

УДК 517.959

С. П. КУРДИУМОВ, Г. Г. МАЛИНЕЦКИЙ, Ю. А. ПОВЕЩЕНКО,
Ю. П. ПОПОВ, А. А. САМАРСКИЙ**ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В ТРИГГЕРНЫХ СРЕДАХ****1. ВВЕДЕНИЕ**

В последние годы интенсивно ведутся теоретические исследования структур различной природы [1—8]. В математических задачах, возникающих во многих разделах физики, химии, биологии и т. д., можно говорить о наличии структур в тех областях пространства, где процессы протекают наиболее интенсивно, вследствие чего распределения изучаемых величин имеют ярко выраженный немонотонный характер. Распространенным примером может служить система максимумов (минимумов), расположенных на относительно гладком фоне.

Большой интерес представляют диссипативные структуры, возникающие в открытых нелинейных неравновесных системах, где имеют место диссипативные процессы. Часто такие системы называют далекими от термодинамической ветви. Работы в этом направлении, получившем название синергетики или теории диссипативных структур, позволили выяснить на сравнительно простых моделях важные качественные черты сложных нелинейных явлений [2—4]. Понятие диссипативной структуры является таким же широким и содержательным, как понятия «волна» и «упорядоченность», точно его можно определить только в конкретной физической ситуации. Следуя одному из создателей синергетики И. Пригожину [2], его можно охарактеризовать следующим образом: «Между упорядоченностью, устойчивостью и диссипацией возникает в высшей степени нетривиальная связь. Чтобы четче выделить эту связь, мы будем упорядоченные конфигурации, появляющиеся вне области термодинамической ветви, называть диссипативными структурами».

Для моделей синергетики характерно то, что возникающие структуры слабо зависят от начальных и граничных условий и определяются внутренними свойствами нелинейной среды [4]. Независимость от граничных условий, а также структур друг от друга можно проиллюстрировать на примере модели тепловых структур, описываемых уравнением [4—7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k_0 u^\sigma \operatorname{grad} u) + Q(u), \quad Q(u) = q_0 u^\beta,$$

$$k_0, q_0, \sigma > 0, \quad \beta \geq \sigma + 1, \quad (1,1)$$

где u интерпретируется как температура теплопроводной среды с нелинейным коэффициентом теплопроводности $k(u) = k_0 u^\sigma$ среды, источник $Q(u)$ моделирует горение. Широкий класс начальных данных приводит к тому, что горение (выделение тепла за счет источника Q) на разви-

той стадии идет в так называемом режиме с обострением, т. е. нарастание температуры со временем характеризуется законом $\max(u(\vec{r}, t)) \sim (1 - t/t_f)^{-\frac{1}{\beta-1}} \rightarrow \infty$, где t_f называют моментом обострения. При $t \rightarrow t_f$ температура в некоторой области неограниченно возрастает и горение оказывается локализованным в некоторой области G_f , которую называют фундаментальной и вне которой среда остается холодной ($u(\vec{r}, t) = 0$, если $u(\vec{r}, 0) = 0$). Под структурами здесь понимаются локализованные в среде процессы интенсивного выделения тепла.

При $\beta > \sigma + 1$ может существовать несколько типов структур, или, как их называют [4], собственных функций среды. Эти функции связаны с автомодельными решениями уравнения (1.1) [4]. Все они, кроме первой, имеют немонотонный характер и описывают сходящиеся к центру волны горения. Если начальные данные поставлены в соответствии с высшими собственными функциями (резонансное возбуждение), то распределение температуры при росте ее значений в несколько сот раз может оставаться подобным себе [4]. Далее происходит распад на простые структуры.

Однако в рамках задачи (1.1) нельзя моделировать процессы возникновения новых структур — число максимумов в распределении функции $u(\vec{r}, t)$ здесь не превышает числа максимумов в начальном профиле [10].

Возможность моделирования эффектов возникновения структур появляется в модели брюсселятора [2, 3]

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 u_{xx} + A - (B + 1)u + u^2 v, \\ v_t &= D_2 v_{xx} + Bu - u^2 v, \end{aligned} \quad (1.2)$$

описывающей эволюцию распределений концентраций реагирующих веществ $u(x, t)$ и $v(x, t)$ в некотором классе автокаталитических реакций [2].

Основным методом анализа этой системы является вычислительный эксперимент. Он показывает, что при увеличении параметра B однородное решение системы (1.2) $u = A$, $v = B/A$ теряет устойчивость [2]. Если $D_1 \approx D_2$, то наблюдаются периодические по времени колебания, при $D_1 \ll D_2$ возникает пространственная неоднородность. В последнем случае возможно появление новых максимумов при задании монотонных начальных данных и выход на устойчивые немонотонные стационарные решения. Однако в этой задаче отсутствует явление локализации, нет независимости от краевых условий. Возмущение граничных условий, как правило, приводит к перестройке всего решения.

В настоящей работе рассматривается более общая модель, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(D_1 \operatorname{grad} u) + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + (\beta_{11}u + \beta_{12}v)(u^2 + v^2), \\ v_t &= \operatorname{div}(D_2 \operatorname{grad} v) + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + (\beta_{21}u + \beta_{22}v)(u^2 + v^2), \\ u(\vec{r}, 0) &= u^0(\vec{r}), \quad v(\vec{r}, 0) = v^0(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь возможны как локализация процессов, так и формирование структур из монотонных начальных распределений.

