

где $n<-1/\lambda$. При этом найдется такая постоянная $A>0$, что

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}u(t,x)\geqslant A(T-t)^{\frac{1+n\lambda}{2}}\xrightarrow[t\to T^-]{}+\infty,\quad 0<t<T. \tag{4.10}$$

Отметим, что из анализа приближенных автомодельных решений* $u_a(t,x)$ задачи (4.8), (4.9), удовлетворяющих уравнению первого порядка

$$(u_a)_t=\frac{\ln^{\lambda}(1+u_a)}{1+u_a}[(u_a)_x]^2,\quad 0<t<T,\quad x\in\mathbf{R}^1_+$$

(конкретный вид функции u_a и оценка скорости сходимости в специальной норме $u_a\to u$ при $t\to T^-$ определены в [27, 56]), следует, что локализация тепла отсутствует при любых $n<-1/(1+\lambda)$ в (4.9), причем справедлива оценка (см. (4.10))

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}u(t,x)\geqslant B(T-t)^{\frac{1+n(1+\lambda)}{2}}\xrightarrow[t\to T^-]{}+\infty,\quad 0<t<T,$$

где $B>0$ — некоторая постоянная. При $-1/(1+\lambda)\leqslant n<0$ приближенное автомодельное решение u_a является локализованным, так что показатель $n_0=-1/(1+\lambda)$ разделяет однопараметрическое семейство (4.9) на

---

* Каких-либо точных инвариантно-групповых решений задача (4.8), (4.9) не имеет [19].

классы граничных режимов с обострением, приводящих к локализации* ($n \geqslant n_0$) или ее отсутствию ($n < n_0$) в задаче (4.8), (4.9).

Пример 7. Пусть теперь $k(s) = \ln[1+\ln(1+s)]$, $s \in \mathbf{R}^1_+$. Поскольку $k''(s) \leqslant 0$ в $\mathbf{R}^1_+$, искомым оператором является функция

$$E(s) = k(s), \quad E^{-1}(s) = \exp[\exp(s) - 1] - 1,$$

отвечающая $\sigma = 1$ в (4.3), (4.4). Отсюда граничные режимы

$$u_1(t) = \exp\{\exp[(T-t)^n] - 1\} - 1, \quad 0 < t < T, \tag{4.11}$$

приводят при $n < -1$ к отсутствию локализации в рассматриваемой задаче, причем

$$\operatorname{mes\,supp} u(t, x) \geqslant A(T-t)^{\frac{1+n}{2}} \xrightarrow[t \to T^-]{} +\infty, \quad 0 < t < T, \tag{4.12}$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная.

Из результатов [27, 56] вытекает, что к отсутствию локализации в исследуемой задаче приводят более слабые, чем (4.11), граничные режимы с обострением (см. (3.10))

$$u_1(t) \simeq \exp\{(T-t)^n |n \ln(T-t)|^{-1}\}, \quad 0 < t < T, \tag{4.13}$$

где $n < -1$, причем при некотором $A > 0$ выполняется неравенство (4.12). Предельный показатель $n_0 = -1$ в (4.13) является неулучшаемым: при $n \geqslant -1$ приближенные автомодельные решения, отвечающие граничным законам (4.13), проявляют свойство локализации.

3. В этом пункте достаточные условия отсутствия локализации получены с помощью построения приближенных автомодельных решений уравнения (1.1) [27, 56]. Как показывает анализ, проведенный в примерах 6 и 7, эти условия являются более точными по сравнению с установленными в теореме 2.

Будем считать выполненными следующие условия:

$$\int_1^\infty [k(\eta)/\eta]\, d\eta = +\infty, \tag{4.14}$$

$$\max\{0, k'(s)s/k(s)\} \to 0, \quad s \to +\infty, \tag{4.15}$$

первое из которых накладывает ограничение снизу на характер изменения функции $k(s)$ при больших s, а второе — ограничение сверху.

Определим положительую в $\mathbf{R}^1_+$ функцию $H(s)$ по формуле

$$\int_0^{H(s)} [k(\eta)/(\eta+1)]\, d\eta = s. \tag{4.16}$$

Функция H является строго возрастающей в $\mathbf{R}^1_+$, $H \in C(\overline{\mathbf{R}}^1_+) \cap C^3(\mathbf{R}^1_+)$, $H(0) = 0$ и $H(\infty) = \infty$ (последнее обеспечивается условием (4.14)). Поэтому H осуществляет взаимно-однозначное и монотонное отображение $\overline{\mathbf{R}}^1_+ \to \overline{\mathbf{R}}^1_+$.

В сделанных предположениях достаточные условия отсутствия локализации дает следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (4.14), (4.15). *Тогда граничные режимы*

$$u_1(t) = H[(T-t)^n], \quad 0 < t < T, \tag{4.17}$$

* Это утверждение строго не доказано.

