

УДК 517.949

А. А. САМАРСКИЙ, В. Ф. ТИШКИН, А. П. ФАВОРСКИЙ, М. Ю. ШАШКОВ

ОПЕРАТОРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Введение. Численное моделирование на основе конечно-разностных методов является в настоящее время наиболее действенным способом решения нелинейных задач математической физики [1—3].

Среди требований, предъявляемых к разностным схемам, можно выделить два основных типа. К первому относятся требования аппроксимации и устойчивости, которые обуславливают сходимость приближенного решения при достаточно малых шагах сетки.

Требования другого типа состоят в перенесении важнейших свойств исходных дифференциальных уравнений на их дискретный аналог — разностную схему. Здесь в первую очередь следует выделить свойства консервативности [2] и полной консервативности [3] схемы. Эти требования становятся особенно важными при расчетах на реальных сетках.

В настоящее время существует ряд общих конструктивных подходов, таких, как интегро-интерполяционный [2], вариационный [4] и др., которые позволяют строить разностные схемы, обладающие отмеченными выше свойствами.

Вместе с тем, независимо от выбранного подхода, получение разностной схемы можно в конечном итоге рассматривать как построение разностных аналогов основных дифференциальных операторов математической физики grad , div , rot .

Разностные аналоги операторов grad , div , rot были, по-видимому, впервые введены в работах [5, 6] путем их непосредственной аппроксимации конечными разностями для ортогональных систем координат и прямоугольных сеток.

Вместе с тем преимущество операторного представления разностных схем становится наиболее ощутимым в случае произвольных косоугольных сеток, при этом особую роль играют вопросы согласования свойств разностных операторов, обеспечивающие консервативность и полную консервативность соответствующих схем. Возможность построения согласованных между собой разностных аналогов операторов div и grad на основе вариационного подхода для произвольных сеток отмечалась в [7].

Настоящая работа ставит своей целью изучение общей возможности построения разностных аналогов основных дифференциальных операторов на произвольных неортогональных сетках. Универсальность и конструктивность такого подхода заключается в возможности получения разностных схем для широкого класса уравнений.

Выполнение требований консервативности и полной консервативности является следствием введенного в работе понятия согласованности разностных операторов. Это понятие основано на требовании выполнения аналогов некоторых соотношений векторного анализа и служит конструктивной основой для построения системы согласованных раз-

ностных аналогов основных операторов математической физики. Построенные таким образом разностные операторы допускают образование повторных операций. При этом получающиеся операторы второго порядка имеют дивергентный вид [1, 2].

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

п. 1. Большинство уравнений математической физики можно записать в терминах дифференциальных операторов первого порядка grad, div, rot. Поэтому и при построении разностных схем целесообразно использовать соответствующие разностные аналоги, которые по аналогии удобно обозначать GRAD, DIV, ROT. При таком подходе свойства разностных схем аналогично дифференциальному случаю будут определяться свойствами этих операторов.

п. 2. Как известно, в дифференциальном случае операторы grad и div связаны соотношением

$$\int_V u \operatorname{div} \mathbf{W} dV + \int_V (\mathbf{W}, \operatorname{grad} u) dV = \oint_S u (\mathbf{W}, \mathbf{n}) dS, \quad (1.1)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V , \mathbf{n} — внешняя нормаль к S , u — произвольная скалярная функция, а \mathbf{W} — произвольная вектор-функция. Из равенства (1.1) следует ряд соотношений, имеющих непосредственный физический смысл.

Рассмотрим, например, как используется (1.1) при преобразовании уравнений гидродинамики. Как известно [3], закон сохранения полной энергии следует из уравнения движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность, \mathbf{v} — вектор скорости, P — давление, и уравнения для удельной внутренней энергии

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

где ε — удельная внутренняя энергия, следующим образом. Умножая уравнение (1.2) скалярно на \mathbf{v} , складывая с (1.3) и интегрируя по V , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_V \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon \right) \rho dV \right] &= - \left[\int_V (\operatorname{grad} P, \mathbf{v}) dV + \int_V P \operatorname{div} \mathbf{v} dV \right] = \\ &= - \oint_S P (\mathbf{v}, \mathbf{n}) dS, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где последнее равенство справедливо в силу (1.1).

Уравнение (1.4) означает, что изменение полной энергии в отсутствии внешних воздействий равно работе поверхностных сил.

Очевидно, что если определять операторы GRAD и DIV независимо друг от друга, то аналог соотношения (1.1) может, вообще говоря, оказаться невыполненным, что приведет к потере полной консервативности соответствующих схем.

