85
ПРЕПР.
М-73

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша,
Академии Наук СССР

С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, Ю.А. Повещенко
Ю.П. Попов, А.А. Самарский

МНОГОМЕРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В ТРИГГЕРНЫХ СРЕДАХ

Препринт № 85 за 1981 г.

Москва.

АННОТАЦИЯ

В работе численными и аналитическими методами исследуются диссипативные структуры, возникающие в средах, описываемых системой двух параболических уравнений с нелинейными источниками и стоками. С помощью многомерного вычислительного эксперимента выявлен ряд особенностей процесса формирования структур, у которых нет одномерного аналога. Это позволяет по-новому взглянуть на само понятие диссипативной структуры.

Установлено, что широкий класс начальных данных приводит к формированию метастабильно устойчивых профилей (существующих конечное время), в то время как их одномерные аналоги были стационарны.

Проведенный анализ показывает, что взаимодействие структур, каждая из которых по отдельности существует конечное время, может приводить к возникновению сложных стационарных распределений.

В настоящей работе показано, что в триггерной среде, т.е. в среде, где есть два однородных по пространству устойчивых стационарных решения, в многомерном случае возможны процессы возникновения сложных структур, характерные для математических моделей морфогенеза, химической кинетики и физики плазмы [I+ 3].

Полученные результаты позволяют поставить вопрос об экспериментальном изучении явления локализации и возникновения структур в определенном классе нелинейных сред.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

I. Введение.....
2. Эволюция финитных начальных распределений на устойчивом фоне.....
3. Симметрия и формирование стационарных структур.....
4. Эффект рождения структур. Волновые свойства триггерных сред.....

I. Введение

В семидеоятые годы широкое распространение получили исследования, связанные с анализом математических моделей синергетики или теории диссипативных структур [I÷4]. Одно из центральных мест в синергетике занимают проблемы самоорганизации. Спонтанное возникновение структур в ряде задач экологии, химической кинетики, физики плазмы зачастую не зависит от начальных и граничных условий, а определяется внутренними законами нелинейной среды.

Независимость от граничных условий и возникающих отруктур друг от друга характерна для модели тепловых структур, описываемой уравнением [4÷7].

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k_0 T^{\sigma} \operatorname{grad} T) + Q(T) \qquad (I.I)$$
$$Q(T) = q_0 T^{\beta}, \; k_0, q_0 \sigma > 0, \; \beta \geq \sigma + 1,$$

где T интерпретируется как температура нелинейной среды, источник Q моделирует ее горение. Под структурами здесь понимаются процессы интенсивного выделения тепла, локализованные на фундаментальных областях G_f. Эволюция начального распределения представлена на рисунках (I.I÷I.6). (Сверху показаны линии уровня $T_1 = 0{,}95\,T_м$, $T_2 = 0{,}75\,T_м$, $T_3 = 0{,}5\,T_м$, $T_4 = 0{,}25\,T_м$, где $T_5 = 0{,}1\,T_м$, $T_м = \max_{x,y} T(x,y,t)$, снизу –видовые проекции распределений температуры). В то время как температура в области интенсивного горения возрастает на два порядка, изменение остальной части распределения, имеющего в этом случае сложную геометрию, не превышает нескольких процентов. Здесь важно подчеркнуть, что эволюция отруктуры практически не зависит от граничных условий и фона, развивающихся в более медленном темпе. Развитие структуры идет в режиме с обострением:

$$\max_{\vec{r}} T(\vec{r},t) \xrightarrow[t \to t_f]{} \infty .$$

Однако в рамках этой модели нельзя моделировать процессы возникновения новых структур – число максимумов в распределении $T(\vec{r},t)$ здесь не превышает числа максимумов в начальном профиле. Эта возможность появляетоя в модели брюсселятора [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A + (B-1)u^2 + u^2 v$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x} + Bv - u^2 v \qquad (I.2)$$

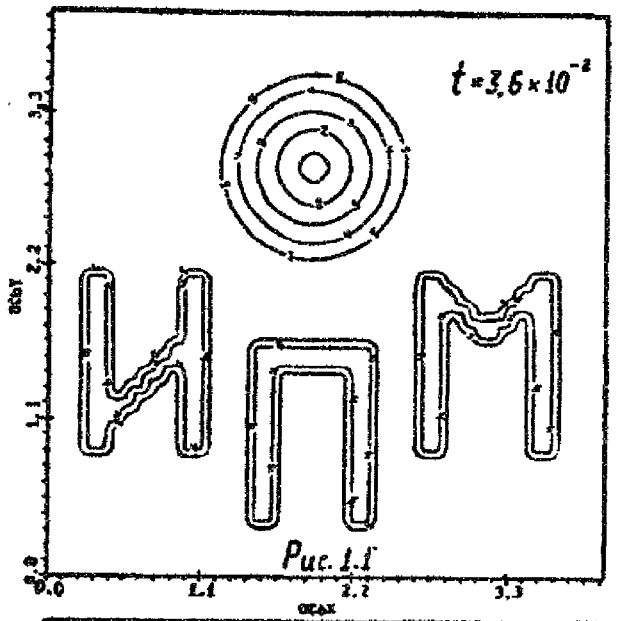


Рис. 1.1

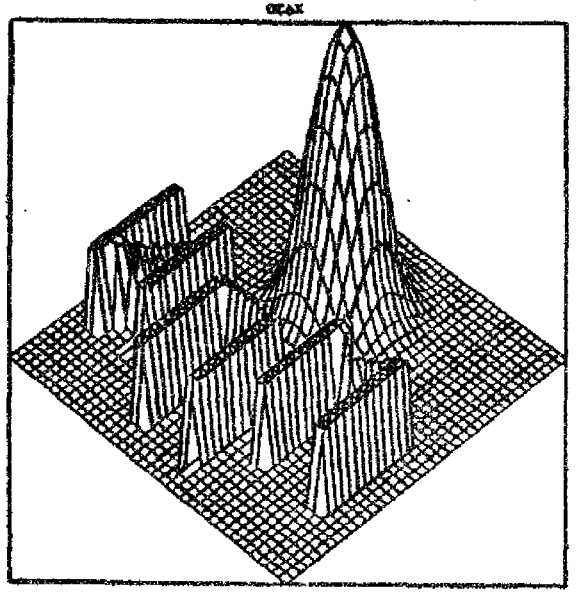


Рис 1.2

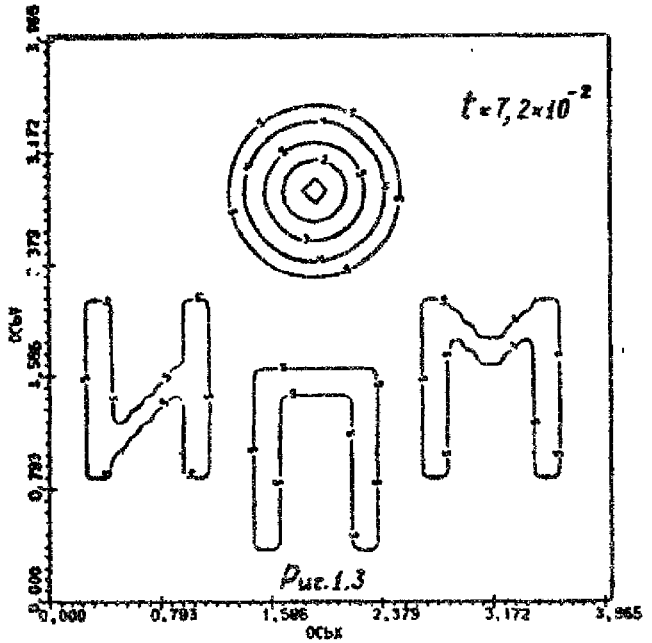


Рис. 1.3

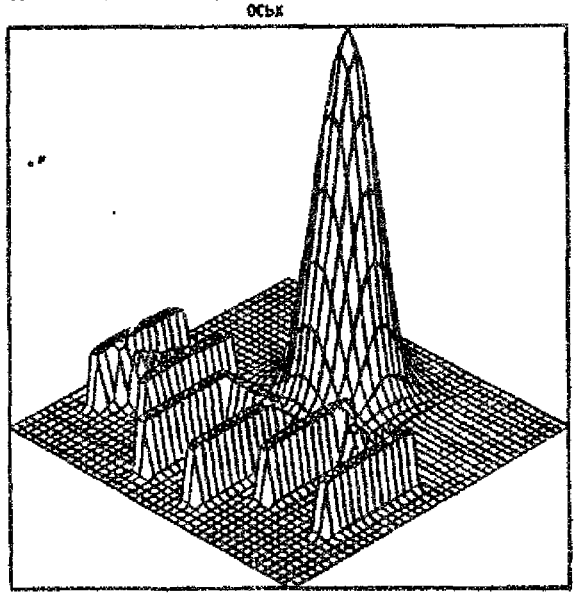


Рис. 1.4

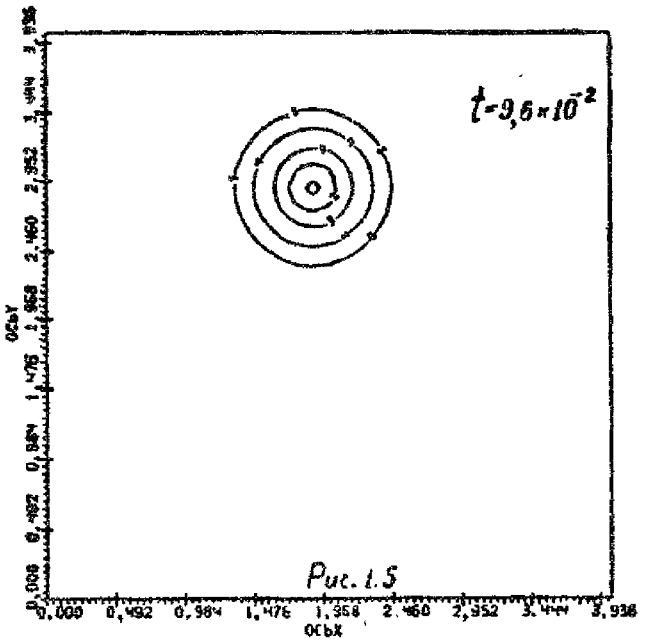


Рис. 1.5

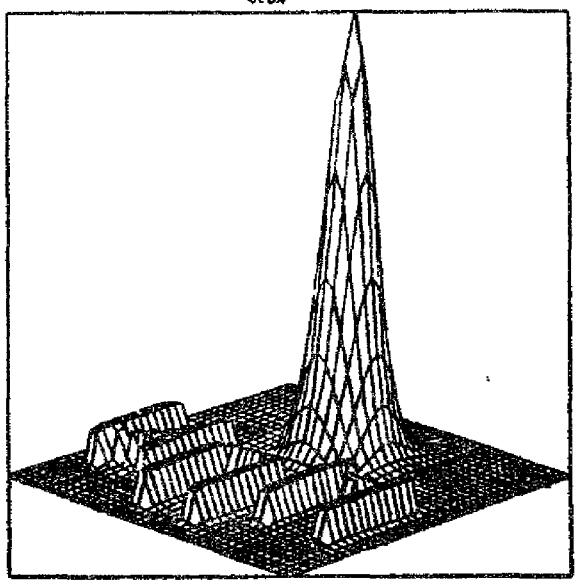


Рис. 1.6

определяющей эволюцию распределений концентраций реагирующих веществ $u(x,t)$, $V(x,t)$ в некоторых автокаталитических реакциях [2]. Здесь возможно появление новых максимумов и выход на устойчивые немонотонные стационарные решения. Но в этой задаче нет локализации влияния различных структур друг на друга, независимости от краевых условий [2,3]. Возмущение граничных условий, как правило, приводит к перестройке всего решения.

Большой интерес представляет изучение моделей, где возможны как явление локализации, так и формирование устойчивых немонотонных стационарных решений из монотонных начальных профилей. Этими свойствами обладает модель, исследуемая в предлагаемой работе в пространственно-многомерном случае

$$\begin{gathered} u_t=\operatorname{div}(D_1 \operatorname{grad} u)+\alpha_{11}u+\alpha_{12}V+(\beta_{11}u+\beta_{12}V)(u^2+V^2) \\ V_t=\operatorname{div}(D_2 \operatorname{grad} V)+\alpha_{21}u+\alpha_{22}V+(\beta_{21}u+\beta_{22}V)(u^2+V^2) \\ u(\vec{r},0)=u^0(\vec{r}),\ V(\vec{r},0)=V^0(\vec{r}),\ \vec{r}\in G+\Gamma \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_\Gamma=0 \end{gathered} \tag{I.3}$$

Задача (I.3) для простоты решается в прямоугольной области. Будем считать, что матрица $A=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}$ положительно определена. Из этого следует неустойчивость нулевого решения задачи (I.3). Матрица B определена отрицательно, что является достаточным условием ограниченности решения при $t\in(0,\infty)$ [I0]. В работе [I0] также показано, что задача (I.3) может обладать триггерными свойствами, то есть иметь два однородных по пространству асимптотически устойчивых решения (фона) $\{u^*,V^*\},\{-u^*,-V^*\}$ (очевидно задача (I.3) инвариантна относительно преобразования $\{u,V\}\to\{-u,-V\}$). Условия триггерности накладывают ограничения на матрицы A и B, подробно изученные в [I0]. Например, эти условия выполнены, если

$$A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -1 & -4\end{vmatrix}, \tag{I.4}$$

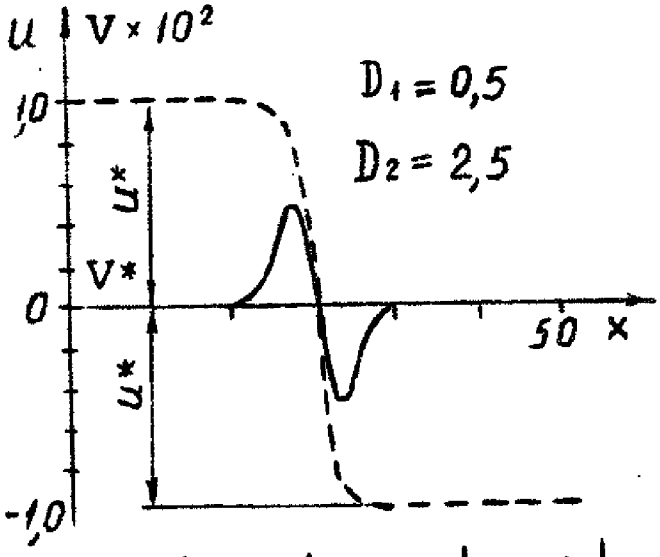
здесь $u^*=1$, $V^*=0$.

