


97



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

препр.
И-88

А.А. Самарский, Е.Ф. Тихкин, А.П. Фаворский,
М.Ю. Шапков.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ
АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАЦИЙ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Препринт № 97 за 1981 г.

Москва.

АННОТАЦИЯ

На основе метода опорных операторов построены разностные аналоги операций: дивергенция тензора и градиент вектора в случае сферической симметрии.

Построенные операторы использованы для получения разностных схем упруго-пластических течений.

СОДЕРЖАНИЕ

	<u>Стр.</u>
Введение.....	4
§ 1. Последовательность построения разностных операторов	4
§ 2. Вспомогательные сведения из тензорного исчисления	8
§ 3. Дискретизация	8
§ 4. Аппроксимация операции дивергенция тензора.	9
§ 5. Аппроксимация операции градиент вектора.	12
§ 6. Аппроксимация уравнений динамики сплошной среды в сферически симметричном случае.	13
Список литературы	16

Введение

1. Большинство уравнений математической физики можно сформулировать в терминах дифференциальных операторов первого порядка $\text{grad } \varphi$, $\text{div } \vec{A}$, $\text{rot } \vec{A}$, $\text{grad } \vec{A} = \nabla \vec{A}$ и $\text{div } \hat{\sigma}$ здесь φ - скаляр, \vec{A} - вектор, $\hat{\sigma}$ - тензор. Поэтому и при построении разностных схем целесообразно использовать соответствующие разностные аналоги операторов первого порядка, входящих в исходные уравнения. Тогда свойства разностных схем, аналогично дифференциальному случаю, будут определяться свойствами этих операторов.

2. Для получения согласованной системы разностных операторов в работах [1-3] был предложен метод "опорных" операторов. В этих же работах была построена согласованная система основных операторов векторного анализа, эти разностные операторы обозначаются через $\text{DIV } \vec{A}$, $\text{GRAD } \varphi$, $\text{ROT } \vec{A}$.

Целью настоящей работы является распространение указанного подхода на тензорные объекты и получение разностных аналогов операций: дивергенция тензора $\text{DIV } \hat{\sigma}$ и градиент вектора - $\text{GRAD } \vec{A}$.

3. С использованием полученных разностных операторов, строится разностная схема для расчета одномерных упруго-пластических течений, обладающая свойством аналогичным свойству полной консервативности разностных уравнений газовой динамики [4]. Авторы благодарят Н.Н. Тюрину за помощь при проведении расчетов.

§ 1. Последовательность построения разностных операторов

1. В работах [1-3] для построения согласованных разностных операторов $\text{GRAD } \varphi$, $\text{DIV } \vec{A}$ и $\text{ROT } \vec{A}$ использовались соотношения

$$(1.1) \oint_S \varphi(\vec{A}, \vec{n}) dS = \int_V \varphi \text{div } \vec{A} dV + \int_V (\vec{A}, \text{grad } \varphi) dV,$$

$$(1.2) \oint_S (\vec{n}, \vec{A} \times \vec{B}) dS = \int_V (\vec{B}, \text{rot } \vec{A}) dV - \int_V (\vec{A}, \text{rot } \vec{B}) dV,$$

$$(1.3) \int_S \psi(\vec{c}, \vec{n} \times \vec{A}) dS = \int_V \psi(\vec{c}, \text{rot} \vec{A}) dV - \int_V (\vec{c}, \vec{A} \times \text{grad} \psi) dV,$$

здесь S - поверхность, ограничивающая объем V , \vec{n} - внешняя нормаль к S , \vec{c} - произвольная вектор-функция, такая, что $\text{rot} \vec{c} \equiv 0$.

Построение системы согласованных операторов производится следующим образом. Выбирается один из операторов div , grad или rot и производится его непосредственная аппроксимация. Полученный таким образом разностный оператор называется определяющим. Далее на основе выбранных условий согласования строятся разностные аналоги остальных операторов, эти операторы называются определяемыми.