п. 3. Определим понятие согласованности. Будем называть разностные операторы DIV, GRAD, ROT согласованными между собой, если для них выполнены разностные аналоги соотношений (см. [8])

$$\oint_S \varphi(\mathbf{n}, \mathbf{A}) dS = \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} dV + \int_V (\mathbf{A}, \operatorname{grad} \varphi) dV, \quad (1.5)$$

$$\oint_S (\mathbf{n}, [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]) dS = \int_V (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV - \int_V (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}) dV, \quad (1.6)$$

$$\oint_S \varphi(\mathbf{C}, [\mathbf{n} \times \mathbf{A}]) dS = \int_V \varphi(\mathbf{C}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV - \int_V (\mathbf{C}, [\mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi]) dV, \quad (1.7)$$

здесь S — поверхность, ограничивающая объем V , \mathbf{n} — внешняя нормаль к S , \mathbf{C} — произвольная вектор-функция такая, что $\operatorname{rot} \mathbf{C} \equiv 0$.

Заметим, что если операторы GRAD, DIV и ROT определены, то согласованный с ними разностный аналог операции $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ можно ввести исходя из соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= [\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \\ \operatorname{rot}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \mathbf{A} \cdot \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для распространения операции div на тензорные объекты можно воспользоваться тождеством

$$\operatorname{div}(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{C}) = \nabla \mathbf{C} \cdot \mathbf{\Pi} + (\mathbf{C}, \operatorname{div} \mathbf{\Pi}),$$

где $\mathbf{\Pi} = \{\Pi_{ih}\}$ — тензор второго ранга, $\mathbf{\Pi}^T = \{\Pi_{ih}^T\} = \{\Pi_{hi}\}$ — транспонированный тензор, $\nabla \mathbf{C}$ — градиент вектора \mathbf{C} .

Имея набор согласованных операторов DIV, GRAD, ROT, можно строить разностные схемы и для уравнений высших порядков. При этом необходимо образовывать разностные аналоги повторных операций $\operatorname{div} \operatorname{grad}$, $\operatorname{grad} \operatorname{div}$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$.

Кроме того, желательно выполнение соотношений $\operatorname{ROT} \operatorname{GRAD} \equiv 0$ и $\operatorname{DIV} \operatorname{ROT} \equiv 0$, которые в ряде случаев имеют непосредственный физический смысл.

Итак, нашей основной задачей является построение операторов с согласованными областями определения, допускающими образование повторных операций, и для которых были бы выполнены разностные аналоги соотношений (1.5) — (1.7).

п. 4. Для достижения поставленной цели поступим следующим образом. Выберем какой-либо из трех операторов и аппроксимируем его непосредственно. Назовем такой разностный оператор определяющим. Далее с помощью разностных аналогов тождеств (1.5) — (1.7) будем строить остальные разностные операторы, которые будем называть определяемыми. При этом одному дифференциальному оператору могут соответствовать, вообще говоря, несколько разностных аналогов, действующих в различных пространствах сеточных функций.

Отметим, что вид определяемых операторов существенно зависит от выбора аппроксимации интегральных выражений в (1.5) — (1.7).

Наряду с соотношениями (1.5) — (1.7) в качестве условий согласования могут использоваться соответствующие вариационные принципы [7, 9, 10].

Перечислим основные этапы, которые необходимо реализовать при построении разностных схем описанным выше способом. Во-первых, следует задать способ дискретизации скалярных и векторных величин, во-вторых, выбрать определяющий оператор и аппроксимировать его непосредственно. Третий этап — выбор способа согласования и аппрок-

симация соответствующих интегральных выражений и получение согласованных операторов на основе выбранных условий согласования.

Осуществление указанных этапов дает возможность записать разностную схему в виде, аналогичном дифференциальному случаю, то есть с заменой операций grad, div, rot на GRAD, DIV, ROT.

§ 2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ВЕЛИЧИН

п. 1. Мы ограничимся случаем, когда все величины зависят от двух пространственных переменных, и для простоты проведем рассмотрение для декартовых координат x, y .