Задача (I.3) позволяет исследовать свойства широкого класса триггерных систем и играет важную роль при анализе более общих математических моделей [8, I0]. Функции и u и V будут интерпре-

тироватьоя как отклонения от некоторого однородного по пространству решения системы параболических уравнений [10], а поэтому могут принимать любой знак.

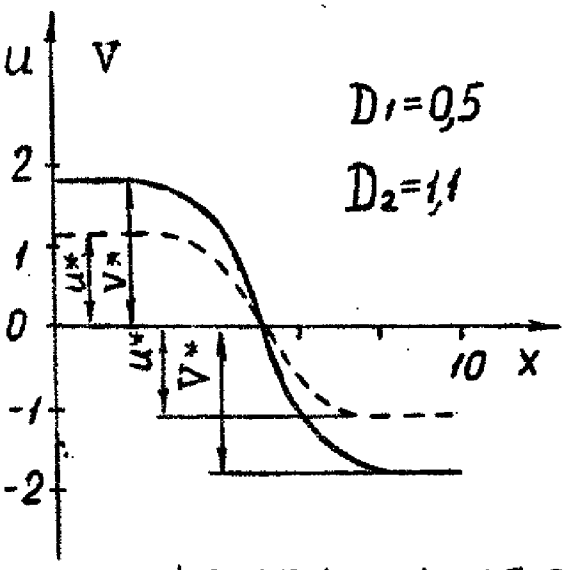
Остановимся на некоторых понятиях, введенных при анализе (I.3) в пространственно-одномерном случае $(u=u(x,t),\ V=V(x,t))$, необходимых для дальнейшего анализа [8]. Все неоднородные по пространству начальные профили можно разделить на два класса: подкритичные, приводящие к выходу на один из устойчивых фонов, и надкритичные, собственно приводящие к возникновению стационарных структур.

Простейшим неоднородным устойчивым стационарным профилем в этой среде является элементарная структура. Ее типичный вид показан на рис.I.7–I.8. Ряд более сложных структур представляет из себя композицию элементарных и участков, где значения функций u и V близки к значению на устойчивом фоне.



$$A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -1 & -4\end{vmatrix}$$

Рис.I.7



$$A=\begin{vmatrix}0 & 0{,}75\\ 1 & 4{,}0\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}-0{,}25 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

Рис.I.8

Введенное определение отличается от традиционного представления о структуре, как о части пространства, где решение имеет ярко выраженный немонотонный характер, однако переходную область (см.рис.I.7, I.8) удобно рассматривать как структуру, поскольку из них может быть "построен" класс более сложных стационарных решений. Эффекты взаимного влияния переходных областей также удобно рассматривать как взаимодействие структур, по аналогии с другими задачами синергетики.

Важным свойством изучаемой нелинейной среды является наличие характерной длины L_{in} (длины взаимодействия), под которой понимается максимальное расстояние $b-a$, на котором начальные распределения вида

$$u(x,0)=u^*,\ v(x,0)=v^*,\ x\in[a,b]$$
$$u(x,0)=-u^*,\ v(x,0)=-v^*,\ x\bar{\in}[a,b]$$

являются подкритичными. Дальнейший рост величины $b-a$ приводит к увеличению участка (плато), где решение $\{u,v\}$ близко к $\{u^*,v^*\}$, а в областях перехода на второй устойчивый фон $\{-u^*,-v^*\}$ (мы будем их также называть диффузионными) распределения стремятся к профилям, определяемым элементарной структурой. Это позволяет говорить об эффективной локализации влияния одной диффузионной области на другую [8].

Целью настоящей работы является рассмотрение эффектов возникновения диссипативных структур в пространственно-многомерном случае. Необходимость решения многомерных задач типична для синергетики. Например, пространственное взаимодействие тепловых структур обладает многими чертами, у которых нет одномерного аналога [4,5]. Многомерные расчеты позволяют поставить вопрос об экспериментальном изучении ряда эффектов, предсказываемых теорией диссипативных структур.

2. Эволюция финитных начальных распределений, поставленных на устойчивом фоне.

В многомерном случае появляется новый элемент – форма диссипативной структуры. Выясним в рамках задачи (I.3), (I.4) влияние размеров и геометрии начального распределения. Для этого рассмотрим эволюцию прямоугольных начальных профилей, представленных на рис.2.I. В дальнейшем в различных расчетах будет изменяться только размер области L (в одинаковом отношении вдоль осей x и y) при фиксированных остальных параметрах.

По аналогии с пространственно-одномерным случаем [8] было бы естественно ожидать, что если диаметр области G не превышает $0,5\ L_{in}$ (множитель 0,5 обусловлен тем, что на границе задано условие отсутствия потока), то распределение подкритично, а если он больше $0,5\ L_{in}$, то будет формироваться стационарная диссипативная структура. Вычислительный эксперимент дает более сложную

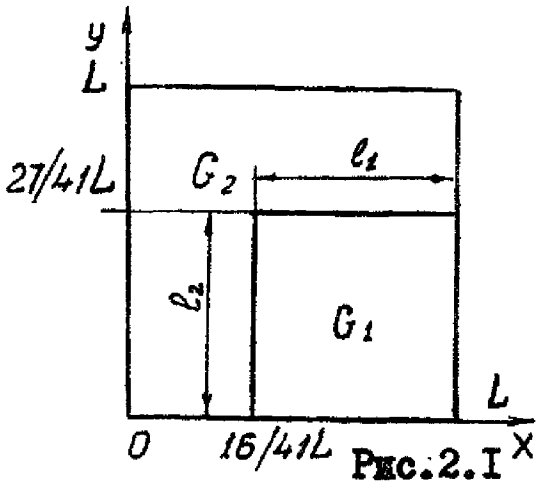


Рис.2.I

Пусть L = I2,3 $\approx 5L_p$, (где L_p - эффективная ширина переходной области см.рис.2.а, ε = 0,I u^*). На рис.2.3, 2.5, 2.7 представленые видовые проекции профиля $u(x,y)$ на различные моменты времени. Выше приведены линии уровня на те же моменты времени (см.рис.2.2, 2.4, 2.6).

$$D_1=0{,}5\,,\quad D_2=1{,}5$$

$$u(x,y,0)=1{,}0,\quad v(x,y,0)=0{,}1,\quad (x,y)\in G_1$$

$$u(x,y,0)=-1{,}0,\quad v(x,y,0)=-0{,}1,\quad (x,y)\in G_2$$

$$u_1(x,y)=A_{umin}+0{,}1A_u,\ u_2(x,y)=A_{umin}+0{,}25A_u,\ u_3(x,y)=A_{umin}+0{,}5A_u$$

$$u_4(x,y)=A_{umin}+0{,}75A_u,\ u_5=A_{umin}+0{,}95A_u,\ \text{где}\ A_{umin}=\min_{x,y\in G}u(x,y)$$

$A_u=\max_{x,y\in G}u(x,y)-A_{umin}$. Те же характеристики показаны для функции v (см.рис.2.8÷2.I3).

Вначале идет перестройка начального распределения: растет ширина переходной области, у функции v в окрестности угловой точки появляются неустойчивые максимумы (см.рис.2.2, 2.3, 2.8, 2.9). Характерное время этого процесса $\tau_D \sim L^2/\min\{D_1 D_2\}$ $A_u \sim 10^2 A_v$. Качественно рассматриваемый этап эволюции начальных распределений эквивалентен стадии перестройки начального профиля, выделенной при анализе взаимодействия тепловых структур в многомерном случае [5,6].

Вдали от угла переходная область с высокой точностью совпадает с элементарной структурой в плоской геометрии (см.рис.2.4÷2.6), а также рис. 2а.

Далее, при $t>\tau_D$ область $G_\varepsilon^+\{G_\varepsilon^+:(x,y)\in G_\varepsilon^+$, если $|u(x,y)-u^*|<\varepsilon, |v(x,y)-v^*|<\varepsilon\}$,где решение близко к устойчивому фону $\{u^*, v^*\}$, продолжает сокращаться, несмотря на то, что ее размеры по обеим направлениям превышают 0,5 L_{in} Границу области G_ε^+ при ε = 0,I u^* дает пятая линия уровня (см.рис.2.2, 2.4., 2.6).

Отличительной особенностью исследуемой стадии процесса является то, что структура переходной области всюду по нормали к границе G_ε^+ длительное время с высокой точностью остается постоянной и одинаковой для различных точек границы, несмотря на

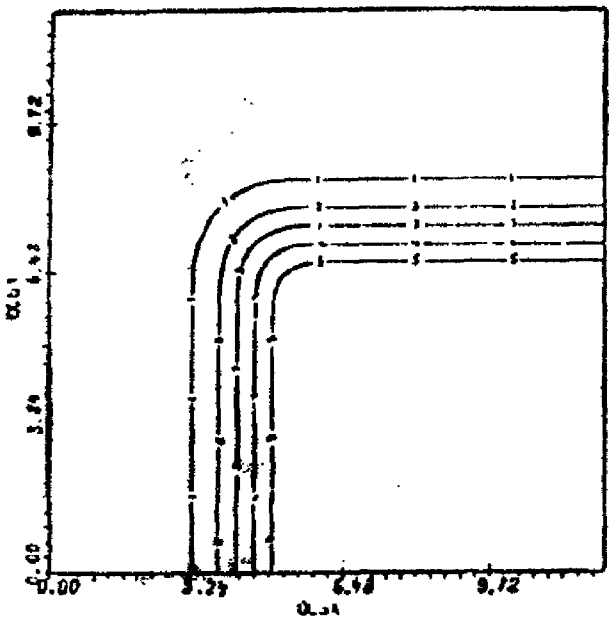


Рис. 2.2

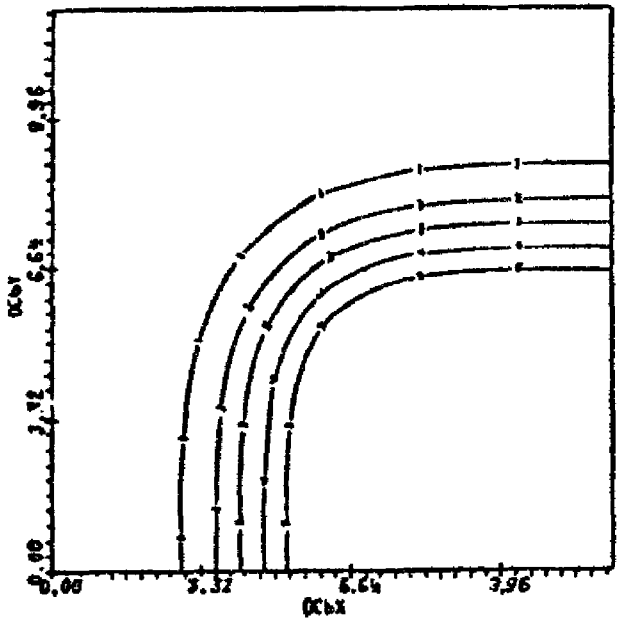


Рис. 2.4

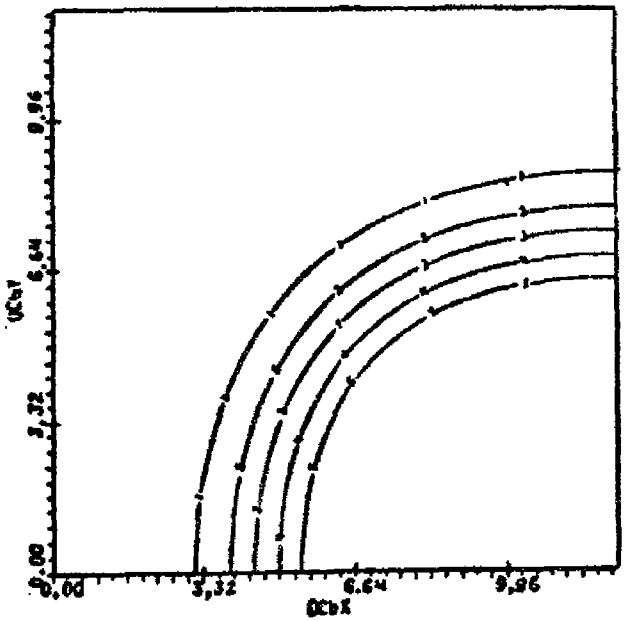


Рис. 2.6

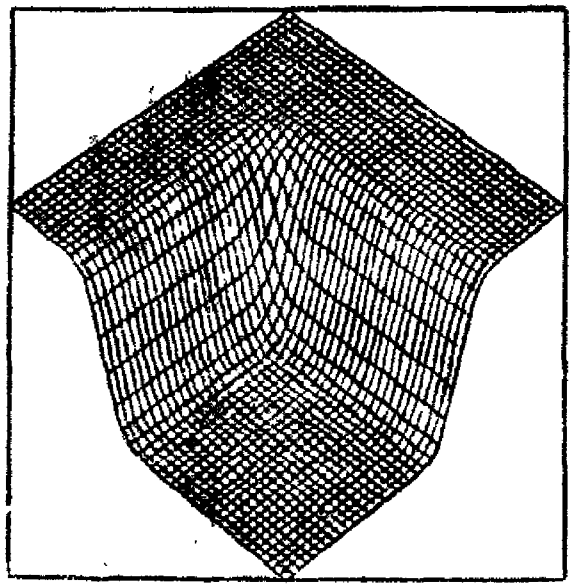
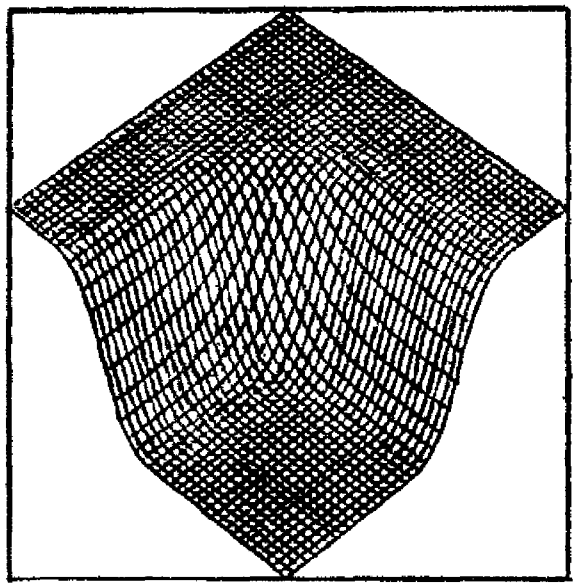


