больших положительных k'

$$\operatorname{cth}(kc_j+\ln 2)\approx 1+\tfrac{1}{2}e^{-2k'c_j}.$$

Используя это упрощение и вводя обозначение $c=\min\{c_1, c_2\}$, получаем (в общем случае считаем, что $c_1\neq c_2$)

$$(7)\qquad k\approx\frac{1}{b}\pi\left(q+\frac{1}{2}\right)-i\frac{1}{4b}e^{-2k'c}.$$

Здесь q — большое положительное целое число. Первое слагаемое в (7) есть хорошо известное выражение для собственных частот колебаний типа "прыгающего мячика" в замкнутом резонаторе ([4]). Второе слагаемое — чисто мнимое, оно описывает потери энергии, возникающие за счет просачивания энергии через барьерные зоны $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ и последующего ее излучения через каустики $\mathscr{K}_3$ и $\mathscr{K}_4$ в пространство.

Возможно, что приведенные выше соображения без существенных изменений могут быть обобщены на случай большего числа измерений и на векторные задачи. Практический интерес представляет также рассмотрение резонаторов с зеркалами, имеющими острые края. Автор надеется, что эти задачи будут исследованы в ближайшее время.

Ленинградский государственный университет им. А.А. Жданова

Поступило 11 II 1981

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л.А. Вайнштейн,* Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., "Сов. радио", 1966. [2] *Е.Ф. Ищенко,* Открытые оптические резонаторы, М., "Сов. радио", 1980. [3] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц,* Квантовая механика, нерелятивистская теория, М., 1963. [4] *В.М. Бабич, В.С. Булдырев,* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., "Наука", 1972. [5] *В.Ф. Лазуткин,* В кн.: Проблемы математической физики, в. 5, изд-во ЛГУ, 1971, стр. 72. [6] *Дж. Хединг,* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., "Мир", 1965.

УДК 519.6:536.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик А.А. САМАРСКИЙ, В.Ф. ТИШКИН, А.П. ФАВОРСКИЙ, М.Ю. ШАШКОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

1. Численное решение задач математической физики показало, что эффективным критерием оценки качества разностных схем является воспроизведение ими важнейших свойств исходных уравнений. В настоящее время разработаны конструктивные методы построения разностных схем ([1-2]), обладающих заданными качествами, такими, как консервативность ([1]) и полная консервативность ([3]). Вместе с тем при теоретическом рассмотрении разностных схем удобным оказывается их представление в операторном виде ([1]). Очевидно также, что располагая разностными аналогами основных операторов математической физики, построение разностных схем можно, по существу, свести к формальной процедуре. Качество получаемых таким образом разностных схем определяется свойствами указанных разностных

операторов. В первую очередь здесь следует выделить фундаментальные соотношения векторного анализа, связывающие исходные дифференциальные операторы. Разностные операторы, воспроизводящие эти свойства, назовем согласованными.

Рассмотрение разностных аналогов операторов grad, div и rot, по-видимому, впервые было проведено ([4], [5]) для частного случая прямоугольных сеток в ортогональных координатах.

Предлагаемое в настоящей работе обобщение разностных операторов GRAD, DIV, ROT на случай произвольных косоугольных сеток носит неформальный характер. Особое внимание уделяется достижению свойства согласованности, тесно связанного с консервативностью и полной консервативностью соответствующих разностных схем ([6]). Введенное определение понятия согласованности операторов одновременно служит конструктивной основой для их построения.

2. Как известно, выполнение законов сохранения формально связано с определенными интегральными свойствами основных операторов математической физики grad, div и rot:

$$(1)\qquad \oint_S \varphi(\mathbf{n},\mathbf{A})\,dS=\int_V \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV+\int_V (\mathbf{A},\mathrm{grad}\,\varphi)\,dV;$$

$$(2)\qquad \oint_S (\mathbf{n},[\mathbf{A}\times\mathbf{B}])\,dS=\int_V (\mathbf{B},\mathrm{rot}\,\mathbf{A})\,dV-\int_V (\mathbf{A},\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\,dV;$$

$$(3)\qquad \oint_S \varphi(\mathbf{C},[\mathbf{n}\times\mathbf{A}])\,dS=\int_V \varphi(\mathbf{C},\mathrm{rot}\,\mathbf{A})\,dV-\int_V (\mathbf{C},[\mathbf{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi])\,dV;$$

здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\mathbf{C}$ – произвольная вектор-функция такая, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{C}\equiv 0$.

Естественно потребовать, чтобы разностные операторы GRAD, DIV, ROT, аппроксимирующие grad, div и rot, удовлетворяли дискретным аналогам соотношений (1)–(3). Систему разностных операторов, обладающих такими свойствами, назовем согласованной.