Будем считать, что собственные значения матрицы A — комплексно сопряженные числа с положительными действительными частями. Последнее является достаточным условием неустойчивости нулевого решения задачи (1.3). Матрица B определена отрицательно, что является достаточным условием ограниченности решения при $t \in (0, \infty)$. В работах [8, 10] показано, что модель (1.3) может обладать триггерными свойствами, т. е. иметь два однородных по пространству асимптотически устойчивых решения $\{u^*, v^*\}$, $\{-u^*, -v^*\}$ (очевидно задача (1.3) инвариантна относительно преобразования $\{u, v\} \rightarrow \{-u, -v\}$, поскольку правые части уравнений содержат только нечетные степени функций). Условия триггерности накладывают ограничения на матрицы A и B , подробно изученные в [10]. Например, эти условия выполнены, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $u^* = 1$, $v^* = 0$.

Систему уравнений (1.3) можно рассматривать как обобщение модели бруселятора. Модели типа (1.3) встречаются в задачах химической кинетики, например, при рассмотрении бистабильных реакций. В работе [11] показано, что поведение решения двух параболических уравнений в окрестности точки бифуркации удобно рассматривать, используя модельные уравнения, содержащие только линейные и кубические члены в правых частях, близкие по виду к тем, которые входят в (1.3). При такой интерпретации функции u и v могут принимать любой знак.

Задача (1.3) весьма сложна и не допускает достаточно полного аналитического исследования. Эффективным средством ее решения являются вычислительные методы, которые и используются в настоящей работе.

II. ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР. ОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим предварительно задачу (1.3) в одномерном приближении. Это позволит ввести ряд понятий, необходимых для дальнейшего анализа.

2.1. Элементарная структура. Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (1.3). Пусть начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u^0(x < a) &= -u^*, & v^0(x < a) &= -v^*, \\ u^0(x \geq a) &= u^*, & v^0(x \geq a) &= v^*. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В расчетах наблюдается быстрый выход со временем на стационарное решение. Типичный вид установившегося профиля функций u и v показан на рис. 1, а, б. Эти решения включают в себя переходную область L_ε ($c \leq x \leq d$ на рис. 1, а, б), соединяющую области постоянных фоновых значений u и v (т. е. $\{u^*, v^*\}$ и $\{-u^*, -v^*\}$).

Стационарный профиль, формирующийся в результате эволюции начального распределения (2.1), а также профиль, такой, что $u^0(x < a) = u^*$; $v^0(x < a) = v^*$; $u^0(x \geq a) = -u^*$; $v^0(x \geq a) = -v^*$, будем называть элементарными структурами. Введенное определение элементарной структуры отличается от представления, связывающего это понятие с областью пространства, где решение имеет немонотонный характер. В нашем случае элементарная структура выступает как простейший элемент, из которого можно «построить», как мы покажем ниже, широкий класс неоднородных стационарных решений. Кроме того, такое определение хорошо согласуется с тем, что с некоторой длины

переходные области слабо влияют друг на друга, поэтому каждую из них удобно рассматривать как самостоятельную структуру.

Из свойства триггерности следует, что если линейризовать правые части (1.3) в окрестности устойчивого фона, то они будут эквивалентны линейным стокам, а поэтому правые части работают как источники только в пределах переходной области.

2.2. Эффективная локализация. Характерная длина взаимодействия. Рассмотрим вопрос об эффективном взаимодействии элементар-

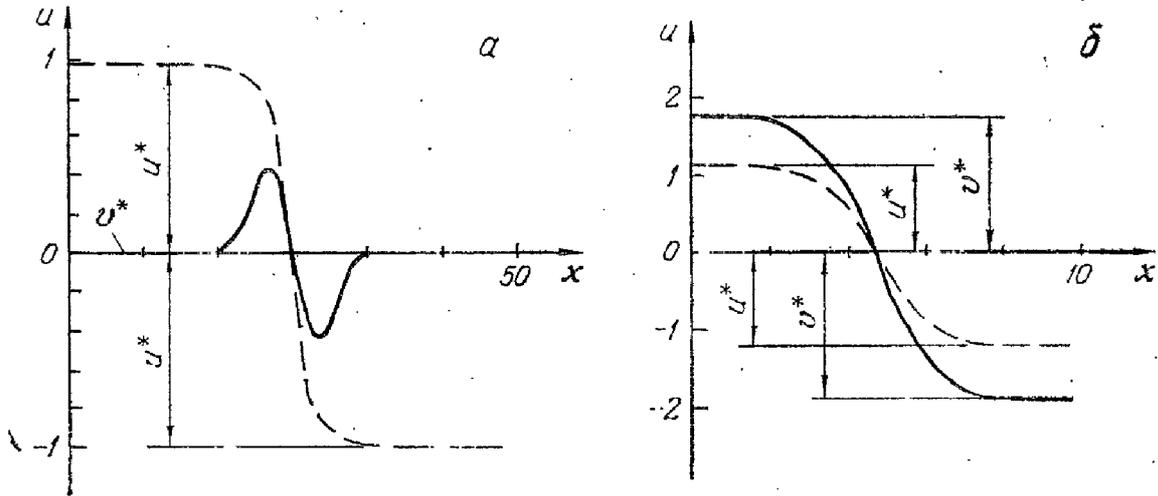


Рис. 1. Элементарная структура: $a - v \cdot 10^2$, $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0,5$, $D_2 = 2,5$; $b - A = \begin{vmatrix} 0 & 0,75 \\ 1 & 4,0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0,5$, $D_2 = 1,1$, $\epsilon = 0,03$