Рис. 2.3 $t_1 = 0{,}2$



$u(x,y,t)$ Рис. 2.5 $t_2 = 5{,}6$

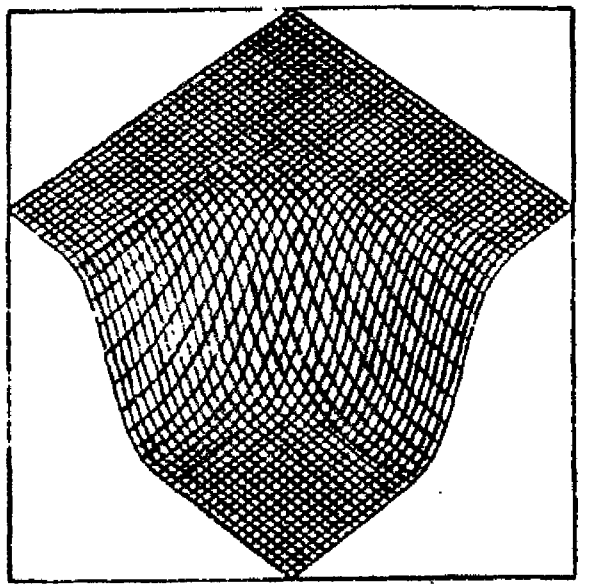


Рис. 2.7 $t_3 = 16{,}4$

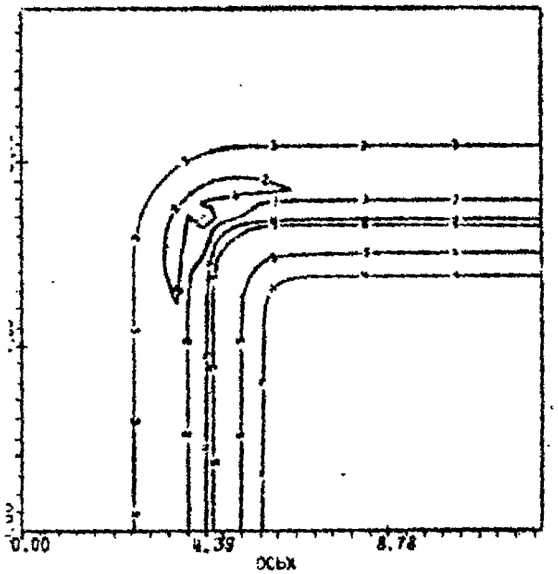


Рис. 2.8

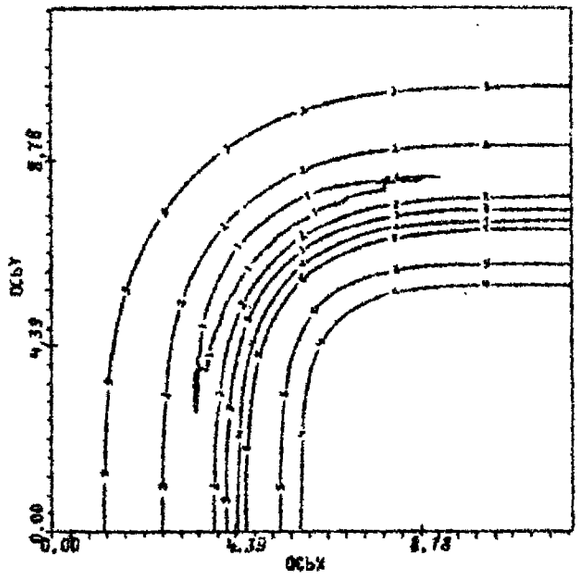


Рис. 2.10

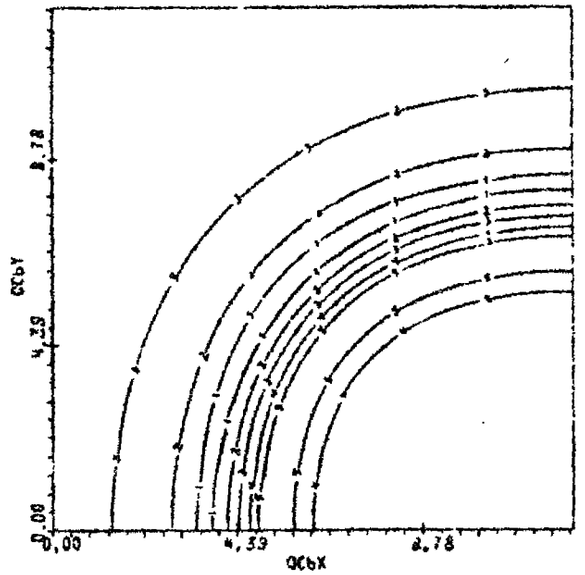


Рис. 2.12

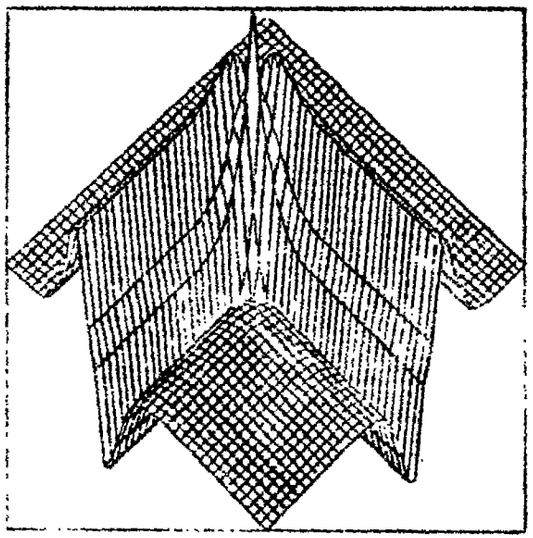


Рис. 2.9 $t_1 = 0.2$

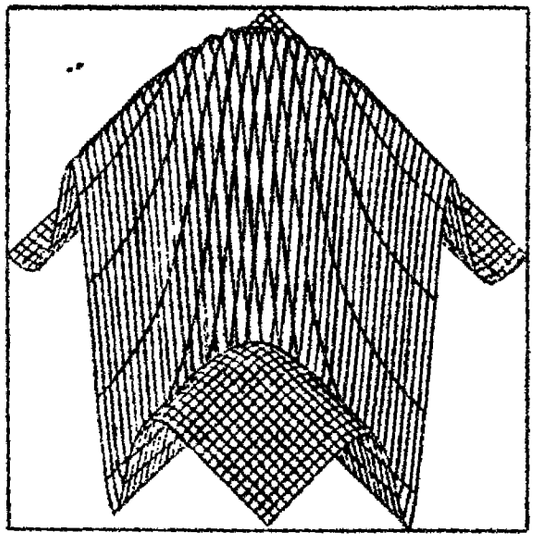


Рис. 2.11 $t_2 = 5.6$

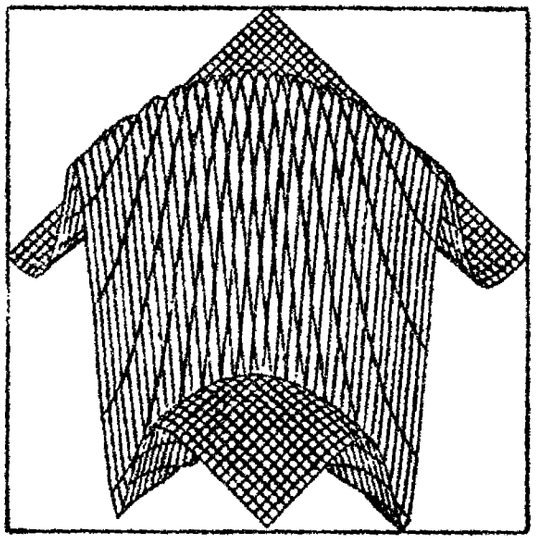


Рис. 2.13 $t_3 = 16.4$

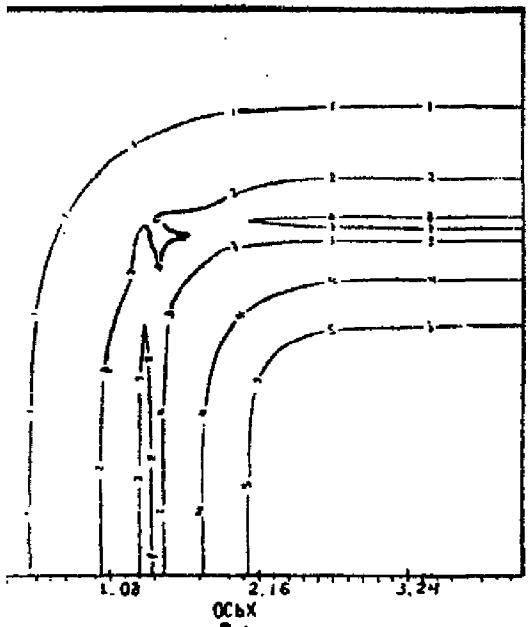


Рис 2.14

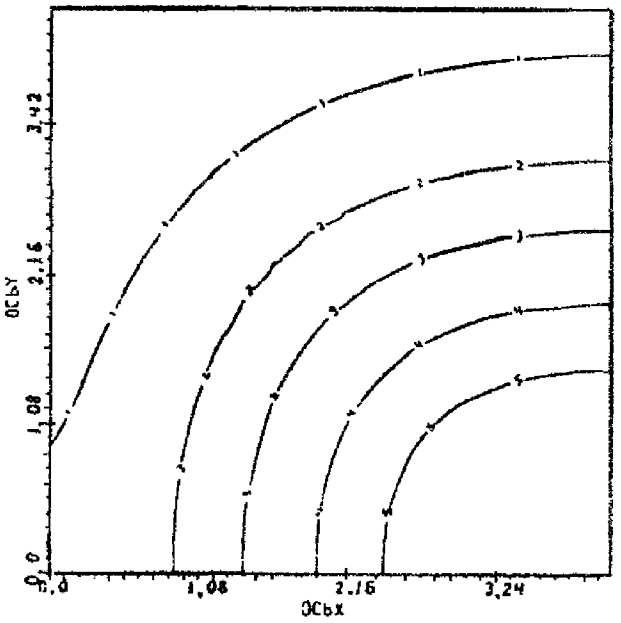


Рис. 2.16

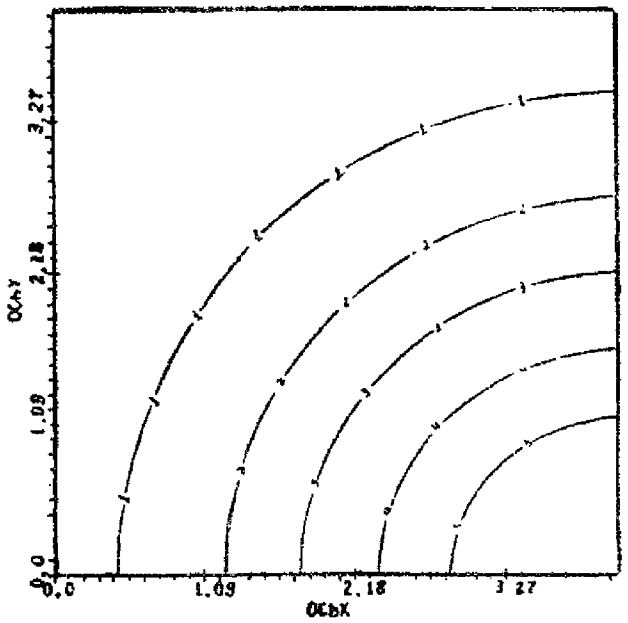


Рис 2.18

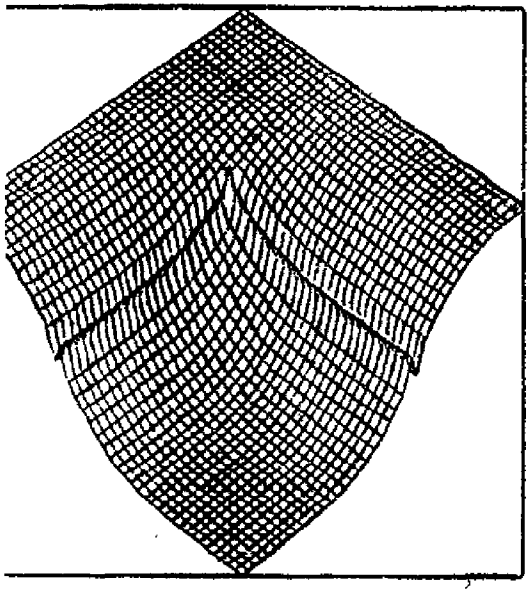
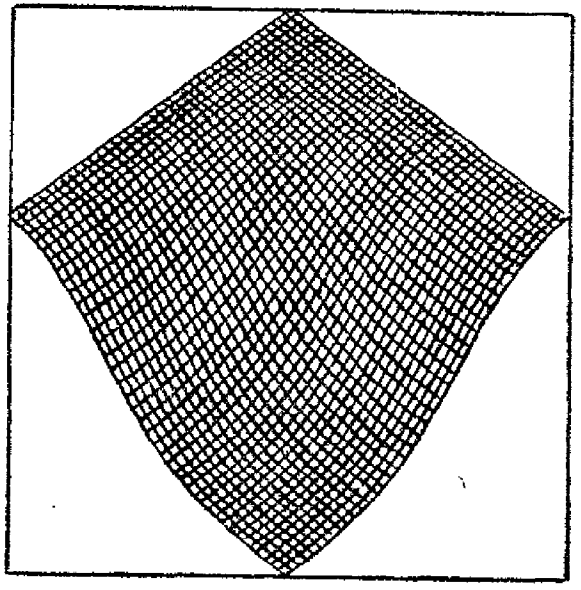