2. Для построения операций дивергенция тензора $\text{DIV} \hat{\sigma}$ и градиент вектора $\text{GRAD} \vec{A}$, нам, наряду с (1)-(3), понадобятся дополнительные соотношения [5]:

$$(1.4) \int_S \psi(\vec{n}, \vec{A}) dS = \int_V \psi \text{div} \vec{A} dV + \int_V \psi(\vec{A}, \text{grad} \psi) dV;$$

$$(1.5) \int_S \rho(\vec{n}, (\hat{\sigma} \cdot \vec{B})) dS = \int_V \nabla \vec{B} \cdot \cdot \rho \hat{\sigma}^* dV + \int_V (\vec{B}, \rho \text{div} \hat{\sigma}) dV + \int_V (\vec{B}, (\text{grad} \rho \cdot \hat{\sigma})) dV;$$

где ψ, Ψ и ρ - скалярные функции, \vec{A}, \vec{B} - векторы, $\hat{\sigma} = \{\sigma_{\alpha\beta}\}$ - тензор второго ранга, $\hat{\sigma}^* = \{\sigma_{\alpha\beta}^* = \sigma_{\beta\alpha}\}$ тензор сопряженный к $\hat{\sigma}$.

Тождества (4), (5) являются непосредственным следствием следующих соотношений [5]

$$(1.6) \text{div} \rho \hat{\sigma} = \rho \text{div} \hat{\sigma} + \text{grad} \rho \cdot \hat{\sigma};$$

$$(1.7) \text{grad} \psi \psi = \psi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \psi;$$

$$(1.8) \text{div}(\rho \hat{\sigma} \cdot \vec{A}) = \nabla \vec{A} \cdot \cdot \rho \hat{\sigma}^* + (\vec{A} \cdot \text{div} \rho \hat{\sigma}).$$

3. В качестве определяющего удобно выбрать любой из операторов $\text{div} \vec{A}$, $\text{grad} \psi$ или $\text{rot} \vec{A}$. Способы непосредственной аппроксимации подробно описаны в [6]. Выберем в качестве опреде-

лящего оператор $\text{DIV } \vec{A}$, тогда операторы $\text{GRAD } \psi$ и ROTA определяются на основе соотношением (1) и (3), соответственно.

4. Соотношение (4) используется для определения по оператору GRAD еще одного разностного аналога оператора grad , который мы обозначим GRAD . Необходимость введения такого оператора связана с тем, что нам понадобятся разностные аналоги оператора $\text{grad } \psi$ с различными областями определения.

Для аналогичной цели служит и соотношение (2), при помощи которого по оператору ROT строится оператор ROT :

5. Для определения компонент вектора $\text{DIV } \hat{\sigma}$ используется тождество (5). При этом определяются проекции этого вектора на направление, задаваемое вектором \vec{A} . Задавая \vec{A} нужным образом и используя явный вид тензора $\nabla \vec{A} = \text{grad } \vec{A}$, можно получить все интересующие нас проекции.

6. Для построения разностных аналогов компонент тензора $\nabla \vec{c} = \text{grad } \vec{c}$ также используется тождество (5), в котором следует положить $\rho \equiv 1$, и $\vec{A} \equiv \vec{c}$:

$$(1.9) \quad \oint_S (\vec{n}, (\hat{\sigma} \cdot \vec{c})) dS = \int_V \nabla \vec{c} \cdot \hat{\sigma}^* dV + \int_V (\vec{c}, \text{div } \hat{\sigma}) dV.$$

Зная оператор $\text{DIV } \hat{\sigma}$ отсюда можно определить тензор $\text{GRAD } \vec{c}$.