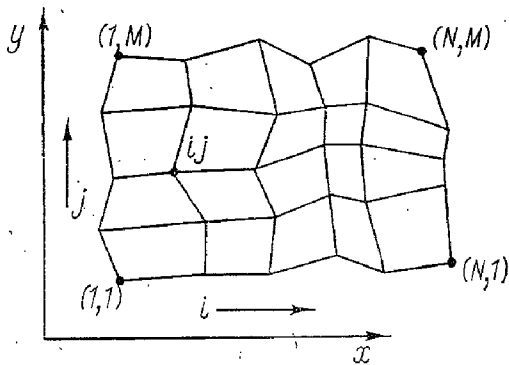


Рис. 1

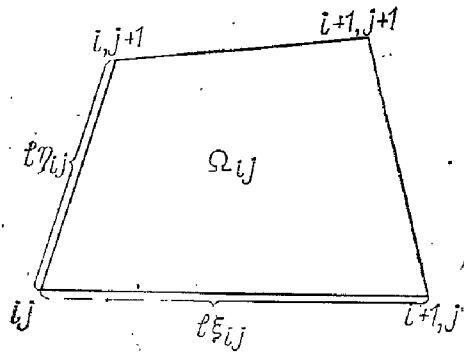


Рис. 2

Пусть в исходной области Ω , лежащей в плоскости (x, y) , введена некоторая четырехугольная сетка, топологически эквивалентная прямоугольной сетке в квадрате (рис. 1).

Узлы такой сетки снабдим двумя индексами $(ij) : 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$. Ячейку сетки, имеющую вершинами узлы $(ij), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1)$, обозначим Ω_{ij} (рис. 2).

Стороны ячейки Ω_{ij} обозначим $l_{\xi_{ij}}$ и $l_{\eta_{ij}}$ (рис. 2). Так как мы будем рассматривать вектор-функции, имеющие все три компоненты, то удобно ввести пространственную сетку. Свяжем с каждой ячейкой Ω_{ij} прямую призму V_{ij} , для которой эта ячейка является нижним основанием (рис. 3).

Отметим, что выбор высоты призм произволен в силу независимости искомых величин от z ; высоту призмы обозначим $l_{\zeta_{ij}} = a = \text{const}$. Боковую грань $AA'DD'$ призмы V_{ij} обозначим $S_{\xi_{ij}}$, грань $AA'BB'$ — $S_{\eta_{ij}}$; нижнее основание Ω_{ij} будем иногда обозначать $S_{\zeta_{ij}}$. Ниже для простоты изложения условимся обозначать призмы и их объемы одними и теми же символами, то же касается граней и их площадей, а также ребер и их длин.

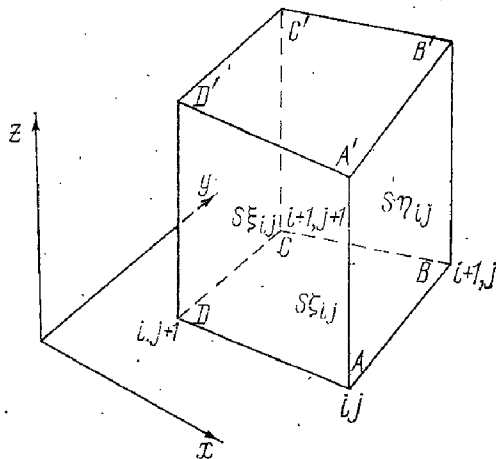


Рис. 3

п. 2. При дискретизации скалярных величин используем два способа. Пространство скалярных сеточных функций, определенных в узлах, обозначим HK , при этом значение сеточной функции u в узле обозначим через u_{ij} . Пространство скалярных сеточных функций, заданных в ячейках пространственной сетки V_{ij} , обозначим HC , при этом

значения функций будем снабжать индексом соответствующей ячейки.

п. 3. Для сеточного описания вектор-функции \mathbf{A} используем значения проекций AX, AY, AZ на координатные оси x, y, z соответственно.

Если компоненты AX, AY, AZ заданы в узлах, то соответствующее пространство сеточных вектор-функций будем обозначать \mathcal{HK} , индексация у величин AX, AY, AZ такая же, как и у скалярных функций из \mathcal{HK} . В случае, когда величины AX, AY, AZ измеряются в ячейках пространственной сетки, пространство сеточных вектор-функций обозначим \mathcal{HC} .

п. 4. При построении согласованных разностных операторов на основе соотношений (1.5) — (1.7) нам придется аппроксимировать выражения для скалярного и векторного произведения. В соответствии с формулами векторного анализа для двух сеточных вектор-функций $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{HK}$ скалярное произведение в узле ij аппроксимируем так:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B})_{ij} = AX_{ij}BX_{ij} + AY_{ij}BY_{ij} + AZ_{ij}BZ_{ij}. \quad (2.1)$$

Векторное произведение $\mathbf{C}_{ij} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_{ij}$ определим в узле по формуле

$$\begin{aligned} CX_{ij} &= AY_{ij}BZ_{ij} - BY_{ij}AZ_{ij}; & CY_{ij} &= AZ_{ij}BX_{ij} - AX_{ij}BZ_{ij}; \\ CZ_{ij} &= AX_{ij}BY_{ij} - AY_{ij}BX_{ij}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если сеточные вектор-функции $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{HC}$, то формулы (2.1), (2.2) задают скалярное и векторное произведения в ячейке.