Рис. 2.15 $t_1 = 3.5 \times 10^{-1}$



$u(x,y,t)$ Рис. 2.17 $t_2 = 1.425$

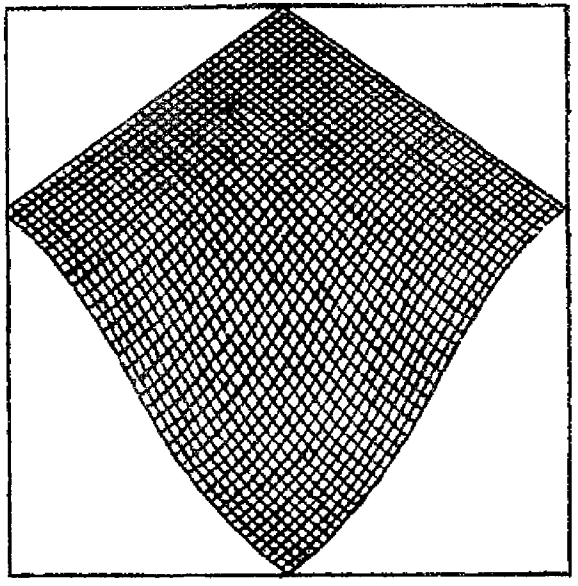


Рис 2.19 $t_3 = 3.525$

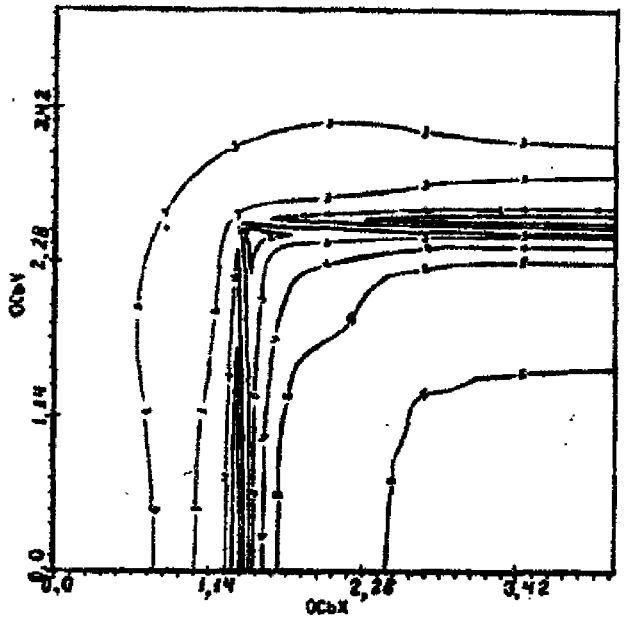


Рис. 2.20

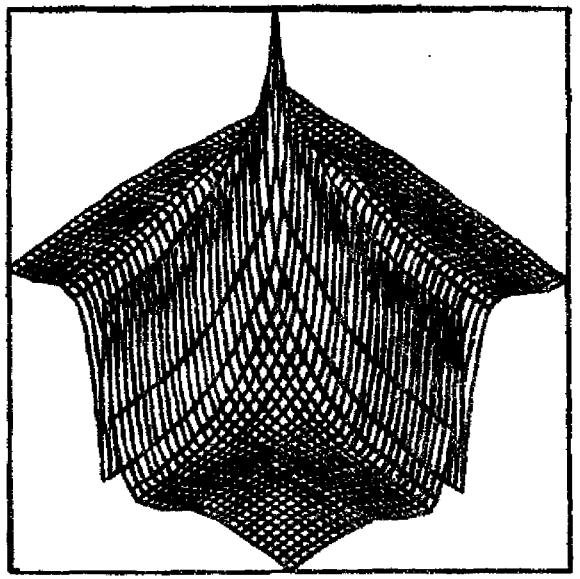


Рис. 2.21 $t_1=3{,}5\times10^{-1}$

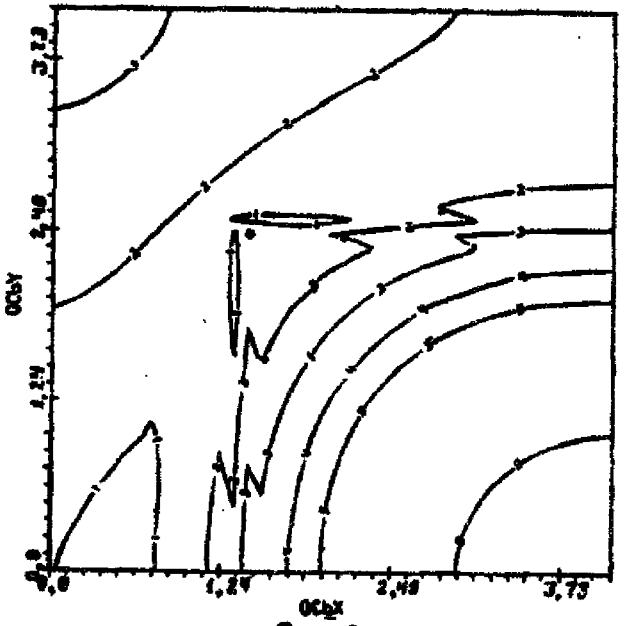
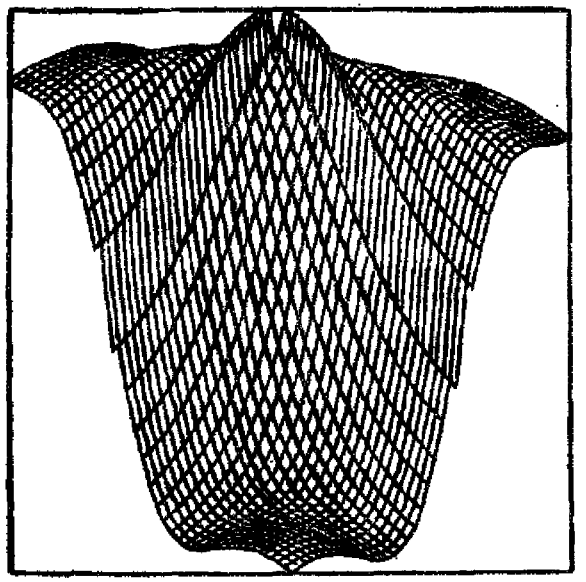


Рис. 2.22



$v(x,y,t)$ Рис. 2.23 $t_2=1{,}425$

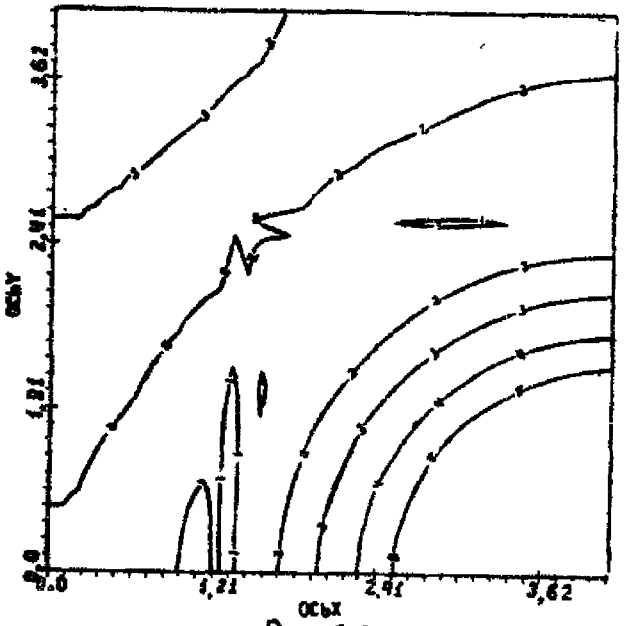


Рис. 2.24

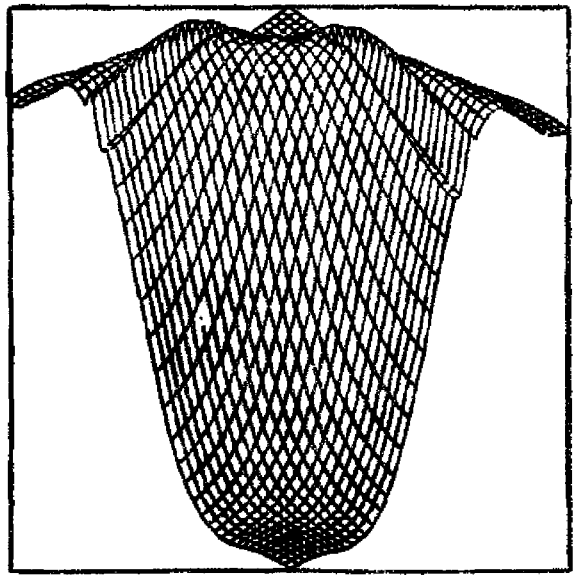


Рис. 2.25 $t_3=3{,}525$

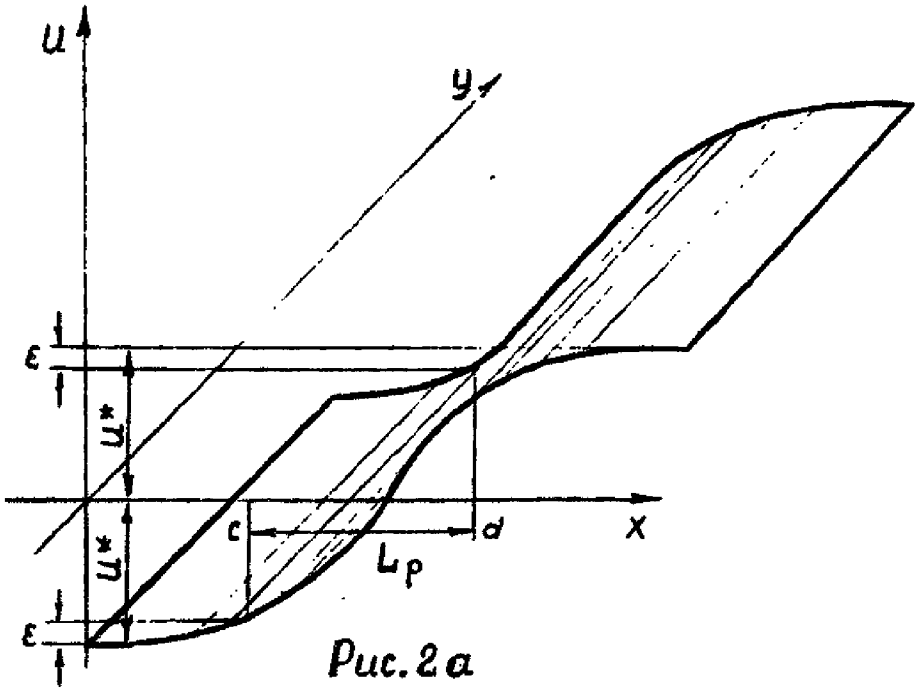


Рис. 2а

то, что кривизна контура меняется от точки к точке. Область G_ε^+ медленно симметризуется и схлопывается на центр симметрии-точку $(L,0)$. Расчеты показывают, что увеличение параметра L качественно не меняет процесса. Выход на пространственно неоднородный стационар не наблюдается.

Возникает вопрос, можно ли в этом случае говорить о формировании диссипативной структуры? Рассмотрим его подробнее.

Понятие структуры, как правило, связывается с определенной инвариантностью относительно внешних воздействий. Поясним последнее на примере тепловых структур [4÷6]. Под структурами здесь понимались процессы интенсивного выделения тепла. При этом форма возникающего распределения в области интенсивного горения определяется внутренними свойствами нелинейной среды [4], а не начальными или граничными условиями. Времена существования тепловых структур, очевидно, не превышают t_f. В рассматриваемом случае также имеет место локализация: две структуры на расстоянии, большем L_{in} практически не взаимодействуют. Есть здесь и инвариантность по отношению к краевым условиям: увеличение области G при сохранении G_1 (см. рис. (2.I)) не изменяет процесса эволюции (Разумеется, здесь нет полной независимости структур друг от друга, поскольку теплопроводность линейна, и можно говорить только об эффективной локализации [4÷7]). Независимость переходной области для широкого класса начальных распределений и времена существования, которые могут на несколько порядков превышать диффузионные τ_D, позволяют рассматривать изучаемый процесс как эволюцию

диссипативной отруктуры.

Очевидно, как и в одномерном случае, если $\ell_1 \lesssim 0{,}5 L_{in}$ $\ell_2 \lesssim L_{in}$, возмущение должно быть подкритично. При этом структура не возникает (см.рис(2.I4)+(2.25), здеоь $L = 4{,}I = 1{,}67 L_p$. В течение всего времени существования неоднородного распределения продолжается перестройка переходной области. Локализации здесь нет: об этом свидетельствует наличие линий уровня вблизи дальней (по отношению к центру симметрии) границы области G_2 (см.рис. (2.I7),(2.23),(2.25)).

Таким образом, ореди начальных распределений в многомерном случае мы можем выделить надкритичные начальные распределения, приводящие к возникновению локализованных метастабильно устойчивых структур, и подкритичные профили, которые к возникновению структур не приводят.

3. <u>Симметрия и формирование стационарных структур</u>.

Расчеты, приведенные выше, ооздают впечатление, что в рассматриваемой среде не могут возникать стационарные двумерные распределения. В этом пункте мы построим пример такой структуры. Важную роль при этом будут играть соображения симметрии. Остановимся на них подробнее. Справедлива следующая лемма:

Пусть $u(\bar{r}, t)$ является решением краевой задачи

$$u_t + Lu = 0 \tag{3.I}$$

$$r \in G + \Gamma, \quad Fu\big|_{u \in \Gamma} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u^0$$

(в частности L и F могут быть нелинейными операторами, а u -вектор-функцией). Пусть далее P – оператор симметрии, не зависящий от t и удовлетворяющий следующим операторным равенствам

$$P0 = 0, \quad PF - FP = 0, \quad PL - LP = 0 \tag{3.2}$$

Тогда, если $Pu^0 = u^0$ и решение задачи (3.I) единственно, то $Pu = u$.