§ 2. Вспомогательные сведения из тензорного исчисления

1. Напомним, что если $\sigma_{\alpha\beta}$ - ковариантные составляющие тензора второго ранга $\hat{\sigma}$, а c^β - контравариантные составляющие вектора \vec{c} , то под выражением $(\hat{\sigma} \cdot \vec{c})$ понимается вектор \vec{p} с компонентами

$$(2.1) \quad p_\alpha = (\hat{\sigma} \cdot \vec{c})_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} c^\beta,$$

здесь и ниже, как принято в тензорном исчислении, по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Аналогично определяется вектор $\vec{s} = (\vec{c} \cdot \hat{\sigma})$

$$(2.2) \quad s_\beta = (\vec{c} \cdot \hat{\sigma})_\beta = c^\alpha \sigma_{\alpha\beta}.$$

2. Далее, если $\pi^{\alpha\beta}$ - контравариантные компоненты тензора $\hat{\pi}$, то скаляр $\hat{\sigma} \cdot \hat{\pi}$ определяется так

$$(2.3) \quad \hat{\sigma} \cdot \hat{\pi} = \sigma_{\alpha\beta} \pi^{\beta\alpha}.$$

3. Ниже нам понадобится выражение для тензора $\nabla \vec{A}$. Ковариантные составляющие этого тензора имеют вид [5,7]

$$(2.4) \quad (\nabla \vec{A})_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - A_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda,$$

где $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ - символы Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = g^{i\lambda} \Gamma_{i,\alpha\beta},$$

$$(2.5) \quad \Gamma_{i,\alpha\beta} = 0.5 \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right),$$

здесь x^β - некоторые криволинейные координаты, $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ соответственно ко-и контравариантные компоненты метрического тензора в этой системе координат, $\Gamma_{i,\alpha\beta}$ - символы Кристоффеля первого рода. Отметим, что объект $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ - симметричен относительно индексов α и β .

4. В ортогональных системах координат справедливы соотношения [7]

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Gamma_{ik}^\lambda &= 0, \quad \text{если} \quad i \neq k \neq \lambda \\ \Gamma_{ik}^k &= \frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i}, \quad H_k = \sqrt{g_{kk}} \\ \Gamma_{kk}^i &= -\frac{H_k}{H_k^2} \frac{\partial H_k}{\partial x^i}, \quad i \neq k \end{aligned}$$

5. В ортогональных системах координат удобно использовать вместо ковариантных и контравариантных составляющих векторов и тензоров так называемые физические составляющие [6]. При этом для вектора \vec{A} имеют место формулы

$$(2.7) \quad A^i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \bar{A}_i; \quad A_i = \sqrt{g_{ii}} \bar{A}_i; \quad i=1,2,3$$

(суммирование нет)

где \bar{A}_i - физические составляющие вектора \vec{A} . Величины \bar{A}_i имеют смысл проекций на единичные базисные вектора, параллельные координатным линиям.

Для физических составляющих
место соотношения

$$\overline{\sigma}_{ik}$$

тензора $\hat{\sigma}$ имеют

$$(2.8) \quad \sigma^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{kk}}} \overline{\sigma}_{ik} ; \quad \sigma_{ik} = \sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{kk}} \overline{\sigma}_{ik} .$$

(суммирования нет)

6. Учитывая формулы (7)–(8), нетрудно показать, что в ортогональных системах координат формулы (I)–(3) можно записать при помощи физических составляющих так

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \overline{P}_\alpha &= (\hat{\sigma} \cdot \vec{c})_\alpha = \overline{\sigma}_{\alpha\beta} \overline{c}_\beta ; \\ \overline{S}_\beta &= (\vec{c} \cdot \hat{\sigma})_\beta = \overline{c}_\alpha \overline{\sigma}_{\alpha\beta} ; \\ \hat{\sigma} \cdot \hat{\pi} &= \overline{\sigma}_{\alpha\beta} \overline{\pi}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

7. В § 4 нам понадобятся физические составляющие тензора $\nabla \vec{c}$ в сферической системе координат τ, θ, φ для вектора

$$\vec{c} = (\overline{c}_1, 0, 0), \quad \overline{c}_1 = 1.$$

Так как в сферической системе координат

$$(2.10) \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = \tau^2, \quad g_{33} = \tau^2 \sin^2 \theta,$$