§ 3. ПРИМЕР СИСТЕМЫ СОГЛАСОВАННЫХ ОПЕРАТОРОВ

п. 1. Рассмотрим случай, когда скалярные функции берутся из \mathcal{HC} . Векторные функции нам понадобятся как из \mathcal{HC} , так и из \mathcal{HK} . В качестве определяющего выберем оператор DIV :

$$\text{DIV} : \mathcal{HK} \rightarrow \mathcal{HC}. \quad (3.1)$$

Построение этого оператора будем проводить на основе определения

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\mathbf{A}, \mathbf{n}) dS}{V}, \quad (3.2)$$

здесь V — объем, содержащий точку определения, S — поверхность, ограничивающая V , \mathbf{n} — внешняя нормаль к S . При построении оператора DIV в качестве V в формуле (3.2) выберем призму V_{ij} , тогда поверхность S будет состоять из объединения граней этой призмы. Площади этих граней задаются так:

$$\begin{aligned} S\zeta_{ij} &= S_{ABCD} = \Omega_{ij}; & S\alpha'_{ij} &= S_{A'B'C'D'} = \Omega_{ij}; & S\xi_{ij} &= S_{AA'DD'} = l_{ij}a; \\ S\eta_{ij} &= S_{AA'BB'} = l_{ij}a; \end{aligned}$$

объем призмы равен $\Omega_{ij}a$.

Разобьем интеграл по поверхности призмы на сумму интегралов по граням. Выпишем выражения для нормалей к этим граням, например, нормаль к грани $S\xi_{ij}$ имеет вид

$$\mathbf{n}\xi_{ij} = \left\{ \frac{-(y_{ij+1} - y_{ij})}{l_{ij}}; \frac{x_{ij+1} - x_{ij}}{l_{ij}}; 0 \right\},$$

остальные нормали задаются аналогично.

В силу двумерности интегралы по нижнему и верхнему основаниям призмы взаимно уничтожаются. Для поверхностного интеграла по грани $S_{\xi_{ij}}$ получаем

$$\int_{S_{\xi_{ij}}} (\mathbf{A}, \mathbf{n}) dS \cong 0,5a \{ (AX_{i+1} + AX_{ij}) (y_{ij} - y_{i+1}) + (AY_{i+1} + AY_{ij}) (x_{i+1} - x_{ij}) \},$$

здесь AX_{ij} , AY_{ij} — значения в узлах сетки, и аналогичное выражение для грани $S_{\eta_{ij}}$:

$$\int_{S_{\eta_{ij}}} (\mathbf{A}, \mathbf{n}) dS \cong 0,5a \{ (AX_{i+1} + AX_{ij}) (y_{i+1} - y_{ij}) + (AY_{i+1} + AY_{ij}) (x_{ij} - x_{i+1}) \}.$$

В результате приходим к следующему выражению:

$$(\text{DIV } \mathbf{A})_{ij} = \frac{0,5}{\Omega_{ij}} \{ [(AX_{ij} - AX_{i+1, j+1}) (y_{i+1} - y_{ij+1}) - (AX_{i+1} - AX_{ij+1}) (y_{ij} - y_{i+1, j+1})] - [(AY_{ij} - AY_{i+1, j+1}) (x_{i+1} - x_{ij+1}) - (AY_{i+1} - AY_{ij+1}) (x_{ij} - x_{i+1, j+1})] \}. \quad (3.3)$$

Отметим, что если для площади Ω_{ij} использовать формулу

$$\Omega_{ij} = 0,5 [(x_{ij} - x_{i+1, j+1}) (y_{i+1} - y_{ij+1}) - (y_{ij} - y_{i+1, j+1}) (x_{i+1} - x_{ij+1})],$$

то (3.3) можно записать более компактно

$$(\text{DIV } \mathbf{A})_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k, l=0, 1} \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{i+k, j+l}} AX_{i+k, j+l} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{i+k, j+l}} AY_{i+k, j+l} \right). \quad (3.4)$$

Таким образом, определяющий оператор DIV построен.