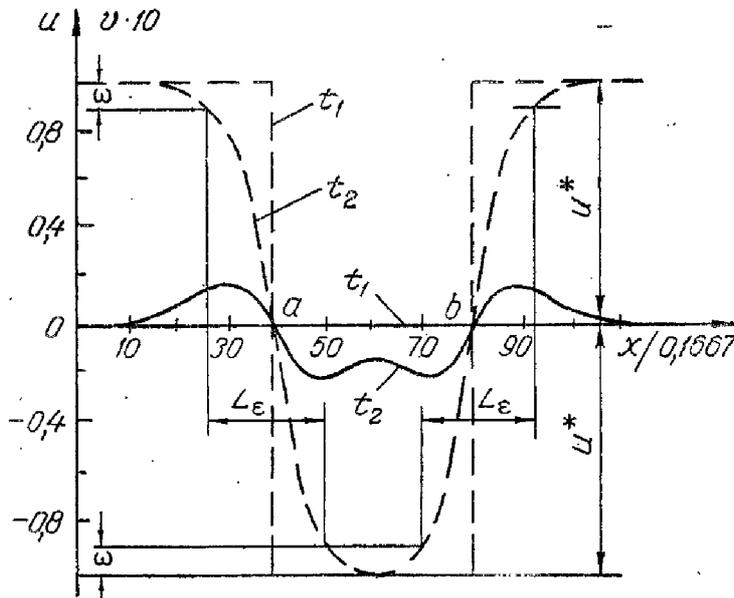


Рис. 2. Структура, состоящая из двух элементарных, в среде, где $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0,5$, $D_2 = 2,5$, $\epsilon = 0,1$

ных структур, расположенных на некотором расстоянии. Изучим эволюцию следующего начального распределения в задаче Коши:

$$\begin{aligned} u^0(x < a, x > b) &= -u^*, & v^0(x < a, x > b) &= -v^*, \\ u^0(b \geq x \geq a) &= u^*, & v^0(b \geq x \geq a) &= v^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если $b - a$ достаточно мало, то наблюдается выход со временем на устойчивый фон. Диссипативных структур не возникает. Такие начальные распределения будем называть подкритическими. Достаточное условие подкритичности для некоторого класса профилей и примеры эволюции таких распределений даны в работе [8].

Однако если $b-a \geq L_{in}(D_1, D_2, A, B)$, где L_{in} называется длиной взаимодействия, то эволюция качественно меняется: возникает стационарное неоднородное распределение типа «провала» на устойчивом фоне.

Будем, далее, увеличивать длину $b-a$. При этом возникает стационарное распределение, состоящее из «плато», где $u(x)$ и $v(x)$ близки к u^* , v^* , и переходных областей (такая структура показана на рис. 2). Увеличивая $(b-a)$, мы практически не меняем переходные (диффузионные) области. Более того, каждая из них с ростом $b-a$ стремится к элементарной структуре. Их отличие от элементарной структуры обусловлено взаимным влиянием. Это позволяет говорить о том, что, начиная с некоторого характерного расстояния, диффузионные области эффективно не взаимодействуют. (В [8] введена количественная характеристика этого явления — длина эффективной локализации.)

Если интерпретировать u , v как отклонения от равновесных значений концентраций в бистабильной реакции [2], то диссипативная структура может представлять собой локализованный участок, где реакция идет более интенсивно, чем в остальной среде. Обратим внимание на аналогию между структурами в триггерных средах и тепловыми структурами, под которыми также понимались локализованные процессы интенсивного выделения тепла [4]. Однако если локализация тепловых структур обусловлена нелинейностью источника, то здесь эффективная локализация на одном из устойчивых фонов связана с действием стоков.

Заметим, что характер краевого условия практически не влияет на структуры, возникающие в среде, если эта структура расположена на достаточно большом расстоянии от границы. В силу этого увеличение размеров области в (1.3) не изменит возникающих структур.

2.3. Примеры эволюции распределений, приводящих к формированию диссипативных структур. Рассмотрим некоторые начальные профили, приводящие к формированию структур. Из предшествующего рассмотрения следует, что начальные распределения вида

$$\begin{aligned} u(-\infty < x \leq a_1) &= -u^*, & v(-\infty < x \leq a_1) &= -v^*, \\ u(a_1 < x \leq b_1) &= u^*, & v(a_1 < x \leq b_1) &= v^*, \end{aligned}$$

$$u(b_n < x < \infty) = -u^*, \quad v(b_n < x < \infty) = -v^*,$$

где $|a_k - b_k| \gg L_{in}$, $|a_{k+1} - b_k| \gg L_{in}$, должны приводить к появлению решений, состоящих из $2k$ переходных областей, близких к элементарным структурам. Однако при этом число экстремумов функции u не изменяется по сравнению с начальным распределением. Возникает вопрос, возможно ли появление в рассматриваемой среде новых максимумов или формирование сложных структур, когда начальное распределение монотонно.