Действительно, применим оператор P к (3.I). Имеем

$$0 = Pu_t + PLu = (Pu)_t + LPu$$

Аналогично $PFu - FPu = 0$. Итак, если $u(\bar{r}, t)$ – решение задачи (3.I), то и Pu является решением этой задачи. Далее, из усло-

вия $Pu^0 = u^0$ и требования единственности следует, что $Pu = u$ ч.т.д.

Предполагая единственность решения задачи (I.3),(I.4), воспользуемся рассмотренной леммой для анализа эволюции начального распределения, представленного на рис.3.I. В заштрихованной области $u^0 = u^*$, $V^0 = 0{,}1u^*$, в незаштрихованной $u^0 = -u^*$ $V^0 = -0{,}1u^*$. Введем следующие операторы симметрии P_i, переводящие этот профиль в себя.

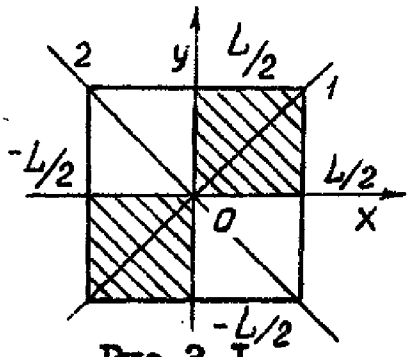


Рис.3.I

$$P_1 u(x,y) = u(y,x),\ P_2 u(x,y) = u(-y,-x),\ P_3 u(x,y) = u(-x,-y)$$

$$P_4 u(x,y) = -u(-x,y),\ P_5 u(x,y) = -u(x,-y)$$

(для функции V преобразования аналогичны).

Пользуясь леммой, нетрудно убедиться, что решение задачи (I.3),(I.4) с начальным распределением, представленным на рис 3.I, должно быть инвариантно относительно преобразований $P_1 \div P_5$. Отсюда следует, что ряд процессов с нарушением симметрии идти не может (например, рассматриваемое распределение не может быть подкритичным, поскольку выход на устойчивый фон нарушит симметрию относительно преобразований P_4 и P_5). Естественно ожидать поэтому формирования структуры, удовлетворяющей всем указанным выше требованиям симметрии, поскольку нулевой фон является неустойчивым.

Проведенные расчеты (см.рис.(3.2)÷(3.I3) подтверждают высказанные соображения. На рис.(3.2),(3.4), (3.6) представлены линии уровня $u(x,y) = A_{umin} + kA_u/7$, где $k = 1, \ldots, 6$, $A_{umin} = \min\limits_{(x,y)\in G} u(x,y,t)$, $A_{umax} = \max\limits_{(x,y)\in G} u(x,y,t)$, $A_u = A_{umax} - A_{umin}$. Линии уровня функции $V(x,y,t)$, полученные аналогичным образом, показаны на рис. (3.8),(3.I0),(3.I2).

Для функции $u(x,y)$ формируется переходная область вдали от центра, совпадающая с элементарной структурой (см.рис.(3.2)÷(3.7). В последующие моменты времени распределение $u(x,y)$ остает-

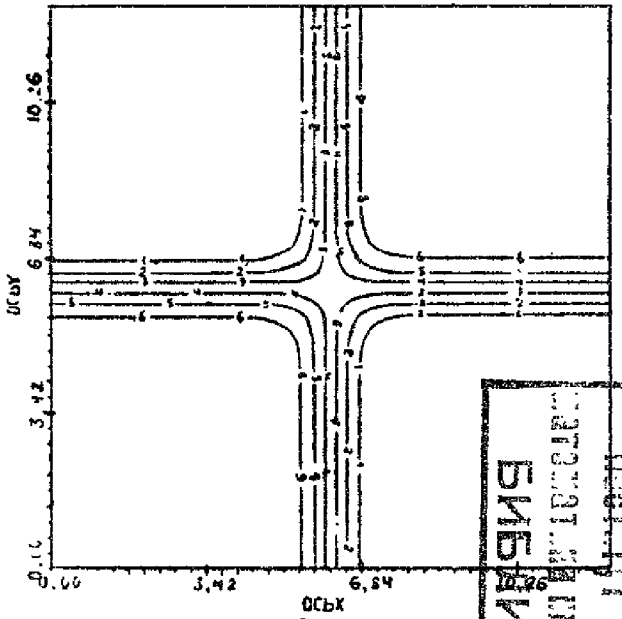


Рис. 3.2

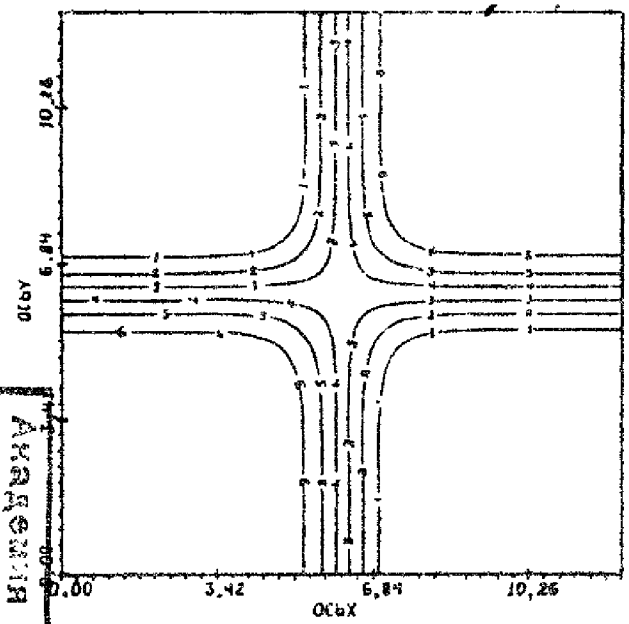


Рис. 3.4

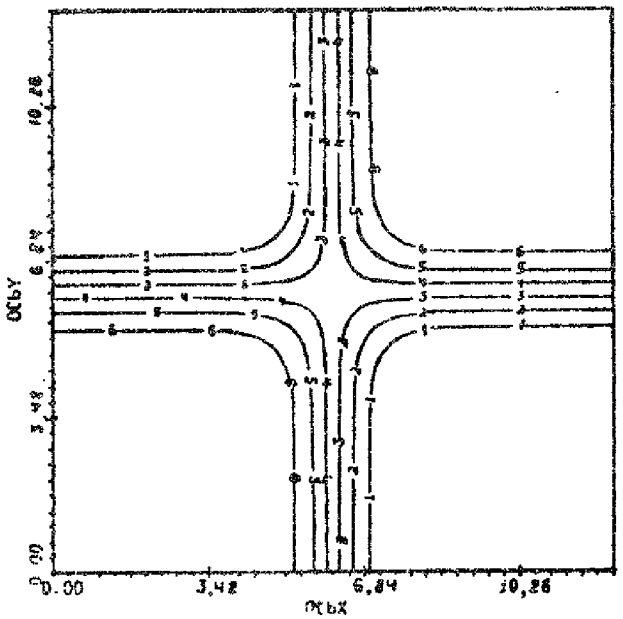


Рис. 3.6

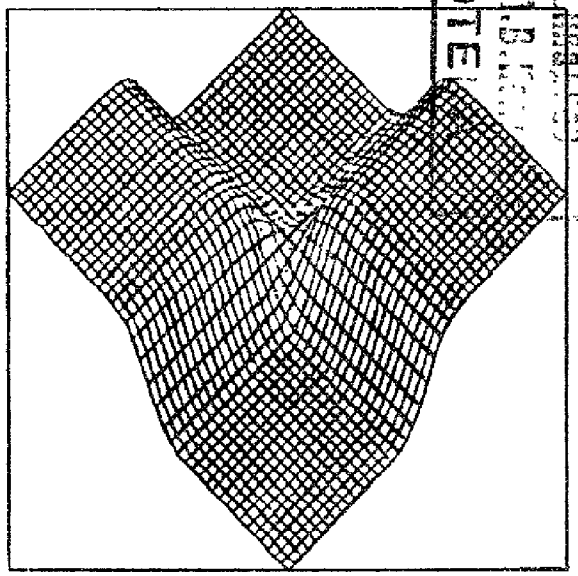
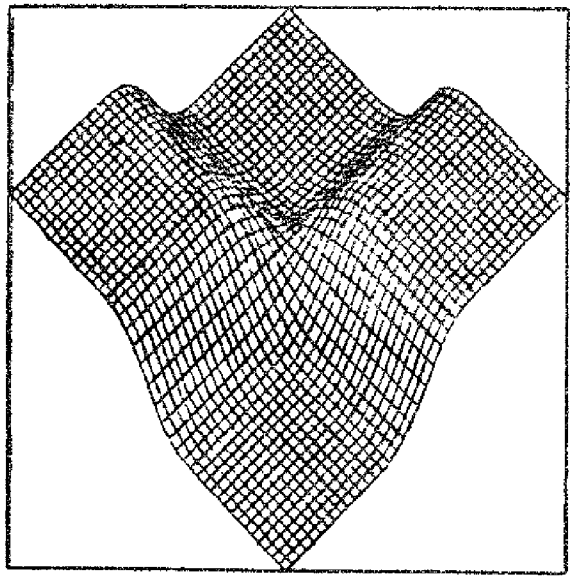


Рис. 3.3 $t_1 = 0,2$



$u(x,y,t)$ Рис. 3.5 $t_2 = 23,2$

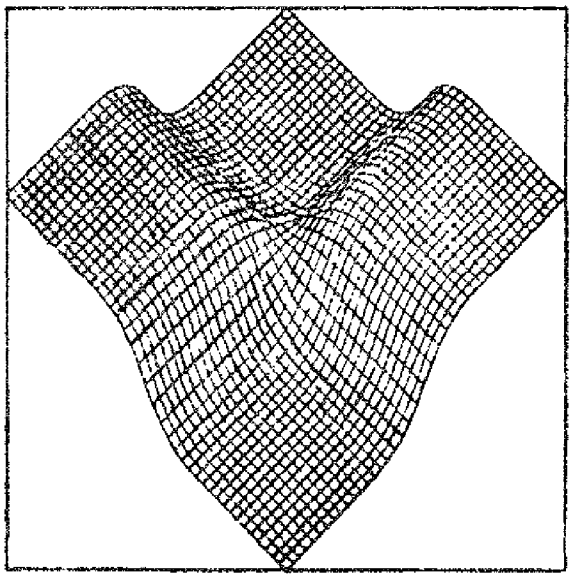


Рис. 3.7 $t_3 = 41,8$

Академия Наук СССР
Сибирское Отделение
Институт вычислительной математики
БИБЛИОТЕКА