п. 2. Перейдем теперь к построению определяемого оператора GRAD. Так как нам необходимо уметь образовывать повторные операции DIV · GRAD и GRAD · DIV, то оператор GRAD должен действовать по правилу:

$$\text{GRAD} : HC \rightarrow \mathcal{HK}. \quad (3.5)$$

Построение GRAD будем проводить на основе разностного аналога тождества (1.5), при этом возьмем $\varphi \in HC$, $\mathbf{A} \in \mathcal{HK}$. Первый интеграл в правой части (1.5) аппроксимируем так:

$$\int_V \varphi \text{div } \mathbf{A} dV \cong \sum_{HC} \varphi_{ij} (\text{DIV } \mathbf{A})_{ij} V_{ij}, \quad (3.6)$$

здесь суммирование ведется по индексам, соответствующим ячейкам. В соответствии с формулой (2.1) второй интеграл аппроксимируем следующим образом:

$$\int_V (\mathbf{A}, \text{grad } \varphi) dV \cong \sum_{HK} (\mathbf{A}, \text{GRAD } \varphi)_{ij} VK_{ij}, \quad (3.7)$$

здесь суммирование ведется по индексам, соответствующим узлам, а VK_{ij} — объем узла:

$$VK_{ij} = 0,25 \sum_{k, l=0, 1} V_{i-k, j-l} \quad \text{для } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M,$$

здесь под V_{0j} , V_{Nj} , V_{i0} , V_{iM} понимаются объемы, связанные с фиктивными ячейками, прилегающими к границе. Так, например, узлы ячейки Ω_{0j} задаются так:

$$(x_{1j}, y_{1j}); (x_{1j}, y_{1j}); (x_{1j+1}, y_{1j+1}); (x_{1j+1}, y_{1j+1}).$$

Аппроксимируем поверхностный интеграл в правой части (1.5):

$$\begin{aligned} \oint_S \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{n}) dS \cong & 0,5a \sum_{i=1}^{N-1} \{ \varphi S \eta_{i1} [(AX_{i+1,1} + AX_{i1}) (y_{i+1,1} - y_{i1}) + \\ & + (AY_{i+1,1} + AY_{i1}) (x_{i1} - x_{i+1,1})] - \varphi S \eta_{iM} [(AX_{i+1,M} + AX_{iM}) \times \\ & \times (y_{i+1,M} - y_{iM}) + (AY_{i+1,M} + AY_{iM}) (x_{iM} - x_{i+1,M})] \} + \\ & + 0,5a \sum_{j=1}^{M-1} \{ \varphi S \xi_{1j} [(AX_{1j+1} + AX_{1j}) (y_{1j} - y_{1j+1}) + \\ & + (AY_{1j+1} + AY_{1j}) (x_{1j+1} - x_{1j})] - \varphi S \xi_{Nj} [(AX_{Nj+1} + AX_{Nj}) \times \\ & \times (y_{Nj} - y_{N,j+1}) + (AY_{N,j+1} + AY_{Nj}) (x_{N,j+1} - x_{Nj})] \}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

здесь для описания функции φ на границе введены величины $\varphi S \xi$, $\varphi S \eta$, заданные своими значениями в серединах соответствующих граничных граней.

Собирая коэффициенты при величинах AX , AY , приходим к следующему определению компонент G_X , G_Y вектора $\mathbf{G} = \text{GRAD } \varphi$:

$$GX_{ij} = - \frac{1}{VK_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \frac{\partial V_{i-k,j-l}}{\partial x_{ij}} \varphi_{i-k,j-l}, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (3.9)$$

$$GY_{ij} = - \frac{1}{VK_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \frac{\partial V_{i-k,j-l}}{\partial y_{ij}} \varphi_{i-k,j-l}, \quad j = 2, \dots, M-1.$$

Выражения для компонент вектора $\text{GRAD } \varphi$ в граничных узлах имеют тот же вид, если под φ_{0j} и т. д. понимать $\varphi S \xi$ и т. д.

п. 3. Определяемый оператор

$$\text{ROT} : \mathcal{H}K \rightarrow \mathcal{H}C \quad (3.10)$$

построим при помощи разностного аналога соотношения (1.7), где возьмем $\varphi \in \mathcal{H}C$, $\mathbf{A} \in \mathcal{H}K$, при этом для аппроксимации оператора grad используем формулы (3.9).

Положим сначала $\mathbf{C} = (1, 0, 0)$, тогда $(\mathbf{C}, \text{rot } \mathbf{A}) = RX$, здесь RX — компонента вектора ротора $\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{A} = (RX, RY, RZ)$. Первый интеграл в правой части (1.7) аппроксимируем так:

$$\int_V \varphi RX dV \cong \sum_{\mathcal{H}C} \varphi_{ij} RX_{ij} V_{ij}. \quad (3.11)$$

Учитывая формулы (2.2) для векторного произведения и формулы (3.9), второй интеграл аппроксимируем следующим образом:

$$\int_V (\mathbf{C}, [\mathbf{A} \times \text{grad } \varphi]) dV \cong - \sum_{\mathcal{H}K} AZ_{ij} GY_{ij} VK_{ij}. \quad (3.12)$$

Перейдем теперь к аппроксимации поверхностного интеграла. Запомним, что так как значения $\varphi S \xi$, $\varphi S \eta$ входят только в объемный интег-

рал (3.12) и не входят в (3.11), аппроксимация вектора $\mathbf{P} = [n \times \mathbf{A}]$ на границе не может быть произвольной и фактически так же, как $R\mathbf{X}$, задается способом аппроксимации оператора grad.