то $c_1 = \overline{c}_1 = 1$, поэтому

$$(\nabla \vec{c})_{\alpha\beta} = -\Gamma_{\beta\alpha}^1,$$

и, учитывая формулы (6), получаем

$$(2.11) \quad \begin{aligned} (\nabla \vec{c})_{\alpha\beta} &= 0, \quad \alpha \neq \beta \\ (\nabla \vec{c})_{11} &= 0; \quad (\nabla \vec{c})_{22} = \tau; \quad (\nabla \vec{c})_{33} = \tau \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Из (8), (10), (11) следует, что для физических компонент справедлива формула

$$(2.12) \quad \overline{(\nabla \vec{c})}_{11} = 0; \quad \overline{(\nabla \vec{c})}_{22} = \frac{1}{\tau}; \quad \overline{(\nabla \vec{c})}_{33} = \frac{1}{\tau}.$$

§ 3. Дискретизация

I. Все дальнейшие рассмотрения мы будем проводить в сферической системе координат τ, θ, φ . Предполагается также, что рассматриваемые векторные и тензорные поля обладают сферической симметрией. Таким образом все величины зависят только от $\tau: 0 \leq \tau \leq R$

При построении разностного аналога операции $\text{div } \hat{\sigma}$ предполагается, что в силу сферической симметрии тензор $\hat{\sigma}$ имеет диагональный вид и $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$. Очевидно, что при сделанных предположениях вектор $\text{div } \hat{\sigma}$ имеет только одну компоненту

$$\text{div } \hat{\sigma} = \{ (\text{div } \hat{\sigma})_{\tau}, 0, 0 \}$$

При аппроксимации операции $\nabla \vec{A}$ будем исходить из того, что $\vec{A} = \{ A_{\tau}, 0, 0 \}$. Очевидно, что при этом тензор $\nabla \vec{A}$ также имеет диагональный вид и $(\nabla \vec{A})_{\theta\theta} = (\nabla \vec{A})_{\varphi\varphi}$.

Отметим, что задача аппроксимации операций $\text{div } \hat{\sigma}$ и $\nabla \vec{A}$ для описанного частного вида тензоров и векторов возникает при построении разностных схем для уравнений динамики сплошной среды в сферически симметричном случае. Тогда $\hat{\sigma}$ - тензор напряжений, \vec{A} - вектор скорости.

2. Для описания векторов и тензоров мы будем использовать только их физические составляющие, поэтому черту сверху будем опускать.

3. Пусть на отрезке $0 \leq \tau \leq R$ введена расчетная сетка с узлами $\{ \tau_i : i = 1, 2, \dots, N \}$, $\tau_1 = 0$; $\tau_N = R$. Объем ячейки сетки $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ обозначим через V_i . В дальнейшем будем использовать также, "приузловые" объемы $V_{K_i} = 0.5(V_{i-1} + V_i)$.

4. Рассматриваются следующие пространства скалярных сеточных функций: НК - функции заданные в узлах, НС - функции заданные в ячейках. Аналогично вводятся пространства сеточных вектор-функций $\mathcal{X}_K, \mathcal{X}_C$, и пространства сеточных тензоров $\mathcal{X}_K, \mathcal{X}_C$.

§ 4. Аппроксимация операции дивергенция тензора

I. Нас будет интересовать выражение для $\text{DIV } \hat{\sigma}$ только во внутренних точках, поэтому можно считать, что на границе области $\int = 0$, и, следовательно, поверхностный интеграл в (I.5) обращается в нуль.

2. Как уже указывалось в § 3 при сделанных предположениях вектор $\operatorname{div} \hat{\sigma}$ имеет только одну компоненту $(\operatorname{div} \hat{\sigma})_r$. Поэтому достаточно рассмотреть тождество (1.5) для $\vec{B} = (1, 0, 0)$. выражение для тензора $\nabla \vec{B}$ приведено в §2. - формула (2.12).