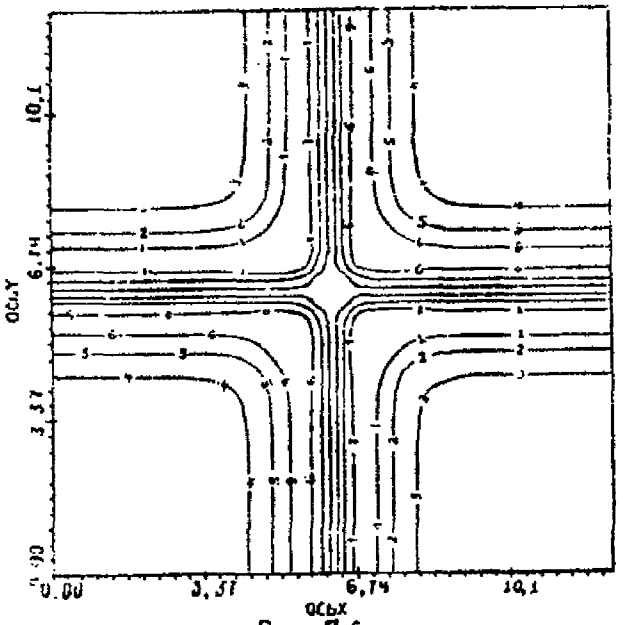


Рис 3.8

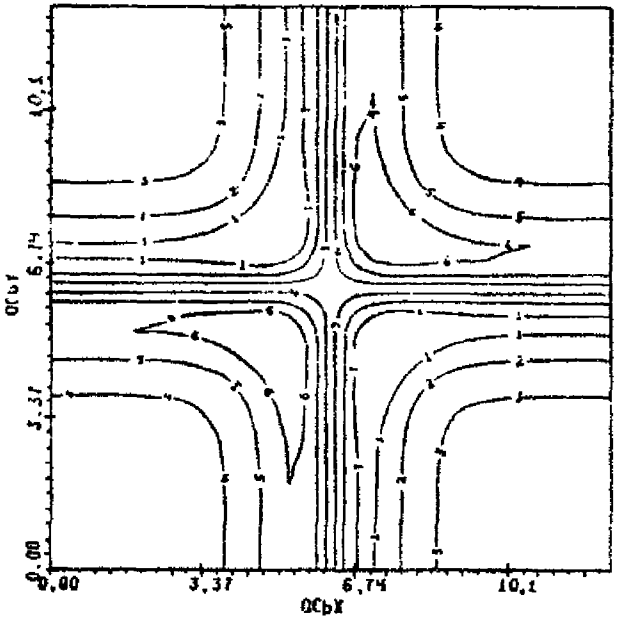


Рис. 3.10

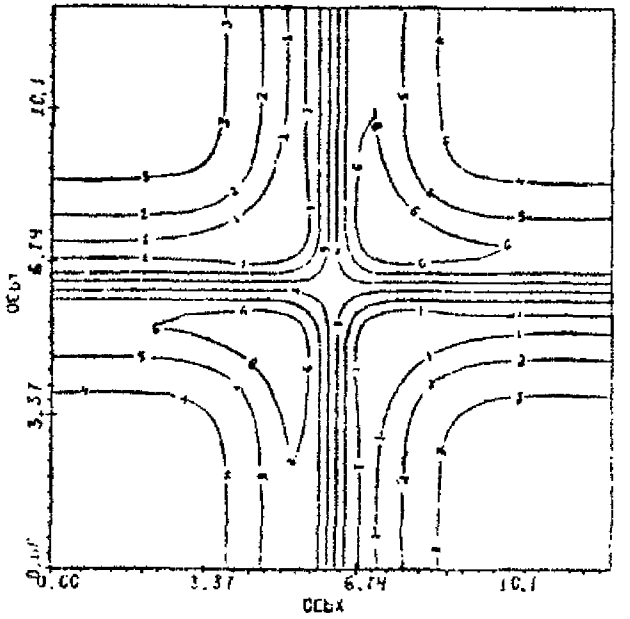


Рис 3.12

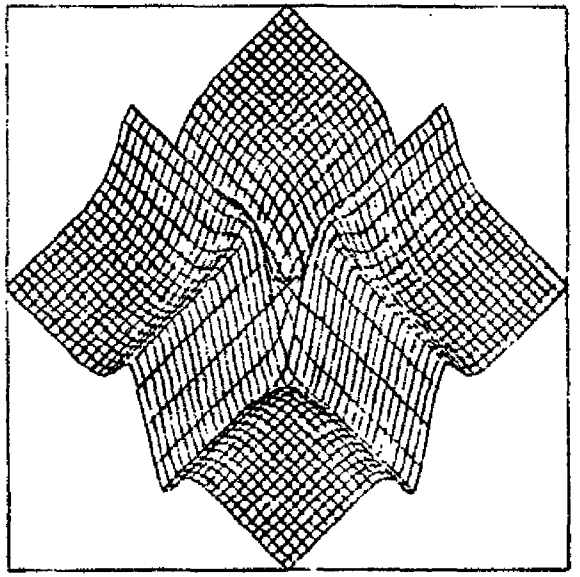
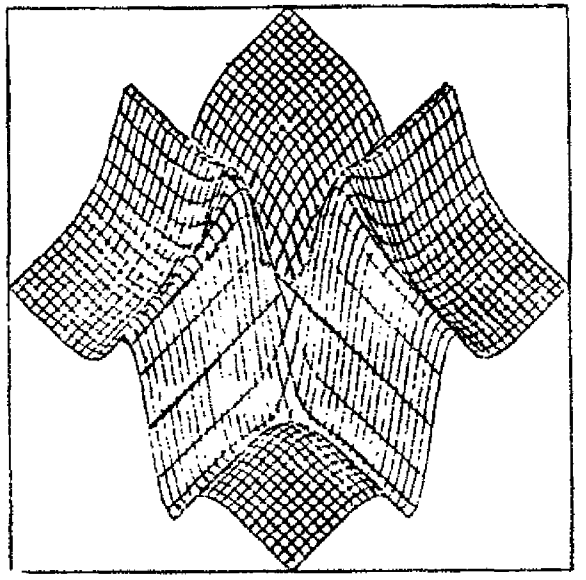


Рис. 3.9 $t_1 = 0.2$



$v(x,y,t)$ Рис. 3.11 $t_2 = 23.2$

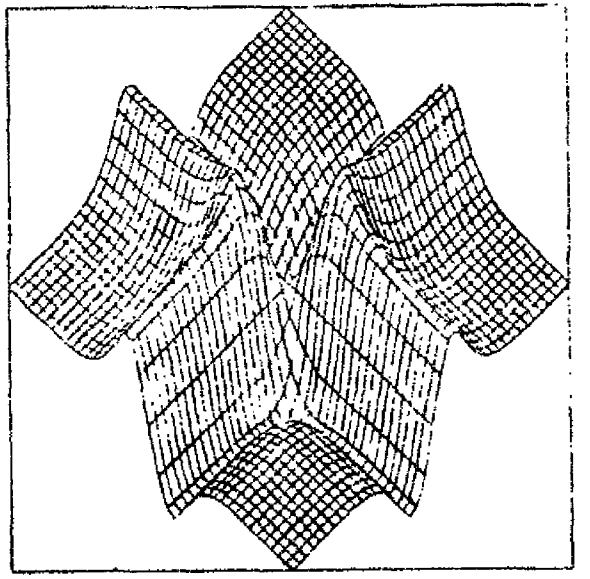


Рис. 3.13 $t_3 = 41.8$

ся стационарным (см.рис.(3.4) (3.7) и инвариантным относительно преобразований $P_1 \div P_5$ (расчет проведен до t = 40,8).

Рассмотрим теперь эволюцию функции V. Ее амплитуда на два порядка меньше, чем у функции u. По-прежнему профиль $V(x,y)$ остается пространственно симметричным (преобразования $P_1 \div P_3$), однако инвариантности относительно преобразований P_4 и P_5 здесь уже нет (линия 6 при отражении относительно осей координат не переходит в линию 1 (см.рис.(3.10),(3.12))).

Потеря инвариантности относительно преобразований P_4 и P_5 при сохранении пространственной симметрии решения связана с особенностями вычислительного экоперимента. Здеоь необходимо рассмотреть два вопроса: а) пространственная изотропность используемых в расчетах алгоритмов; б) представление положительных и отрицательных чиоел в используемых типах данных.

Сохранение чисто пространотвенной симметрии решения обусловлено тем, что расчетные алгоритмы, реализованные в пакете прикладных программ ТЕКОН [9], о помощью которого проводились вычисления, являются пространственно изотропными. Они не выделяют преимущественных пространотвенных направлений. При использовании в расчетах пространственно несимметричных алгоритмов, например, стандартного варианта метода прогонки, инвариантности относительно преобразований $P_1 \div P_3$ не наблюдается.

Спонтанная потеря симметрии относительно преобразований P_4 и P_5 связана с приближенным выполнением равенств вида $a = -(-a)$ для чисел a в форме с плавающей запятой, которая употребляется в операционном окружении мониторной системы ДУБНА [11] в ОС ДИСПАК [12] на ЭВМ БЭСМ-6. Поскольку процесо расчитывается для больших времен $t \gg \tau_D$, то отличие в последних разрядах чисел становится заметным в пятом знаке решения. Однако, несмотря на постоянно вносимые возмущения, профиль функции V и после потери инвариантности относительно преобразований P_4 и P_5 практически не меняется (см.рис.(3.10)÷(3.13), что свидетельотвует об определенной устойчивости изучаемого стационара.

По аналогии с подходом, развитым для модели (1.1) [4÷6], исследуемый процесс удобно рассматривать как взаимодейотвие структур, каждая из которых метастабильно устойчива и сущеотвует конечное время. Однако, если ранее взаимодействие структур и наличие пространственной симметрии лишь увеличивало времена жизни структур в неоколько раз [5,6], то здесь формируются отационар-

ные распределения, устойчивые относительно определенного класса возмущений.

4. Эффект рождения структур. Волновые свойства триггерных сред.

Большой интерес в синергетике представляют процессы формирования новых структур. Чтобы выяснить их особенности в рамках исследуемой модели в пространственно-многомерном случае, рассмотрим эволюцию финитных начальных распределений на однородном нулевом фоне $u(x,y)=0,\ v(x,y)=0$. Пусть $D_1 = 0{,}180$, $D_2=0{,}576$;
$u = 4{,}0(x-0{,}3)$, $v = 0{,}5(x-0{,}3)$ при $0 \leq x \leq 0{,}3,\ y \leq x$;
$u = 4{,}0(y-0{,}3)$, $v = 0{,}5(y-0{,}3)$ при $0 \leq x \leq 0{,}3,\ y > x$;
$u(x,y)=v(x,y)=0$ в остальной части пространства. Задача (I.3),(I.4) решается в квадрате со стороной I2,3. Вначале амплитуда профиля $u(x,y)$ быстро падает. От центра идет цилиндрически симметричная волна (см.рис.(4.I)÷(4.4),(4.7)÷(4.I0)). Обратим внимание на важную деталь: хотя общее число возникающих экстремумов увеличивается, немонотонности, появившиеся в предыдущие моменты времени, меняются слабо. Несмотря на нестационарность процесса, распределение по-прежнему представляет собой композицию диффузионных областей и участков, где функция $u(x,y)$ практически постоянна (см.рис.(4.I)÷(4.6). Ширина диффузионной области везде, кроме фронта ее формирования, практически одинакова и близка к ширине переходной области элементарной структуры (см.рис.(4.I)÷(4.6), (4.I3)÷(4.I8)). Это позволяет говорить о том, что процесс формирования структур воспроизводится на соседних пространственных масштабах. При этом наблюдаемое в расчетах наличие четкой границы области, где происходит воспроизведение диссипативных структур, позволяет говорить о волновом характере процесса и отождествлять эту границу с фронтом волны.

К моменту t_3 цилиндрическая симметрия, которой обладало начальное распределение, теряется - начинает сказываться ограниченность пространственной области, ее форма и граничные условия. Локализации влияния краевых условий на данной стадии процесса не наблюдается.

Внешне эволюция функции $v(x,y)$ имеет более сложный характер. Однако здесь можно выделить следующие закономерности. С появлением переходной области функции $u(x,y)$ формируется один максимум и один минимум в распределении функции $v(x,y)$. Последний возникающий экстремум имеет наибольшую амплитуду (см.рис.(4.7)÷(4.I2).

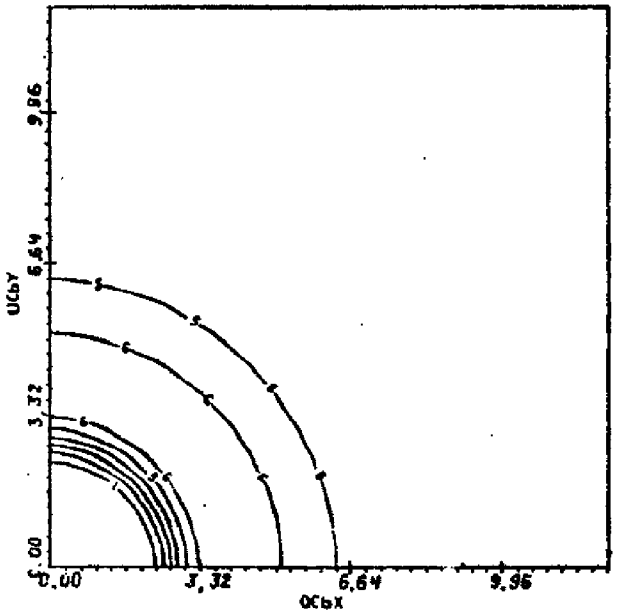


Рис 4.1

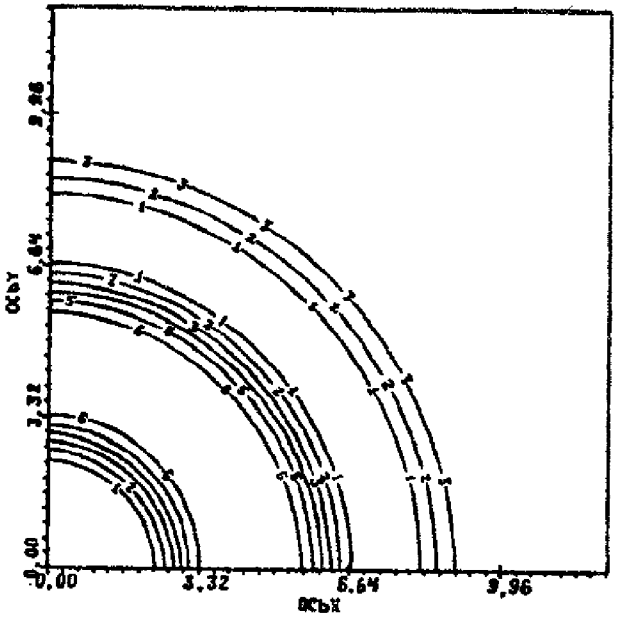


Рис 4.3

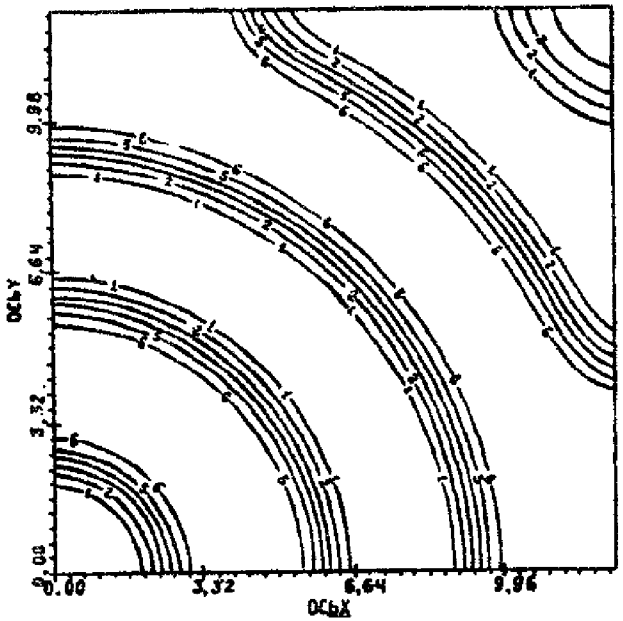


Рис. 4.5

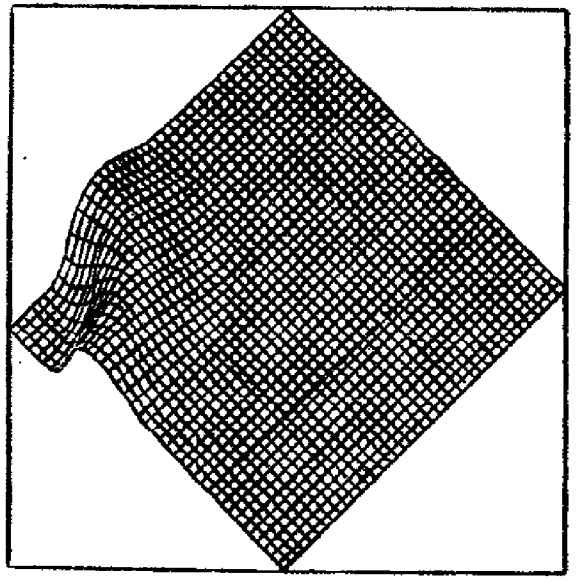
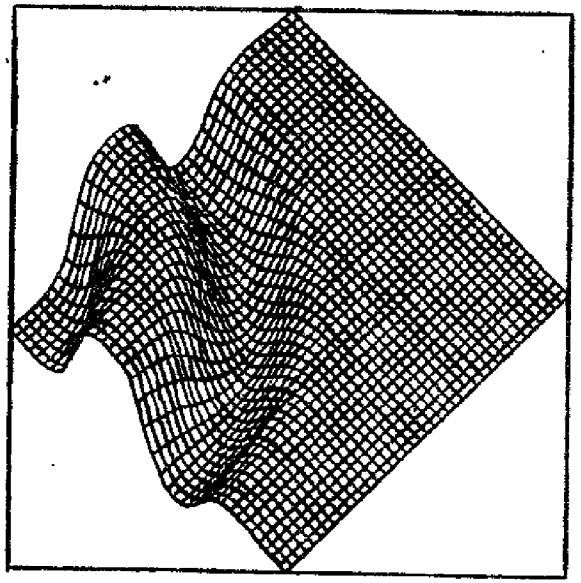