На рис. 3 приведен пример стационарного профиля, возникающего в результате развития возмущения, поставленного на стационарном устойчивом фоне $u=v=0$. Видим, что у функции $u(x, t)$ появилось два, а у $v(x, t)$ — семь новых максимумов, так что вся рассматриваемая область оказалась заполнена структурами. Наблюдаемая картина близка к процессу возникновения структур в модели брюсселятора [2, 3].

Расчеты показывают, что в зависимости от начального распределения в рассматриваемой области могут возникать различные стационарные структуры. Они отличаются числом максимумов, размерами возникающих плато и другими характеристиками. Если изменять размер области при фиксированном начальном распределении, то в областях малого размера это распределение подкритично, начиная с некоторого раз-

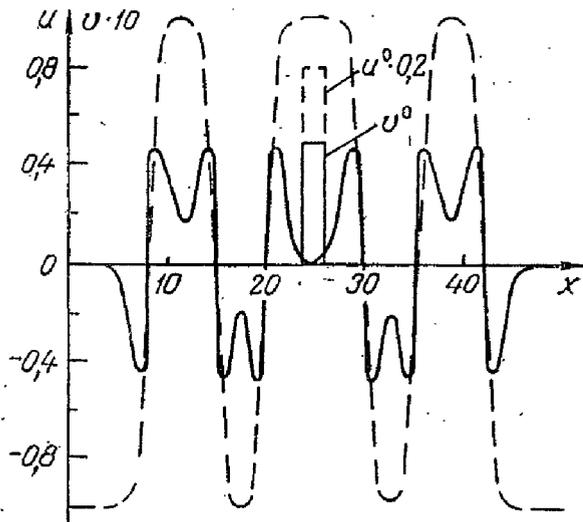


Рис. 3. Стационарное распределение, возникающее в результате эволюции финитного начального профиля, поставленного на неустойчивом фоне, в нелинейной среде с параметрами $D_1=0,5$, $D_2=2,5$, $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$,

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

мера появляются структуры. Увеличение области может приводить не только к количественному изменению числа максимумов, но и к качественному усложнению области перехода с одного устойчивого фона на другой. Например, в стационарном распределении функции v появляются отрицательные максимумы.

III. DISSIPATIVE STRUCTURES IN TRIGGER MEDIA IN MULTIDIMENSIONAL CASE

3.1. Эволюция финитных начальных распределений, поставленных на устойчивом фоне. В многомерном случае появляется новый элемент — форма диссипативной структуры.

Выясним в рамках задачи (1.3) влияние размеров и геометрии области и характера начального распределения. Для этого рассмотрим эволюцию начальных профилей в квадратной области $G = G_1 + G_2$:

$$u(x, y, 0) = 1; \quad v(x, y, 0) = 0,1;$$

$$(x, y) \in G_1 \{G_1: L \geq x \geq 0,39L; \quad 0 \leq y \leq 0,66L\},$$

$$u(x, y, 0) = -1; \quad v(x, y, 0) = -0,1;$$

$$(x, y) \in G_2 \{G_2: L \geq x \geq 0; \quad L \geq y \geq 0\}.$$

Будем изменять размер области L (в одинаковом отношении вдоль осей x и y) при фиксированных остальных параметрах. По аналогии с одномерным случаем было бы естественно ожидать, что если диаметр области G_1 не превышает длины взаимодействия L_{in} , то распределение подкритично, а если размеры всюду превышают L_{in} , то будет формироваться стационарная диссипативная структура. Вычислительный эксперимент дает более сложную картину.

Пусть $L = 12,3 = 5L_g$ (величина L_g — эффективная ширина переходной области (см. рис. 2)). Вначале идет перестройка начального распределения: увеличивается ширина переходной области (см. рис. 2). Характерное время этого процесса $\tau_g \sim L_g^2 / \min\{D_1, D_2\}$, при этом $A_u \sim 10^2 \cdot A_v$ (где $A_u = \max_{x, y \in G} u(x, y) - \min_{x, y \in G} u(x, y)$, $A_v = \max_{x, y \in G} v(x, y) - \min_{x, y \in G} v(x, y)$).

Качественно рассматриваемый этап эволюции эквивалентен стадии перестройки начального профиля, выделенной при анализе взаимодействия тепловых структур в многомерном случае [5, 6].

Далее при $t > \tau_g$ область $G_g^+ \{G_g^+: (x, y) \in G_g^+, \text{ если } |u(x, y) - u^*| < \varepsilon, |v(x, y) - v^*| < \varepsilon\}$, где решение близко к устойчивому фону $\{u^*, v^*\}$,