Запишем

$$\int_S \varphi(\mathbf{C}, [n \times \mathbf{A}]) dS \cong 0,5a \sum_{i=1}^{N-1} \{ \varphi S \eta_{i1} (PX \eta_{i+1,1} + PX \eta_{i1}) l_{\xi_{i1}} + \\ + \varphi S \eta_{iM} (PX \eta_{i+1,M} + PX \eta_{iM}) l_{\xi_{iM}} \} + \\ + 0,5a \sum_{j=1}^{M-1} \{ \varphi S \xi_{1j} (PX \xi_{1j+1} + PX \xi_{1j}) l_{\eta_{1j}} + \varphi S \xi_{Nj} (PX \xi_{Nj+1} + \\ + PX \xi_{Nj}) l_{\eta_{Nj}} \}, \quad (3.13)$$

здесь $PX\xi$, $PX\eta$ — значения проекции PX вектора P , заданные на соответствующих гранях.

Собирая коэффициенты при φ_{ij} , получаем равенство

$$RX_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{i+k,j+l}} AZ_{i+k,j+l}, \quad i=1, \dots, N-1, \\ j=1, \dots, M-1. \quad (3.14)$$

Собирая коэффициенты при $\varphi S\xi$, $\varphi S\eta$, получаем

$$PX\xi_{ij} = \pm \frac{0,5}{l_{\eta_{ij}}} (AZ_{i+1,j} + AZ_{ij}) (x_{i+1,j} - x_{ij}), \quad i=1, N, \\ (3.15)$$

$$PX\eta_{ij} = \pm \frac{0,5}{l_{\xi_{ij}}} (AZ_{i+1,j} + AZ_{ij}) (x_{i+1,j} - x_{ij}), \quad j=1, M.$$

Выбирая далее в равенстве (1.7) векторы $\mathbf{C} = (0, 1, 0)$ и $\mathbf{C} = (0, 0, 1)$, получим аналогичным образом выражения

$$RY_{ij} = - \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{i+k,j+l}} AZ_{i+k,j+l} \quad (3.16)$$

$$RZ_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \left\{ -AX_{i+k,j+l} \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{i+k,j+l}} + AY_{i+k,j+l} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{i+k,j+l}} \right\} \quad (3.17)$$

и выражения типа (3.15) для компонент $PY\xi$, $PY\eta$ и $PZ\xi$, $PZ\eta$.

Таким образом, оператор ROT построен, его компоненты задаются соотношениями (3.14), (3.16), (3.17).

п. 4. Нам понадобится еще один разностный аналог оператора rot:

$$\mathcal{R}OT : \mathcal{H}C \rightarrow \mathcal{H}K. \quad (3.18)$$

Для его построения используем разностный аналог соотношения (3.6), где возьмем $\mathbf{A} \in \mathcal{H}K$, $\mathbf{B} \in \mathcal{H}C$. Аппроксимируем интегралы по объему:

$$\int_V (\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{A}) dV \cong \sum_{\mathcal{H}C} (BX_{ij}RX_{ij} + BY_{ij}RY_{ij} + BZ_{ij}RZ_{ij}) V_{ij}, \quad (3.19)$$

$$\int_V (\mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{B}) dV \cong \sum_{\mathcal{H}K} (AX_{ij}\mathcal{R}X_{ij} + AY_{ij}\mathcal{R}Y_{ij} + AZ_{ij}\mathcal{R}Z_{ij}) VK_{ij}. \quad (3.20)$$

Здесь $\mathcal{R}X$, $\mathcal{R}Y$, $\mathcal{R}Z$ — компоненты вектора $\mathcal{R} = \mathcal{R}OT \mathbf{B}$, определенные в узле. Поверхностный интеграл аппроксимируем так:

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{n}, [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]) dS \cong & 0,5a \sum_{i=1}^{N-1} \{ ((AY_{i+1,1} + AY_{i1}) BZ_{\eta_{i1}} - \\ & - (AZ_{i+1,1} + AZ_{i1}) BY_{\eta_{i1}}) (y_{i+1,1} - y_{i1}) + ((AZ_{i+1,1} + AZ_{i1}) BX_{\eta_{i1}} - \\ & - (AX_{i+1,1} + AX_{i1}) BZ_{\eta_{i1}}) (x_{i1} - x_{i+1,1}) \} + \{ ((AY_{i+1M} + AY_{iM}) BZ_{\eta_{iM}} - \\ & - (AZ_{i+1M} + AZ_{iM}) BY_{\eta_{iM}}) (y_{iM} - y_{i+1M}) + ((AZ_{i+1M} + AZ_{iM}) BX_{\eta_{iM}} - \\ & - (AX_{i+1M} + AX_{iM}) BZ_{\eta_{iM}}) (x_{i+1M} - x_{iM}) \} + \\ & + 0,5a \sum_{j=1}^{M-1} \{ ((AY_{1j+1} + AY_{1j}) BZ_{\xi_{1j}} - (AZ_{1j+1} + AZ_{1j}) BY_{\xi_{1j}}) (y_{1j} - y_{1j+1}) + \\ & + ((AZ_{1j} + AZ_{1j+1}) BX_{\xi_{1j}} - (AX_{1j+1} + AX_{1j}) BZ_{\xi_{1j}}) (x_{1j+1} - x_{1j}) \} + \\ & + \{ ((AY_{Nj+1} + AY_{Nj}) BZ_{\xi_{Nj}} - (AZ_{Nj+1} + AZ_{Nj}) BY_{\xi_{Nj}}) (y_{Nj+1} - y_{Nj}) + \\ & + ((AZ_{Nj+1} + AZ_{Nj}) BX_{\xi_{Nj}} - (AX_{Nj+1} + AX_{Nj}) BZ_{\xi_{Nj}}) (x_{Nj} - x_{Nj+1}) \}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь для описания вектор-функции \mathbf{B} на границе введены величины BX_{ξ} , BX_{η} и т. д., аналогичные величинам PX_{ξ} , PX_{η} и т. д. в формуле (3.13).

Собирая коэффициенты при AX , AY , AZ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}X_{ij} &= -\frac{1}{VK_{ij}} \sum_{k,l=0,1} BZ_{i-k,j-l} \frac{\partial V_{i-k,j-l}}{\partial y_{ij}}, \\ \mathcal{R}Y_{ij} &= \frac{1}{VK_{ij}} \sum_{k,l=0,1} BZ_{i-k,j-l} \frac{\partial V_{i-k,j-l}}{\partial x_{ij}}, \\ \mathcal{R}Z_{ij} &= \frac{1}{VK_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \left(BX_{i-k,j-l} \frac{\partial V_{i-k,j-l}}{\partial y_{ij}} - BY_{i-k,j-l} \frac{\partial V_{i-k,j-l}}{\partial x_{ij}} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Эти формулы верны и на границе с учетом оговорок, аналогичных сделанным относительно формулы (3.9).

п. 5. Таким образом, система согласованных операторов DIV , $GRAD$, ROT и $\mathcal{R}OT$ построена. Учитывая (3.3), (3.5), (3.10), (3.18), заключаем, что возможно образование следующих повторных операций: $DIV \cdot GRAD$; $GRAD \cdot DIV$; $ROT \cdot \mathcal{R}OT$; $\mathcal{R}OT \cdot ROT$; $DIV \cdot \mathcal{R}OT$; $ROT \times GRAD$.

Непосредственно из способа построения следует, что $(DIV \times GRAD)^* = DIV \cdot GRAD$ и $(ROT \cdot \mathcal{R}OT)^* = ROT \cdot \mathcal{R}OT$ и, кроме того, эти операторы имеют дивергентный вид [1]. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$DIV \cdot \mathcal{R}OT \mathbf{B} \equiv 0; \quad ROT \cdot GRAD \varphi \equiv 0.$$

Заметим, что эти тождества следуют из способа получения системы согласованных операторов и свойств разностных аналогов скалярных и векторных произведений.