Рис. 4.2 $t_1=6{,}95$



$u(x,y,t)$ Рис. 4.4 $t_2=11{,}05$

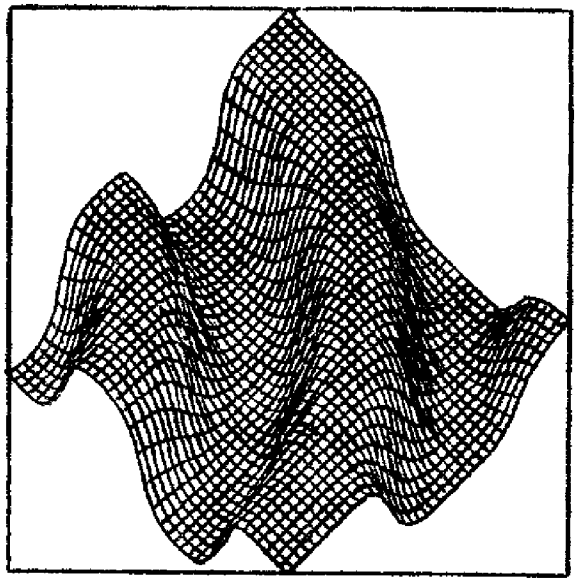


Рис. 4.6 $t_3=17{,}15$

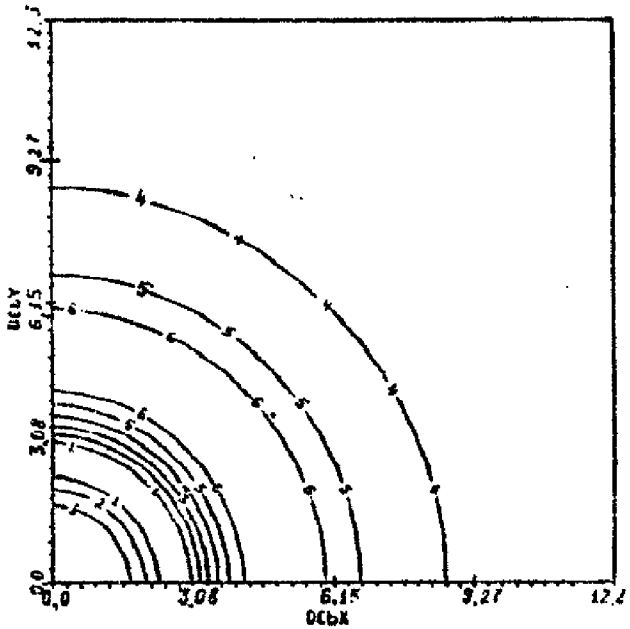


Рис. 4.7

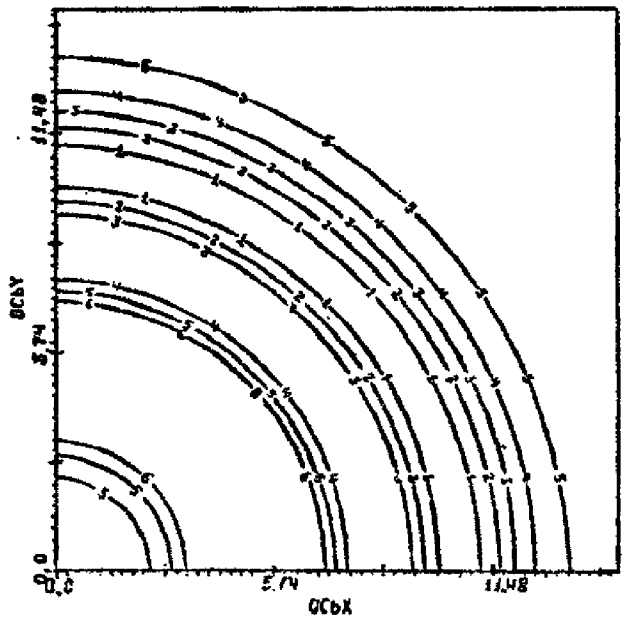


Рис. 4.9

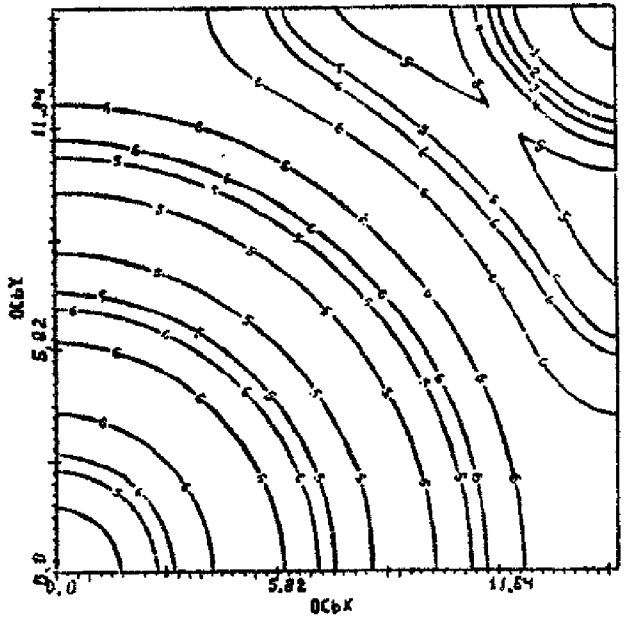


Рис. 4.11

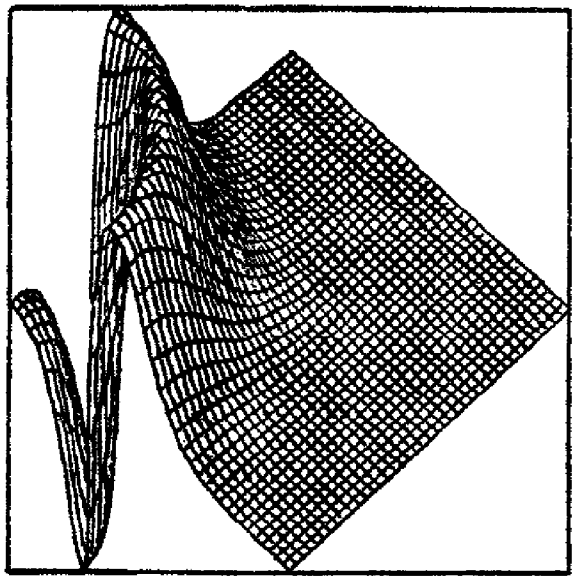
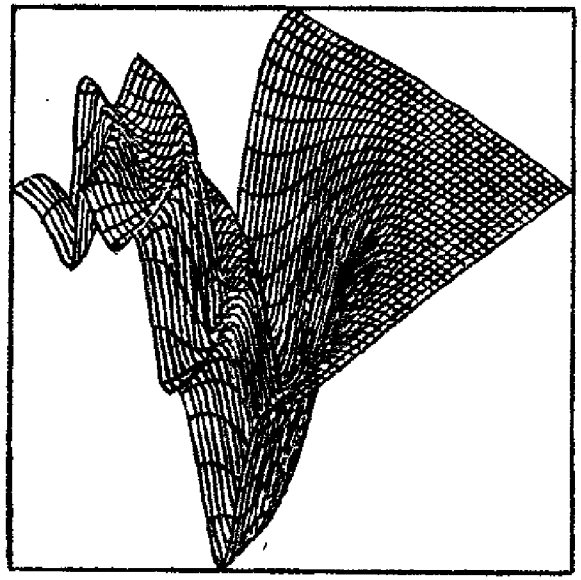


Рис. 4.8 $t_1 = 6{,}95$



$v(x,y,t)$ Рис. 4.10 $t_2 = 11{,}05$

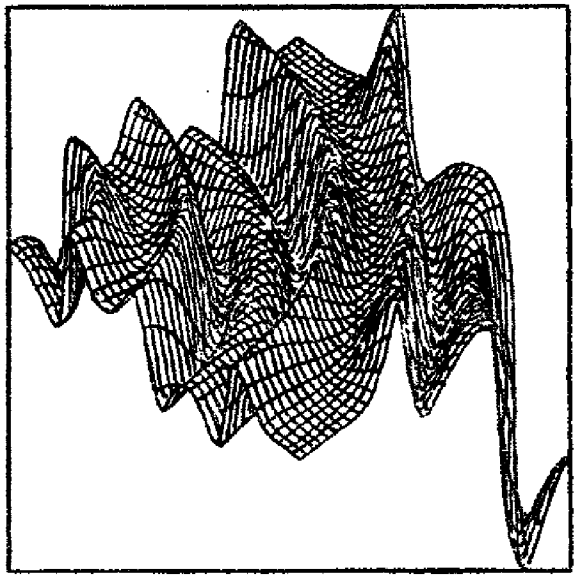


Рис 4.12 $t_3 = 17{,}15$

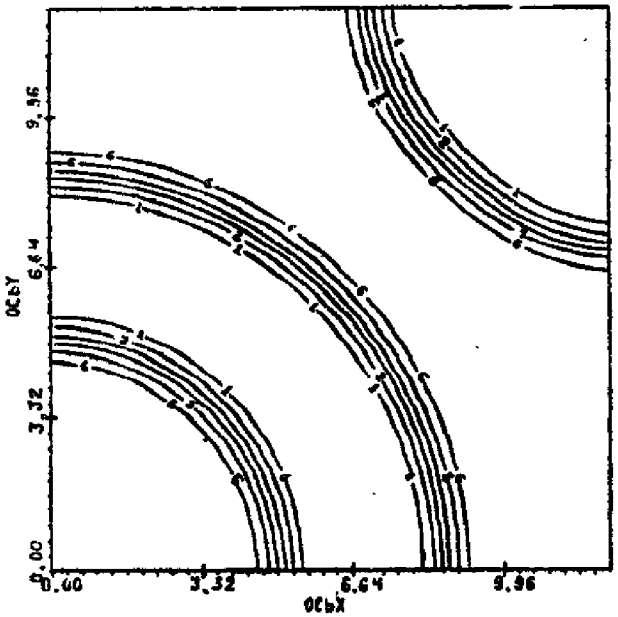


Рис. 4.13

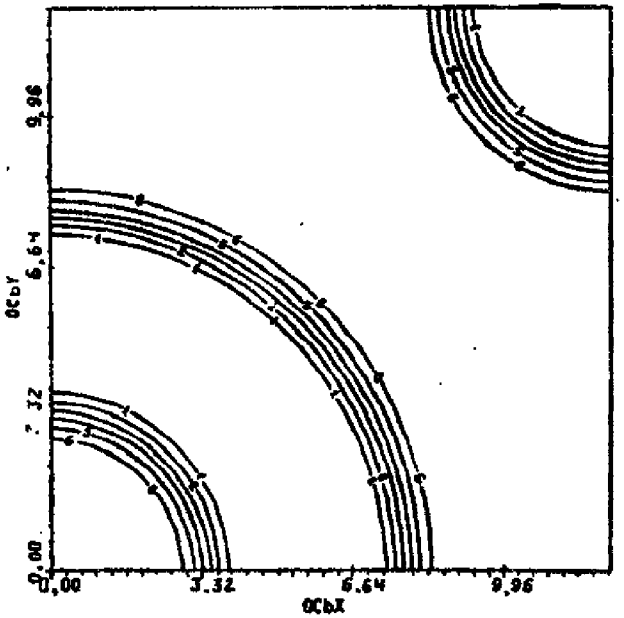


Рис. 4.15

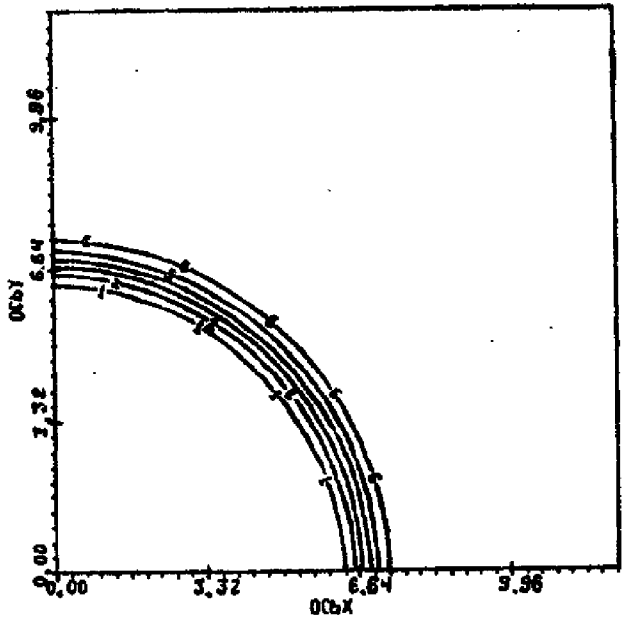


Рис. 4.17

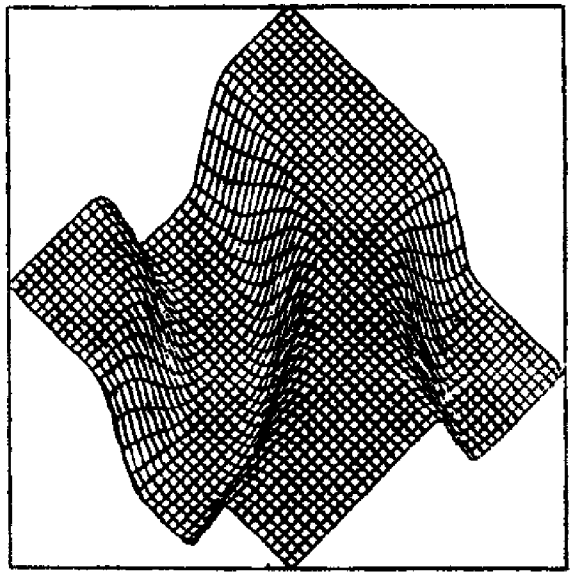
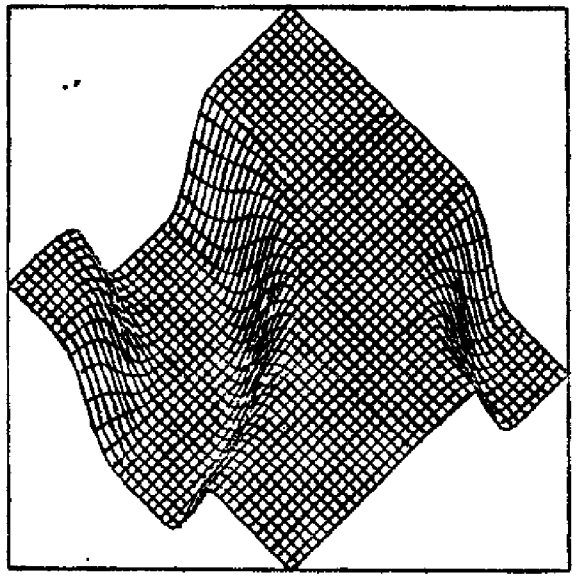