3. Учитывая формулы § 2, сферическую симметрию и тот факт, что $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, соотношение (1.5) можно переписать в виде

$$(4.1) \quad \int_0^R \rho \left(\frac{2\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) r^2 dr + \int_0^R \rho (\operatorname{div} \hat{\sigma})_r r^2 dr + \\ + \int_0^R (\operatorname{grad} \rho)_r \rho \sigma_{rr} r^2 dr = 0,$$

где $(\operatorname{grad} \rho)_r = \partial \rho / \partial r$.

Как уже указывалось соотношение (1) служит для построения операции $\operatorname{DIV} \hat{\sigma}$ по разностному аналогу оператора $\operatorname{grad} \rho$.

4. Будем использовать следующую дискретизацию: $\rho \in \mathcal{HK}$, $\hat{\sigma} \in \hat{\mathcal{H}}\mathcal{C}$. Будем считать, что разностный аналог оператора $\operatorname{grad} \rho$ - GRAD действует по правилу

$$\operatorname{GRAD} : \mathcal{HK} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}\mathcal{C}.$$

При этом мы получаем оператор $\operatorname{DIV} \hat{\sigma}$ действующий из $\hat{\mathcal{H}}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{HK}$

5. При построении определяемого оператора $\operatorname{DIV} \hat{\sigma}$ в качестве определяющего выберем оператор $\operatorname{DIV} \vec{A} : \mathcal{HK} \rightarrow \mathcal{HC}$

$$(4.2) \quad (\operatorname{DIV} \vec{A})_i = \frac{1}{V_i} (A_{r,i+1} r_{i+1}^2 - A_{r,i} r_i^2)$$

В качестве объема ячейки V_i используется выражение

$$(4.3) \quad V_i = (r_{i+1}^3 - r_i^3) / 3.$$

Согласованный с оператором $\operatorname{DIV} \vec{A}$ оператор $\operatorname{GRAD} \varphi : \mathcal{HC} \rightarrow \mathcal{HK}$ полученный на основе (1.1) имеет вид

$$(4.4) \quad (\operatorname{GRAD} \varphi)_{r,i} = \frac{r_i^2}{V K_i} (\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

здесь под величиной "приузлового" объема подразумевается выражение

$$(4.5) \quad V K_i = 0.5 (V_{i-1} + V_i) = (r_{i+1}^3 - r_{i-1}^3) / 6$$

Отметим, что такой вид операторов $\text{DIV} \vec{A}$ и $\text{GRAD} \psi$ используется в [8] при получении полностью консервативных разностных схем газовой динамики в сферических координатах.

6. Для построения оператора $\text{GRAD} : \text{HK} \rightarrow \text{HC}$ используем тождество (I.5). В рассматриваемом случае для вектора

$$\vec{A} = (1, 0, 0), \text{ получаем}$$

$$(4.6) \quad \int_0^R \psi \psi \left(\frac{2\tau}{\tau^2} \right) \tau^2 d\tau + \int_0^R \psi (\text{grad} \psi)_\tau \tau^2 d\tau + \\ + \int_0^R \psi (\text{grad} \psi)_\tau \tau^2 d\tau = 0.$$

Здесь учтено, что $\text{div} \vec{A} = 2\tau/\tau^2$. Разностный аналог (6) для $\psi \in \text{HC}$, $\psi \in \text{HK}$ запишем в виде

$$(4.7) \quad \sum_{\text{HC}} \psi_i \frac{\psi_{i+1} + \psi_{i-1}}{2} (\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) + \sum_{\text{HC}} \psi_i (\text{GRAD} \psi)_{\tau, i} V_i + \\ + \sum_{\text{HK}} \psi_i (\text{GRAD} \psi)_{\tau, i} V_{K_i} = 0,$$