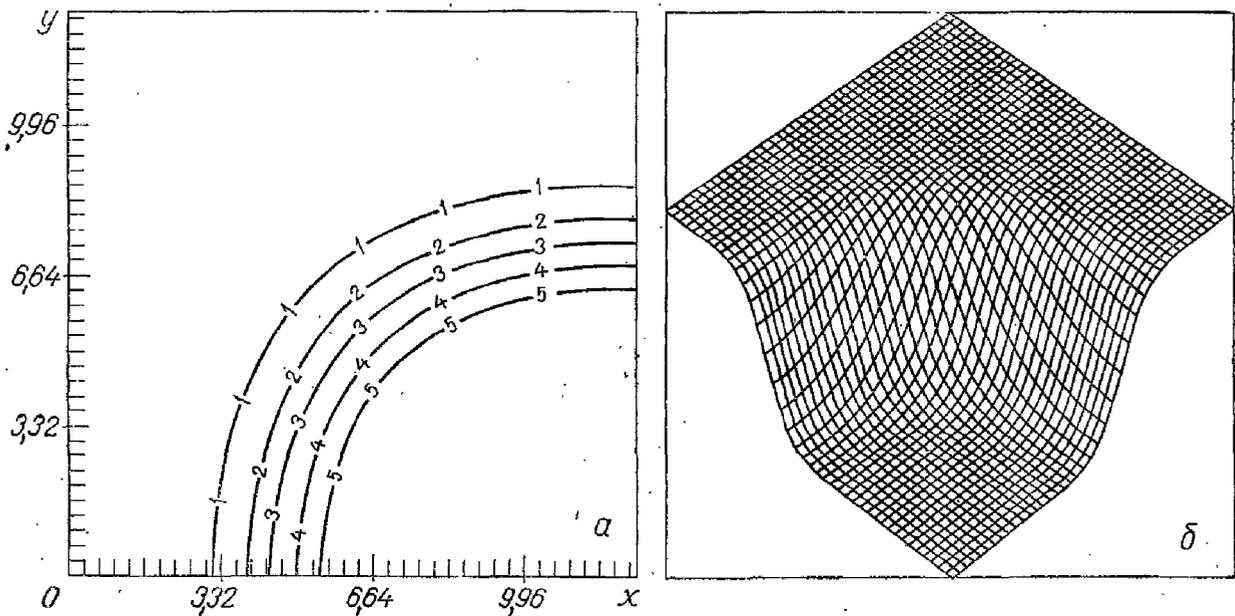


Рис. 4. Эволюция финитного начального возбуждения на устойчивом фоне в среде с параметрами $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0,5$, $D_2 = 1,5$. Распределение функции u на момент времени $t = 16,4$.

продолжает сокращаться. Границу области G_ε^+ при $\varepsilon = 0,1 u^*$ дает пятая линия уровня (см. рис. 4, а). На рис. 4 приведены линии уровня и видо-вая проекция профиля функции $u(x, y)$ на момент времени $t = 16,4$. Область G_ε^+ продолжает сокращаться, несмотря на то что ее размеры по обоим направлениям превышают L_{in} .

Замечательной особенностью этой стадии процесса является то, что структура переходной области всюду по нормали к границе длительное время остается одинаковой и постоянной для различных точек границы, несмотря на то что кривизна контура мняется от точки к точке. Область G_ε^+ медленно симметризуется, стремясь к кругу, радиус которого уменьшается со временем. Расчеты показывают, что увеличение параметра L качественно не изменяет процесса, выход на стационарное решение не наблюдается ни при каких значениях L . Независимость переходной области от начальных данных для широкого класса распределений, явление эффективного не взаимодействия структур на расстояниях, больших L_{in} , и времена существования, которые могут на несколько порядков превышать диффузионные, позволяют рассматривать изучаемый процесс как эволюцию нестационарной диссипативной структуры.

3.2. Симметрия и формирование стационарных структур.

Расчеты, приведенные выше, создают впечатление, что в рассматриваемой среде не могут возникнуть стационарные двумерные распределения. Однако это не так. В этом пункте построим пример такой структуры. Важную роль при этом будут играть соображения симметрии.

Рассмотрим эволюцию начального распределения, показанного на рис. 5. В заштрихованной области $u^0 = u^*$; $v^0 = 0,1 u^*$, в незаштрихованной — $u^0 = -u^*$; $v^0 = -0,1 u^*$. Ход процесса может быть предсказан, если

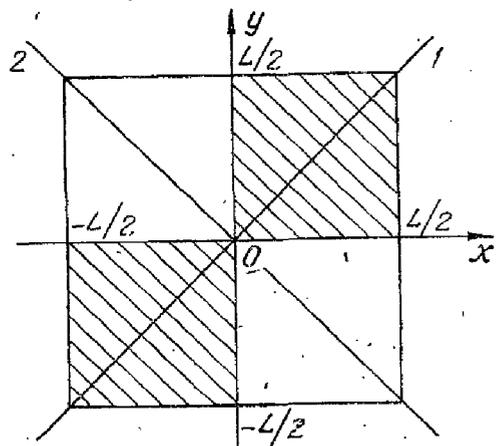


Рис. 5.

принять во внимание соображения симметрии. Остановимся на них подробнее. Нетрудно видеть, что операторы симметрии P_i переводят начальный профиль, показанный на рис. 5, в себя:

$$\begin{aligned} P_1 u(x, y) &= u(y, x), & P_2 u(x, y) &= u(-y, -x), \\ P_3 u(x, y) &= u(-x, -y), & P_4 u(x, y) &= -u(-x, y), \\ P_5 u(x, y) &= -u(x, -y) \end{aligned}$$

(для функции v преобразования аналогичны). Решение (1.3) должно обладать теми же симметриями, что и начальные данные. Чтобы убедиться в этом, докажем следующую лемму.