Рис. 4.14 $t_4 = 46{,}05$



$u(x,y,t)$ Рис. 4.16 $t_5 = 86{,}45$

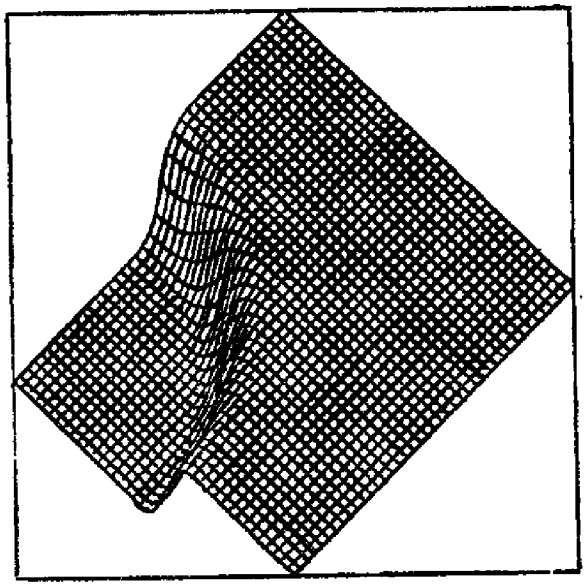


Рис. 4.18 $t_6 = 136{,}95$

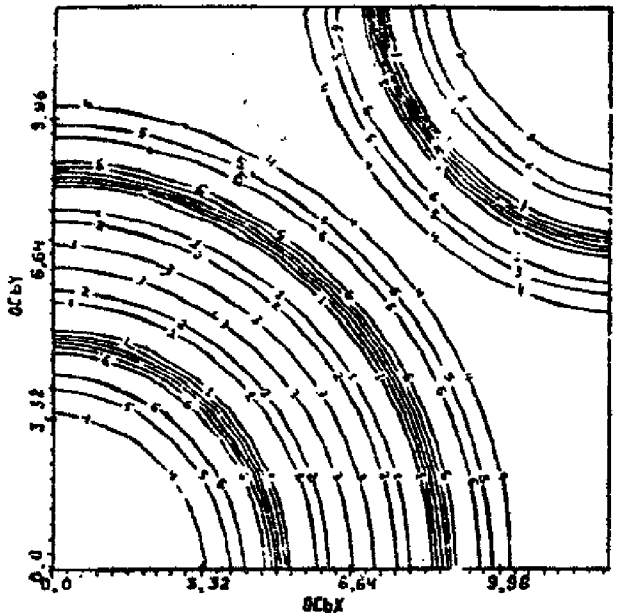


Рис 4.19

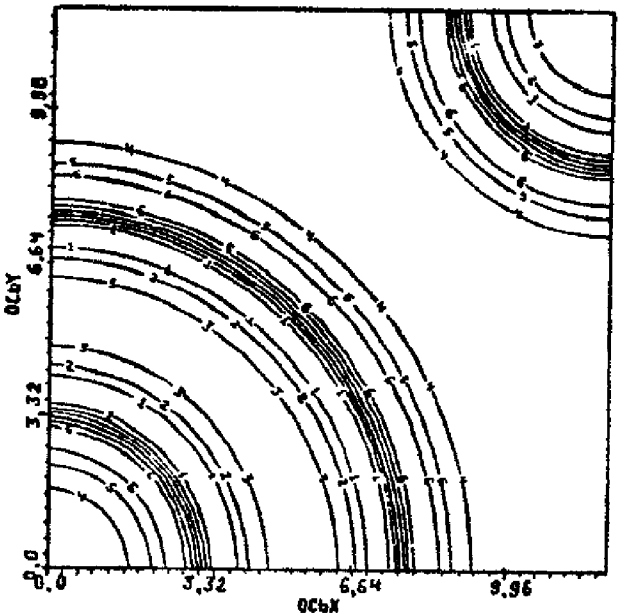


Рис 4.21

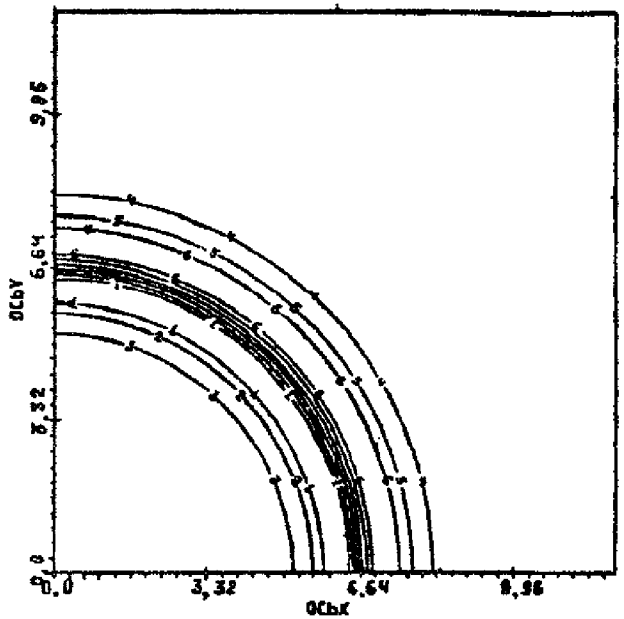


Рис. 4.23

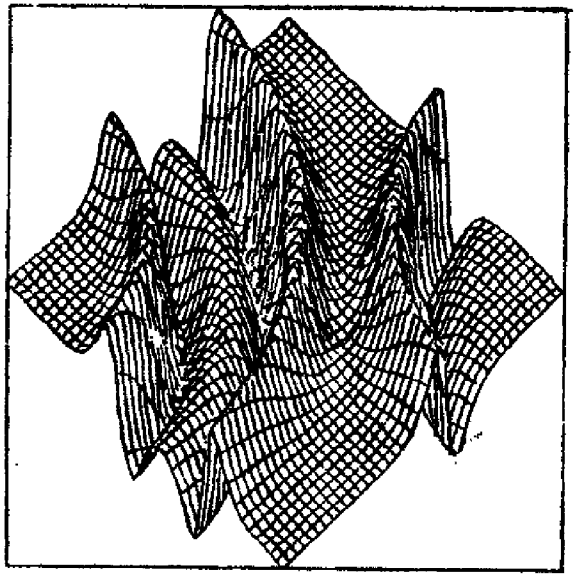
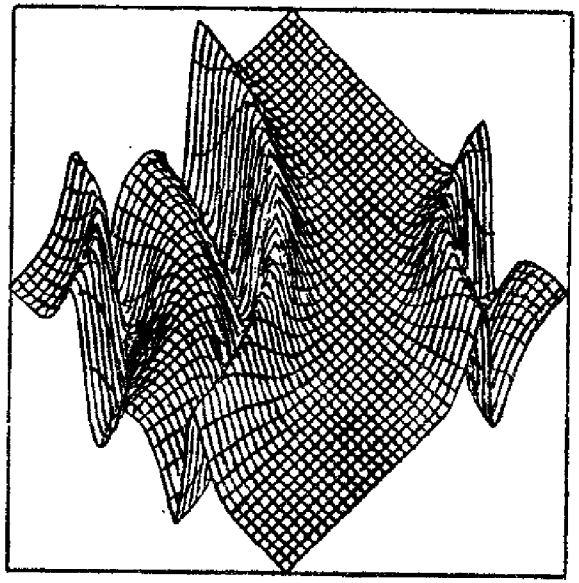


Рис 4.20 $t_4 = 46{,}05$



$v(x,y,t)$ Рис. 4.22 $t_5 = 86{,}45$

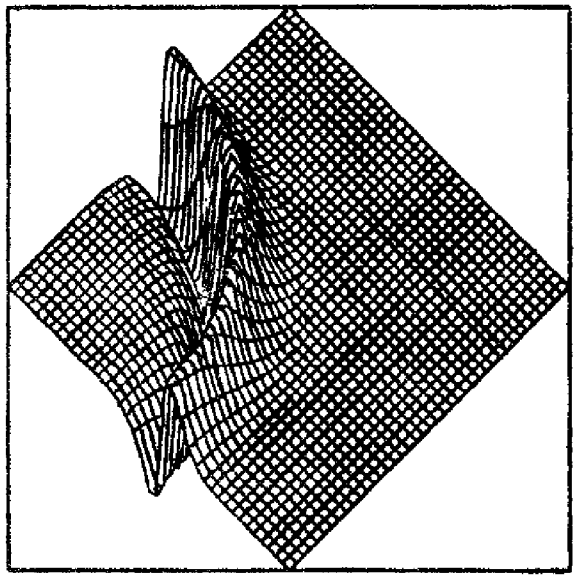


Рис. 4.24 $t_6 = 136{,}95$

Как и в элементарной структуре, амплитуда функции $V(x,y)$ на два порядка меньше амплитуды функции $u(x,y)$. Значения функций $u(x,y)$ и $V(x,y)$ на горизонтальных плато стремятся к одному из устойчивых фонов, определяемому внешней кривизной диффузионной области. Дальнейшая эволюция распределения может быть понята, исходя из результатов рассмотренной выше задачи о финитных распределениях на устойчивом фоне. Из этой задачи следует, что структуры меньшего радиуса (в нашем случае - наиболее близкие к точкам $(0,0)$ и (L,L)) должны быстрее остальных схлопываться на свои центры симметрии, причем эти процессы идут автономно в силу эффективной локализации структур. Именно такая картина и наблюдается в вычислительном эксперименте.

Последняя оставшаяся структура, так же как и остальные, схлопывается на центр (точка $(0,0)$), однако ее время жизни значительно превышает времена существования остальных структур (см.рис.(4.17, 4.18)).

Процесс спонтанного возникновения структур представляется наиболее интересным в рамках изучаемой модели, поскольку в пределах задачи (1.3) можно описать рождение, развитие, взаимодействие и последующее вырождение структур. Подчеркнем принципиальное отличие рассматриваемой задачи от ее пространственно одномерного плоского аналога, где соответствующие начальные данные приводили к появлению стационарных структур. Приведенные расчеты дают также понимание того, как могут быть построены более сложные нестационарные структуры из простых, рассмотренных, например, в пункте 2. В частности, они могут представлять собой эволюцию начального профиля, являющегося многосвязной областью, в которой расстояния между внутренним и внешним контуром везде превышают длину взаимодействия L_{in}.

Вместе с тем полученные результаты позволяют поставить ряд новых задач. Какие структуры возникнут, если начальное возбуждение обладает симметрией (например, инвариантно относительно P_4 и P_5)? Как зависит число рождающихся отруктур от размеров пространственной области? Как происходит рождение структур в задаче Коши? Каковы особенности этого процесса в трехмерном случае? Ответы на эти вопросы были бы важным шагом в понимании свойств нелинейных диссипативных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Самарский, Ю.П.Попов. Разностные схемы газовой динамики". Наука, 1974.
2. Г.Николис, И.Пригожин. Самоорганизация в неравновесных системах. Мир, 1979.
3. Г.Хакен. Синергетика. "Мир", 1980.
4. С.П.Курдюмов, Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные заксны построения ее организации. Препринт ИПМ АН СССР, № 29, 1979.
5. С.П.Курдюмов, Г.Г.Малинецкий, Ю.А.Повещенко, Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Взаимодействие тепловых структур. Препринт ИПМ АН СССР, № 77 (1978).
6. С.П.Курдюмов, Г.Г.Малинецкий, Ю.А.Повещенко, Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Взаимодействие диссипативных тепловых отруктур в нелинейных средах. ДАН СССР том 251, № 4, стр.836-839 (1980).
7. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов. N и S режимы с обострением. Обзор в ПМТФ, № 1, 3-23(1977).
8. Г.Г.Малинецкий. Стационарные локализованные диссипативные структуры в триггерных двухкомпонентных средах. Препринт ИПМ АН СССР (в печати).
9. Ю.А.Повещенко, Ю.П.Попов, ТЕКОН. Пакет программ для решения тепловых задач. Препринт ИПМ АН СССР № 65, 1978.
10. Г.Г.Малинецкий. Об одном клаосе математических моделей, связанных с самоорганизацией. Препринт ИПМ АН СССР. № 142, 1980
11. Г.Л.Мазный. Программирование на БЭСМ-6 в системе "Дубна". "Наука" 1978.
12. И.Д.Бокова, С.А.Зельдинова, В.И.Зуев, В.К.Корякин, Л.В.Кошкина, Ю.В.Озорнин, В.Ф.Тюрин, Н.И.Щуленов. Операционная система ДИСПАК для БЭСМ-6 (пользователю) ИПМ АН СССР 1973.