при $n<-1$ приводят к отсутствию локализации в задаче (1.1)—(1.3), *причем $u(t, x)\to+\infty$ при $t\to T^-$ всюду в $\mathbf{R}_+^1$ и существует такая неотрицательная функция $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to T^-$, что*

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} u(t, x)\geqslant[\xi_0-\varepsilon(t)](T-t)^{\frac{1+n}{2}},\quad 0<t<T, \tag{4.18}$$

где $\xi_0=2(-n)^{\frac{n}{2}}(-1-n)^{-\frac{1+n}{2}}$.

Справедливость сформулированной теоремы прямо следует из оценки скорости сходимости решения задачи (1.1)—(1.3) к п. а. р., полученной в [27, 56]. Из этой же оценки выводится конкретный вид функции $\varepsilon(t)$ в (4.18). Существование п. а. р., удовлетворяющего граничному закону (4.17), обеспечивается условиями (4.14), (4.15). Исходя из результатов работ [21, 22, 27, 39, 56], можно, по-видимому, ожидать, что при $-1\leqslant n<0$ граничные режимы (4.17) приводят к локализации (в частности, таким свойством обладают соответствующие п. а. р.).

Два случая применения теоремы 3 указаны в примерах 6 и 7. Рассмотрим еще один пример, в котором функция $H(s)$ представима в явном виде.

Пример 8. Пусть

$$k(s)=\frac{(1+\lambda)\ln^{\lambda}[1+\ln(1+s)]}{1+\ln(1+s)},\quad s\in\mathbf{R}_+^1,$$

где $\lambda>0$ — заданная постоянная. Условия (4.14), (4.15) в этом случае выполнены. Нетрудно убедиться, что функция H, определяемая равенством (4.16), имеет вид

$$H(s)=\exp[\exp(s)^{\frac{1}{1+\lambda}}-1]-1,\quad s\in\mathbf{R}_+^1,$$

и поэтому, как следует из теоремы 3, к отсутствию локализации в рассматриваемой задаче приводит действие граничных режимов (см. (4.17))

$$u_1(t)=\exp\{\exp[(T-t)^n]-1\}-1,\quad 0<t<T,$$

при любых $n<-1/(1+\lambda)$, причем

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} u(t, x)\geqslant\xi_0(T-t)^{\frac{1+n(1+\lambda)}{2}}\to+\infty,\quad t\to T^-,$$

где $\xi_0=2(-n(1+\lambda))^{\frac{n(1+\lambda)}{2}}(-1-n(1+\lambda))^{-\frac{1+n(1+\lambda)}{2}}$.

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Локализация тепла связана с тем, что режимы с обострением создают и поддерживают в среде пространственные профили температуры, обладающие свойством «тепловой инерции». Это свойство наглядно проявляется при изучении эффекта локализации в задачах Коши для уравнения (1.1) [1, 7—9].

Явление локализации процесса горения в теплопроводных средах, описываемого параболическими уравнениями вида

$$u_t=[k(u)u_x]_x+Q(u),\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^1=(-\infty,\infty), \tag{5.1}$$

где $Q(u)>0$ при $u>0$ — мощность объемных источников тепла, имеет ту же физическую природу* (см., например, работы [3, 4, 29—31, 34, 35,

* Свойство локализации тепловых возмущений, связанное с наличием в среде стоков тепла (чему соответствует $Q(u)<0$ при $u<0$ в уравнении (5.1)), изучалось в [25, 53—55].

38, 41, 44, 46], в которых вопросы, связанные с локализацией, изучались при степенных функциях $k(u)$, $Q(u)$). Поэтому методы исследования, сформулированные в настоящей работе, позволяют проанализировать эффект локализации горения в нелинейных средах с произвольной зависимостью коэффициентов k, Q от температуры (некоторые результаты в этом направлении получены в [32, 33]).

В заключение укажем на ряд работ по изучению режимов с обострением в нелинейных теплопроводных средах с объемным выделением энергии [3, 4, 29—38, 40—44, 57—63, 65]. Эти исследования имеют важные приложения в физике плазмы [2, 4, 44—47, 57], в теории диссипативных структур и синергетике [48—52]. Интересным подходом при изучении явления локализации как в средах с источниками, так и со стоками является построение и анализ новых инвариантно-групповых решений [64, 65], а также нетривиальных приближенных автомодельных решений [32].

Литература

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.

2. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. N и S режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1977, № 1, с. 3—23.

3. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.

4. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—624.

5. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР, математика, 1958, т. 22, № 5, с. 667—704.

6. Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн.— ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 4, с. 703—719.

7. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте.— М., 1977.— 87 с. (Препринт/ИПМ АН СССР: № 103).

8. Михайлов А. П. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью.— М., 1977.— 26 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 64).

9. Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Плохотников К. Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой «кристалл».— М., 1977.— 50 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 22).

10. Галактионов В. А., Михайлов А. П. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности.— М., 1977.— 37 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 53).

11. Gilding B. H., Peletier L. A. On a class of similarity solutions of the porous media equation.— J. Math. Anal. Appl., 1976, vol. 55, N 2, p. 351—364.