Л е м м а. Пусть $\vec{u}(r, t)$ является решением краевой задачи

$$u_t + Lu = 0, \quad (3.1)$$

$$\vec{r} \in G, \quad Fu|_{u \in \Gamma} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0$$

(в частности, L и F могут быть нелинейными операторами, а u — вектор-функцией). Пусть P — оператор симметрии, не зависящий от t и удовлетворяющий операторным равенствам:

$$P(0) = 0, \quad PF - FP = 0, \quad PL - LP = 0. \quad (3.2)$$

Тогда если $Pu_0 = u_0$ и решение задачи (3.1) единственно, то $Pu = u$.

Действительно, применим оператор P к (3.1). Имеем

$$0 = Pu_t + PLu = (Pu)_t + LPu.$$

Аналогично $PFu = FPu = 0$. Итак, если $\vec{u}(r, t)$ — решение задачи (3.1), то и Pu является решением этой задачи. Далее из условия $Pu_0 = u_0$ и требования единственности следует, что $Pu = u$, что и требовалось доказать.

Пользуясь леммой, нетрудно убедиться, что решение задачи (1.3) с начальным распределением, представленным на рис. 5, должно быть инвариантно относительно преобразований P_1 — P_5 . Отсюда следует, что ряд процессов с нарушением симметрии идти не может (например, рассматриваемое распределение не может быть подкритичным, поскольку выход на устойчивый фон нарушит симметрию относительно преобразований P_4 и P_5). Поэтому естественно ожидать формирования структуры, удовлетворяющей всем указанным выше требованиям симметрии, поскольку нулевой фон является неустойчивым.

Проведенные расчеты подтверждают высказанные соображения (см. рис. 6). Всюду далее в этой работе приводятся линии уровня $u(x, y) = A_{u \min} + kA_u/7$, где $k=1$ —6, $A_u = A_{u \max} - A_{u \min}$ (см. рис. 6, а, 7, а, б).

Для функции $u(x, y)$ формируется переходная область, вдали от центра совпадающая с элементарной структурой (см. рис. 6). В последующие моменты времени распределение остается стационарным и инвариантным относительно преобразований P_1 — P_5 (расчет проведен до $t=40,8$).

Заметим, что важную роль при численном моделировании таких процессов играют пространственная изотропность используемых в расчетах алгоритмов [9] и представление положительных и отрицательных чисел в используемых типах данных.

Из тех же соображений следует, например, что начальные профили вида $u(0, 0) = a\delta(0, 0)$, $v(0, 0) = b\delta(0, 0)$, $u(L, L) = -a\delta(L, L)$, $v(L, L) = -b\delta(L, L)$ независимо от a и b приводят к формированию стационарной структуры, расположенной вдоль диагонали квадрата, идущей из

$(0, L)$ в $(L, 0)$. (Здесь важен не вид начальных данных, а наличие соответствующей симметрии.) Такая картина и наблюдается в расчетах.

По аналогии с подходом, развитым для модели (1.1) [5, 6], исследуемый процесс удобно рассматривать как взаимодействие структур, каждая из которых по отдельности лишь метастабильно устойчива и существует конечное время. Однако если ранее взаимодействие структур и наличие пространственной симметрии только увеличивало времена жизни структур в несколько раз [5, 6], то здесь формируются стационарные распределения, устойчивые относительно определенного класса возмущений.

3.3. Эффект рождения структур. Большой интерес в синергетике представляют процессы формирования новых структур. Чтобы выяснить