п. 6. Из формул (1.8) следует, что имеет место соотношение

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0,5 \{ \text{grad}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) - [\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B}] - [\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}] - \text{rot}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] - \\ - \mathbf{A} \cdot \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{div} \mathbf{A} \}.$$

В соответствии с этой формулой для $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{HK}$ можно записать следующее приближенное выражение для вектора $\mathbf{N} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ в узле:

$$\mathbf{N}_{A,B} = 0,5 \{ \text{GRAD}(\mathbf{A}, \mathbf{B})_* - [\mathbf{A} \times (\text{ROT} \mathbf{B})_*] - [\mathbf{B} \times (\text{ROT} \mathbf{A})_*] - \\ - \text{ROT}([\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_{**}) + \mathbf{A}(\text{DIV} \mathbf{B})_* - \mathbf{B}(\text{DIV} \mathbf{A})_* \}. \quad (3.23)$$

Здесь звездочка означает усреднение соответствующих ячеечных величин на узел, а две звездочки — усреднение узловых величин на ячейку, так например:

$$((\mathbf{A}, \mathbf{B})_*)_{ij} = 0,25 \sum_{k,l=0,1} (\mathbf{A}, \mathbf{B})_{i-k, j-l}; \quad ([\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_{**})_{ij} = \\ = 0,25 \sum_{k,l=0,1} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_{i+k, j+l}.$$

Непосредственно из (3.23) следует разностное соотношение

$$(\mathbf{A}, \mathbf{N}_{A,A}) = \left(\mathbf{A}, \text{GRAD} \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{A})_*}{2} \right).$$

Выполнение этого соотношения тесно связано с сохранением кинетической энергии жидкости в процессе переноса.

п. 7. Приведенные в п. 5 свойства построенных операторов позволяют представить любую сеточную вектор-функцию из \mathcal{HK} в виде ортогонального разложения

$$\mathbf{A} = \text{GRAD} \varphi + \text{ROT} \mathbf{B},$$

где $\varphi \in \mathcal{HC}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{HC}$. Подобное разложение было получено в [5] для случая прямоугольных сеток.

§ 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

п. 1. При построении системы согласованных операторов в качестве определяющего можно выбрать и оператор GRAD. Это особенно удобно, если $\varphi \in \mathcal{HK}$, тогда

$$\text{GRAD} : \mathcal{HK} \rightarrow \mathcal{HC}.$$

Определяемые операторы $\text{DIV} : \mathcal{HC} \rightarrow \mathcal{HK}$; $\text{ROT} : \mathcal{HC} \rightarrow \mathcal{HK}$; $\text{ROT} : \mathcal{HK} \rightarrow \mathcal{HC}$ строятся соответственно на основе соотношений (3.5), (3.7), (3.6).

Выбор оператора ROT в качестве определяющего дает еще одну систему согласованных операторов.

п. 2. Аппроксимация определяющих операторов, очевидно, следует из способа их введения. Что касается аппроксимации определяемых операторов, то в каждом конкретном случае она должна являться предметом специального рассмотрения.

Нетрудно показать, что разностные операторы, построенные в § 3, аппроксимируют соответствующие дифференциальные операторы с первым порядком по h при естественных ограничениях на кривизну сетки. Дивергентный вид операторов второго порядка позволяет использовать результаты общей теории [2] для доказательства сходимости разностных схем для соответствующих уравнений.

п. 3. В заключение отмстим, что согласованные разностные операторы, полученные вариационным методом, использовались при построении разностных схем для уравнений теплопроводности [9], [11], диффузии магнитного поля [10], [12] и гидродинамики [4], [7]. Примеры прикладных расчетов можно пайти в [13], [14].

Литература

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.—М.: Наука, 1974.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
3. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики.—М.: Наука, 1975.—352 с.
4. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике.—Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 6, с. 1285—1287.
5. Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I, II.—ЖВМ и МФ, 1964, т. 4, № 3, с. 449—465; № 4, с. 649—659.
6. Крылов А. Л. Модели с конечным числом степеней свободы для некоторого класса задач математической физики (разностные схемы с законом сохранения).—Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 3, с. 572—575.
7. Фаворский А. П. Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики.—Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1308—1321.
8. Корн Т., Корн Г. Справочник по математике.—М.: Наука, 1977.—832 с.
9. Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках.—ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 2, с. 401—421.
10. Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационно-потокосые разностные схемы для расчета диффузии магнитного поля.—Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 6, с. 1388—1391.
11. Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационно-разностные схемы для уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках.—Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 6, с. 1342—1345.
12. Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений диффузии электромагнитного поля.—М., 1979.—60 с. (Препринт/ИПМ АН СССР: № 179).
13. Гамалий Е. Г., Розанов В. Б., Самарский А. А. и др. Гидродинамическая устойчивость сжатия сферических лазерных мишеней.—ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 2 (8), с. 459—471.
14. Гамалий Е. Г., Гасилов В. А., Лебо И. Г. и др. Спонтанные магнитные поля в сферической плазме при двухстороннем лазерном облучении.—М., 1980.—18 с. (Препринт/ФИ АН СССР: № 122).

*Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР*

*Поступила в редакцию
17 февраля 1981 г.*