здесь \sum_{HK} - сумма по узлам, \sum_{HC} - сумма по ячейкам. Используя выражение (4) для $\text{GRAD} \psi$ и собирая коэффициенты при ψ_i , получаем, что

$$(4.8) \quad (\text{GRAD} \psi)_{\tau, i} = \frac{1}{V_i} \frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} (\psi_{i+1} - \psi_i).$$

7. Переходим, наконец, к построению операции $\text{DIV} \hat{\sigma}$. Разностный аналог (I) запишем для $\rho \in \text{HK}$, $\hat{\sigma} \in \hat{\text{HC}}$

$$(4.9) \quad \sum_{\text{HC}} \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} (\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) \hat{\sigma}_{\theta\theta, i} + \sum_{\text{HK}} \rho_i (\text{DIV} \hat{\sigma})_{\tau, i} V_{K_i} + \\ + \sum_{\text{HC}} (\text{GRAD} \rho)_{\tau, i} \sigma_{\tau\tau, i} V_i = 0.$$

Собирая коэффициенты при ρ_i , приходим к выражению

$$(4.10) \quad (\text{DIV } \hat{\sigma})_{\tau, i} = \frac{1}{\sqrt{K_i}} \left\{ \left[\frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} \sigma_{\tau\tau, i} - \frac{\tau_i^2 + \tau_{i-1}^2}{2} \sigma_{\tau\tau, i-1} \right] - \right. \\ \left. - 0.5 \left[(\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) \sigma_{\theta\theta, i} + (\tau_i^2 - \tau_{i-1}^2) \sigma_{\theta\theta, i-1} \right] \right\}$$

Отметим, что если $\hat{\sigma} = p \hat{I}$, где \hat{I} — единичный тензор, то есть $\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = p$, то для $p \in \mathbb{H}\mathbb{C}$ имеем

$$(4.11) \quad (\text{DIV } \hat{\sigma})_{\tau, i} = \frac{1}{\sqrt{K_i}} \tau_i^2 (p_i - p_{i-1}) = (\text{GRAD } p)_{\tau, i},$$

что соответствует равенству

$$\text{div} (p \hat{I}) = \text{grad } p$$

в дифференциальном случае.

§ 5. Аппроксимация операции градиент вектора

При сделанных выше предположениях соотношение (I.I) принимает вид

$$(5.1) \quad \int_0^R \left[(\nabla \vec{c})_{\tau\tau} \sigma_{\tau\tau} + 2 (\nabla \vec{c})_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta} \right] \tau^2 d\tau + \\ + \int_0^R c_{\tau} (\text{div } \hat{\sigma})_{\tau} \tau^2 d\tau = 0.$$

Равностный аналог этого соотношения можно записать в виде

$$(5.2) \quad \sum_{\mathbb{H}\mathbb{C}} \left[(\nabla \vec{c})_{\tau\tau, i} \sigma_{\tau\tau, i} + 2 (\nabla \vec{c})_{\theta\theta, i} \sigma_{\theta\theta, i} \right] V_i + \sum_{\mathbb{H}\mathbb{C}} c_{\tau, i} (\text{DIV } \hat{\sigma})_{\tau, i} \sqrt{K_i} = 0$$

где выражение $(\text{DIV } \hat{\sigma})_{\tau, i}$ определено в предыдущем параграфе.

Собирая коэффициенты при $\sigma_{\tau\tau, i}$, получаем разностный аналог $(\text{GRAD } \vec{c})_{\tau\tau}$, компоненты $(\nabla \vec{c})_{\tau\tau}$. Аналогичным образом, собирая коэффициенты при $\sigma_{\theta\theta, i}$, получаем компоненту $(\text{GRAD } \vec{c})_{\theta\theta}$.