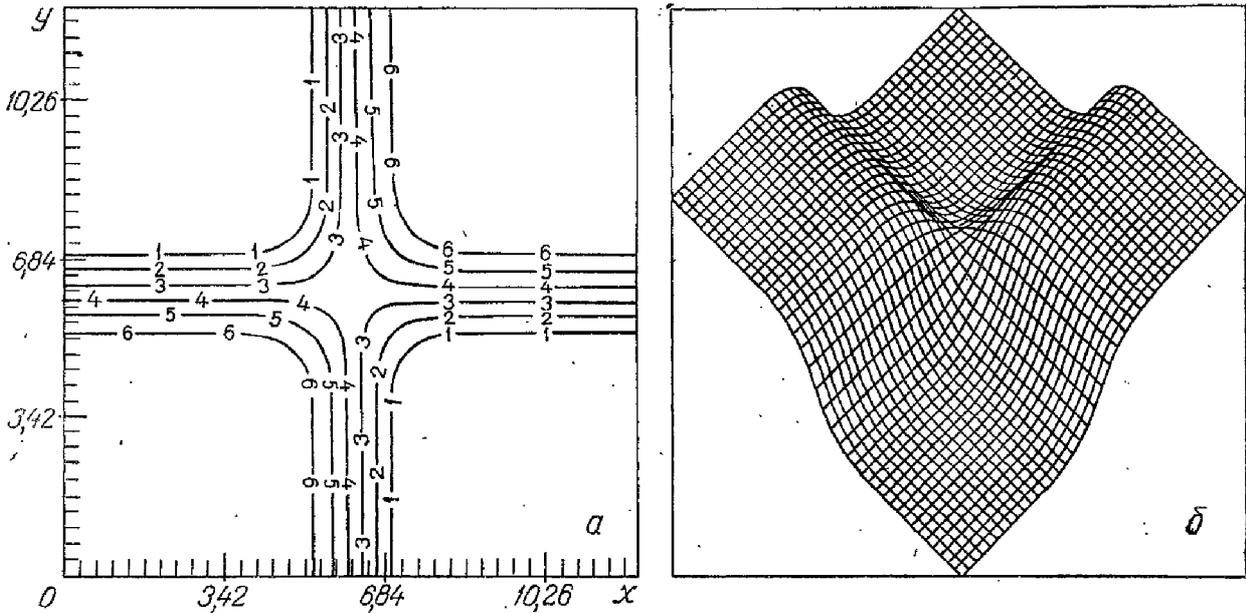


Рис. 6. Стационарная структура в двухмерном случае в среде с параметрами $D_1=0,5$,

$$D_2=2,5, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}. \text{ Распределение функции } u$$

их особенности в рамках исследуемой модели в пространственно-многомерном случае, рассмотрим эволюцию финитных начальных распределений на однородном нулевом фоне $u(x, y) = 0, v(x, y) = 0$. Пусть $D_1 = 0,180, D_2 = 0,576; u = 4,0(x-0,3), v = 0,5(x-0,3)$ при $0 \leq x \leq 0,3, y \leq x$, $u = 4,0(y-0,3); v = 0,5(y-0,3)$ при $y > x; u(x, y) = v(x, y) = 0$ в остальной части пространства.

Задача (1.3) решается в квадрате со стороной $L=12,3$. Вначале амплитуда профиля $u(x, y)$ быстро падает. От центра идет цилиндрически симметричная волна. Общее число возникающих экстремумов увеличивается, однако немонотонности, появившиеся в предыдущие моменты времени, меняются слабо. Несмотря на нестационарность процесса распределение по-прежнему представляет собой систему диффузионных областей и участков, где функция $u(x, y)$ практически постоянна (см. рис. 7, а, в). Ширина диффузионной области везде, кроме фронта ее формирования, практически одинакова и близка к ширине переходной области элементарной структуры (см. рис. 7, а, в). Это позволяет говорить о том, что процесс формирования структур воспроизводится на соседних пространственных масштабах. При этом наблюдаемое в расчетах наличие четкой границы области, где происходит воспроизведение диссипативных структур, позволяет говорить о волновом характере процесса и отождествлять эту границу с фронтом распространяющейся волны.

Далее цилиндрическая симметрия, которой обладало начальное распределение, теряется — начинают сказываться форма области и гранич-

ные условия. Локализация влияния краевых условий на данной стадии процесса не наблюдается (см. рис. 7, а). Внешне эволюция функции $v(x, y)$ имеет более сложный характер. Однако здесь можно выделить следующие закономерности. С появлением переходной области функции $u(x, y)$ формируются один максимум и один минимум в распределении функции $v(x, y)$. Последний возникающий экстремум имеет наибольшую амплитуду. По-прежнему $A_u \sim 10^2 A_v$. Значения функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на горизонтальных плато стремятся к одному из устойчивых фонов. Дальнейшая эволюция распределения может быть понята исходя из результатов рассмотренной выше задачи о финитных распределениях на устойчивом фоне. Из этой задачи следует, что время существования структур меньшего радиуса (в нашем случае наиболее близких к точкам $(0, 0)$ и (L, L)) должно быть меньше, чем у структур с большим радиусом. При этом в силу эффективной локализации соседние структуры должны развиваться независимо. Именно такая картина и наблюдается в вычислительном эксперименте (см. рис. 7, б, г).