12. Gilding B. H., Peletier L. A. On a class of similarity solutions of the porous media equation. II.— J. Math. Anal. Appl., 1977, vol. 57, N 3, p. 522—538.

13. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1451—1461.

14. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной.—М., 1979.— 60 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 21).

15. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О сравнении решений параболических уравнений.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 3, с. 586—589.

16. Калашников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бес-

конечной скоростью распространения возмущений.— Вестн. МГУ, сер. мат. мех., 1972, № 6, с. 45—49.

17. Галактионов В. А. Два метода сравнения решений параболических уравнений.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 832—835.

18. Галактионов В. А. Условия ψ-критичности и методы сравнения решений параболических уравнений. — М., 1979. — 31 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 151).

19. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492—495.

20. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1196—1204.

21. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью.— М., 1979.— 76 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 28).

22. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 2, с. 349—353.

23. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности.— М., 1979.— 33 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 181).

24. Aronson D. G. Regularity properties of flows through porous media: a caunterexample.— SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 19, N 2, p. 299—307.

25. Калашников А. С. О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры.— ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 3, с. 689—697.

26. Knerr B. F. The porous medium equation in one dimension.— Trans. Amer. Math. Soc., vol. 249, N 2, p. 381—415.

27. Галактионов В. А. О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1660—1676.

28. Atkinson F. V., Peletier L. A. Similarity profiles of flows through porous media.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1971, vol. 42, N 5, p. 369—379.

29. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333

30. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А. и др. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836—839.

31. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta$.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362—1364.

32. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.— М., 1979.— 30 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 161).

33. Галактионов В. А. Некоторые свойства решений квазилинейных параболических уравнений.— М., 1981.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 16).

34. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением.— М., 1976.— 67 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 74).

35. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. Взаимодействие тепловых структур.— М., 1978.— 78 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 77).

36. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами.—М., 1979.— 79 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 16).

37. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587—591.

38. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— М., 1979.— 64 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 29).

39. Галактионов В. А. Локализация тепла в среде с постоянной теплопроводностью.— Труды Моск. физ.-техн. ин-та, сер. Аэрофиз. и прикл. матем., 1979, с. 153—155.

40. Галактионов В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Влияние выгорания на локализацию горения и образование структур в нелинейных средах.— М., 1979.— 37 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 27).

41. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— М., 1977.— 80 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 106).
42. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Устойчивость собственных функций и эффекты переноса в неоднородной диссипативной среде.— М., 1980.— 27 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 16).
43. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Согласованные режимы горения в одной диссипативной среде с переносом.— М., 1980.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 125).
44. Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. Инерция тепла и диссипативные структуры.— В сб.: Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами. ИПМ АН СССР, 1980, с. 5—27.
45. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Возможности использования локализации тепла в режимах сжатия θ-пинча с обострением.— М., 1980.— 19 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 153).
46. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 11, с. 1925—1935.
47. Samarskii A. A. Numerical simulation in plasma physics.— Third Int. Symp. «Computing Methods in Applied Scienses and Engineering», vol. 2, Berlin: Springer-Verlag, 1979, p. 235—247.
48. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.— 404 с.
49. Пригожин И., Николис Г. Самоорганизация в открытых системах.— М.: Мир, 1979.— 354 с.
50. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Некоторые эффекты самоорганизации в физике плазмы.— М., 1980.— 29 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 122).
51. Малинецкий Г. Г. Об одном классе математических моделей, связанных с самоорганизацией.— М., 1980.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 142).
52. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Нестационарные диссипативные структуры в двухкомпонентных средах.— М., 1981.— 27 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 19).
53. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 4, с. 1048—1054.
54. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВМ и МФ. 1974, т. 14, № 4, с. 891—905.
55. Ewans L. C., Knerr B. F. Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities.— Illinois J. Math., 1979, vol. 23, N 1, p. 153—166.
56. Галактионов В. А. Приближенные автомодельные решения уравнений типа нелинейной теплопроводности.— М., 1980.— 28 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 106).
57. Самарский А. А., Курдюмов С. П. Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС.— Труды кафедры волновой и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ. М.: МГУ, 1979, № 3, с. 18—28.
58. Kaplan S. On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1963, vol. 16, N 3, p. 305—330.
59. Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$.— J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1966, Sect. 1, vol. 13, part. 2, p. 109 -124.
60. Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations.— Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1972/73, vol. 8, p. 211—229.
61. Levine H. A. Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: the method of unbounded Fourier coefficients.— Math. Ann., 1975, vol. 214, N 3, p. 205—220.
62. Itaya N. A note on the blowup-nonblowup problems in nonlinear parabolic equations.— Proc. Jap. Acad., 1979, A55, N 7, p. 241—244.
63. Галактионов В. А. Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 5, с 836—842.
64. Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком.— М., 1979.— 31 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 57).
65. Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником.— М., 1980.— 24 с. (Препринт / ИПМ АН СССР: № 31).

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 21 мая 1981 г.