Выражения для этих компонент имеют вид

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (\text{GRAD } \vec{c})_{\tau\tau, i} &= \frac{1}{V_i} \left[\frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} (c_{\tau, i+1} - c_{\tau, i}) \right], \\ (\text{GRAD } \vec{c})_{\theta\theta, i} &= \frac{1}{V_i} \left[\frac{\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2}{2} (c_{\tau, i+1} + c_{\tau, i}) \right]. \end{aligned}$$

§ 6. Аппроксимация уравнений динамики сплошной среды в сферически симметричном случае

I. Уравнение динамики сплошной среды можно записать в следующем виде [7,9]

$$(6.1) \quad \rho \frac{d\vec{w}}{dt} + \rho \text{div } \vec{w} = 0;$$

$$(6.2) \quad \rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \text{div } \hat{\sigma}$$

$$(6.3) \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \hat{\sigma} \circ \circ \hat{s}$$

где ρ - плотность, \vec{w} - вектор скорости, $\hat{\sigma}$ - тензор напряжений, ε - удельная внутренняя энергия, $\hat{s} = [\nabla \vec{w} + (\nabla \vec{w})^*] / 2$ тензор скоростей деформаций.

Для замыкания системы (1)-(3) следует добавить уравнения, связывающие напряжения и деформации, и уравнение состояния. Мы не будем конкретизировать вид этих уравнений, отметив, однако, что никаких новых операций над тензорами при их записи не встречается [10].

2. При построении разностной схемы будем использовать лагранжев подход и рассматривать случай сферической симметрии. Используется следующая дискретизация:

$$\rho, \varepsilon \in \text{HC}, \quad \vec{w} \in \mathcal{HK}, \quad \hat{\sigma}, \hat{s} \in \mathcal{HC}.$$

3. Для аппроксимации уравнения неразрывности будем использовать соотношение

$$(6.4) \quad \rho_i = m_i / V_i$$

где m_i - масса лагранжевой ячейки $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Непрерывные по времени разностные аналоги уравнений (2), (3) запишем в виде

$$(6.5) (M \rho) \frac{d\vec{W}}{dt} = \text{DIV} \hat{\sigma}$$

$$(6.6) \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \hat{\sigma} \circ \circ \hat{S}$$

где

$$M \rho = (\rho_{i-1} v_{i-1} + \rho_i v_i) / (v_i + v_{i-1})$$

$$\hat{S} = 0.5 [\text{GRAD} \vec{W} + (\text{GRAD} \vec{W})^*]$$

4. Явный вид уравнений (5), (6) следующий

$$(6.7) \frac{\rho_{i-1} v_{i-1} + \rho_i v_i}{v_{i-1} + v_i} \frac{dW_i}{dt} = \frac{1}{V K_i} \left\{ \left[\frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} \tilde{\sigma}_{\tau\tau, i} - \frac{\tau_i^2 + \tau_{i-1}^2}{2} \tilde{\sigma}_{\tau\tau, i-1} \right] - \right. \\ \left. - 0.5 \left[(\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) \tilde{\sigma}_{\theta\theta, i} + (\tau_i^2 - \tau_{i-1}^2) \tilde{\sigma}_{\theta\theta, i-1} \right] \right\},$$

$$(6.8) \rho_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{1}{V_i} \left\{ \tilde{\sigma}_{\tau\tau, i} \left[\frac{\tau_{i+1}^2 + \tau_i^2}{2} (W_{i+1} - W_i) \right] + 2 \tilde{\sigma}_{\theta\theta, i} \left[\frac{\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2}{2} (W_{i+1} + W_i) \right] \right\}$$

5. В качестве тестового расчета был проведен расчет сферической упругой волны в однородной среде. Точное решение приведено в [11, 12].

На рис. I приведен график скорости на момент времени $\frac{t}{a} = 2$ в безразмерных единицах.