Развитые выше представления об эффективной локализации и сохра-

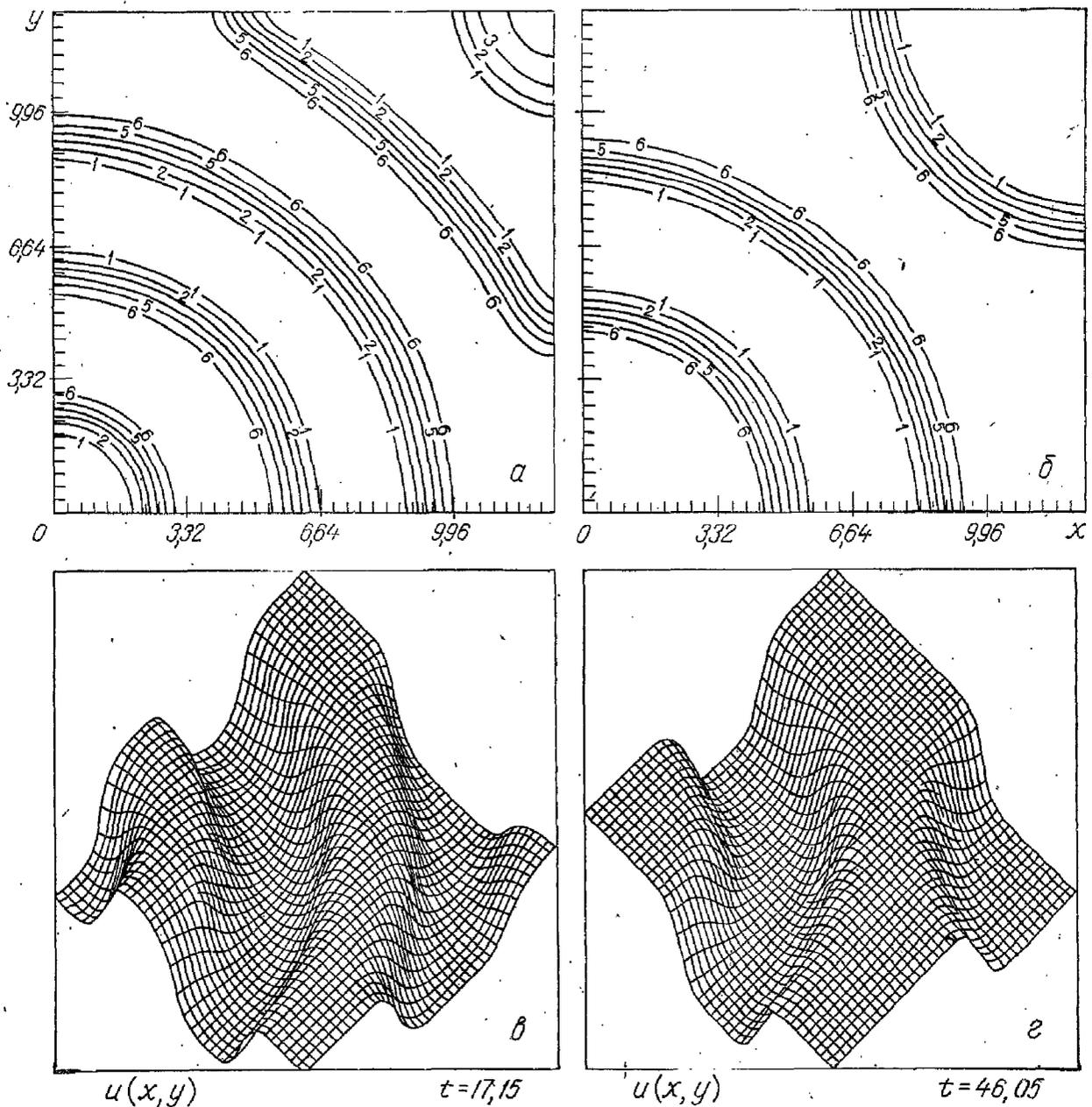


Рис. 7. Эволюция возбуждения на неустойчивом фоне в среде с параметрами $D_1=0,18$,

$$D_2=0,576; A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

нешие структуры переходной области позволяют количественно оценить время существования возникших цилиндрически-симметричных структур. Поскольку в рассматриваемой области $A_u \gg A_v$, естественно предположить, что компонента v подстраивается под изменение компоненты u , т. е. процесс «схлопывания» распределения $u(x, y)$ является ведущим. В этих предположениях $\tau_{\text{схл}} = R^2/2D_1$, где R — начальный радиус цилиндрически-симметричной структуры. Эта оценка хорошо согласуется с результатами рассматриваемого расчета (с точностью 5—10%).

Процесс спонтанного возникновения структур представляется наиболее интересным в рамках изучаемой модели, поскольку задача (1.3) при этом описывает рождение, развитие и последующее вырождение структур. Подчеркнем принципиальное отличие рассматриваемой задачи от ее пространственно-одномерного плоского аналога, где соответствующие начальные данные приводили к появлению стационарных структур. Приведенный расчет дает также понимание того, как могут быть построены более сложные стационарные структуры из простых, рассмотренных, например, в п. III. В частности, они могут представлять собой эволюцию начального профиля, являющегося многосвязной областью, в которой расстояние между внутренним и внешним контуром везде превышает длину взаимодействия.

Вместе с тем полученные результаты позволяют поставить ряд новых задач. Какие структуры возникнут, если начальное возбуждение, поставленное на неустойчивом фоне, обладает симметрией (например, инвариантно относительно P_4 и P_5)? Как зависит число рождающихся структур от размеров пространственной области? Каковы особенности этого процесса в трехмерном случае? Ответы на эти вопросы были бы важным шагом в понимании свойств нелинейных диссипативных сред.

Литература

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1974.
2. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
3. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
4. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. — М., 1979 (Препринт/ИПМ АН СССР: № 29).
5. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А. и др. Взаимодействие тепловых структур. — М., 1978 (Препринт/ИПМ АН СССР: № 77).
6. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А. и др. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах. — Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836—839.
7. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Некоторые эффекты самоорганизации в физике плазмы. — М., 1980 (Препринт/ИПМ АН СССР: № 122).
8. Малинецкий Г. Г. Стационарные локализованные диссипативные структуры в триггерных двухкомпонентных средах. — М., 1981 (Препринт/ИПМ АН СССР: № 78).
9. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. ТЕКОН. Пакет программ для решения тепловых задач. — М., 1978 (Препринт/ИПМ АН СССР: № 65).
10. Малинецкий Г. Г. Об одном классе математических моделей, связанных с самоорганизацией. — М., 1979 (Препринт/ИПМ АН СССР: № 142).
11. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the Formation of Dissipative Structures in Reaction. — Diffusion Systems. Progress of Theoretical Physics, 1975, vol. 54, N 3.