ВАРИАНТ 4

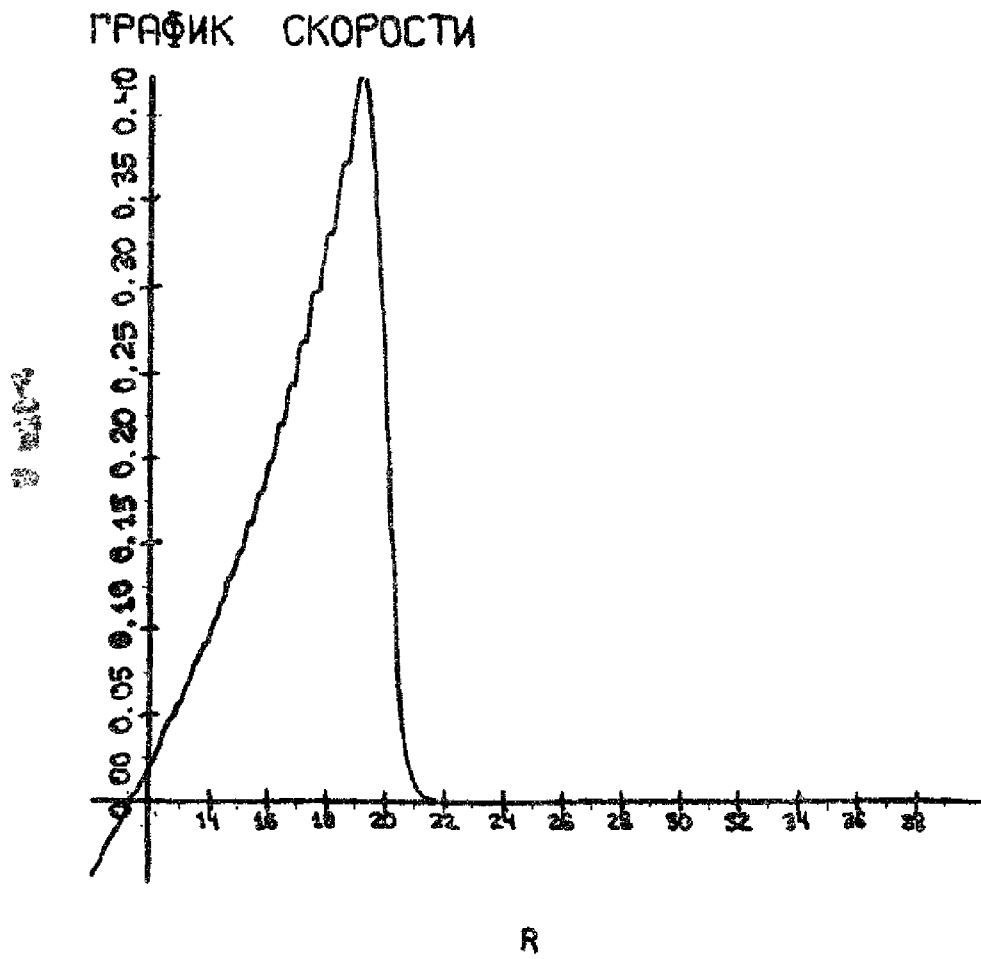


Рис. I. Зависимость скорости от радиуса.

Список литературы

- I. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. Препринт ИПМ АН СССР, 1981, № 9, 32 с
2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме - ДАН СССР, т.258, № 5, 1981, с.1092-1096.
3. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы - Дифф. Уравн. № 7, 1981, с.1317-1327.
4. Самарский А.А., Попов Ю.П., Разностные методы решения задач газовой динамики. Наука, М.:1980, 352с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Наука. М.: 1977, 832 с.
6. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Разностные аналоги основных дифференциальных операторов первого порядка. Препринт ИПМ АН СССР, 1981, №3, 29 с.
7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, М.: 1951, 426 с.
8. Фаворский В.П. Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 159, 38 с.
9. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. Наука, М.: 1978, 304 с.
10. Уилкинс М.Л., Расчет упруго-пластических течений, в со. Вычислительные методы в гидродинамике. Мир, М.: 1967, с.212-263.
11. Blake F. G., Jr., J. Acoust. Soc. Am., 24,(1952), p. 211.
12. Майнчен Дж., Сак С. Метод расчета тензор, в со.Вычислительные методы в гидродинамике, Мир, М.: с.185-211.