Если операторы GRAD, DIV и ROT построены, то остальные операции можно ввести, исходя из формул векторного анализа. Например, операция $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ определяется соотношением

$$(4)\qquad (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}=0{,}5\{\mathrm{grad}(\mathbf{A},\mathbf{B})-[\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}]-[\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}]-\mathrm{rot}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]+ \\ +\mathbf{A}\,\mathrm{div}\mathbf{B}-\mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}\}.$$

3. Для построения согласованной системы операторов поступим следующим образом. Выберем какой-либо из операторов grad, div или rot и аппроксимируем его непосредственно. Полученный разностный оператор назовем определяющим. Отметим, что при заданном способе дискретизации скалярных и векторных величин выбор определяющего оператора целесообразно производить, исходя из возможности достаточно просто его аппроксимировать. Далее с помощью дискретных аналогов тождеств (1)–(3) построим остальные разностные операторы, которые будем называть определяемыми. При этом структура определяемых операторов зависит от вида аппроксимации интегральных выражений в (1)–(3).

4. Области определения и области значений разностных операторов тесно связаны со структурой используемой расчетной сетки. Не ограничивая общности, рассмотрим в дальнейшем случай, когда все функции зависят только от двух пространственных переменных в пространстве декартовых координат x, y, z.

Пусть в области Ω, лежащей в плоскости (x, y), введена четырехугольная сетка, по структуре аналогичная прямоугольной сетке в единичном квадрате, а в остальном произвольная (рис. 1a). Узлы такой сетки занумеруем двумя индексами ij, индекс ячейки совпадает с индексом ее левой нижней вершины. Для описания

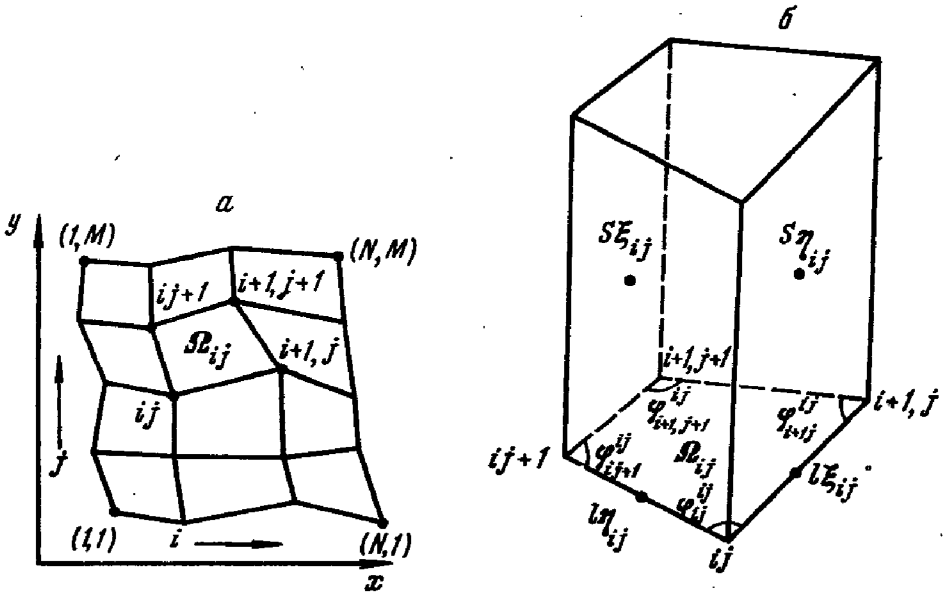

Рис. 1. *а* – Структура разностной сетки; *б* – индексация геометрических элементов сетки

векторных функций удобно формально ввести в рассмотрение пространственную сетку, состоящую из прямых призм, опирающихся на ячейки Ω_{ij} плоской сетки. Объем такой призмы обозначим V_{ij} (рис. 1*б*). Индексация остальных геометрических элементов пояснена на рис. 1*б*.

5. Для удобства изложения введем различные пространства сеточных функций. Пространство сеточных скалярных функций, значения которых вычисляются в узлах сетки $\{(ij)\}$, обозначим через HK. Пространство сеточных скалярных функций, определенных в центрах ячеек $\{\Omega_{ij}\}$, будем обозначать через HC. Для описания вектор-функций используем два способа. Вектор-функцию **A** можно характеризовать с помощью ее ортогональных проекций на направления нормалей к граням призмы V_{ij}. Значения таких проекций $AS\xi_{ij}$, $AS\eta_{ij}$, $AS\zeta_{ij}$ отнесены к центрам соответствующих граней. Пространство введенных таким образом сеточных вектор-функций обозначим через $\mathcal{H}S$. При втором способе описания вектор-функций **A** будем использовать значения ортогональных проекций на направления ребер призмы V_{ij}. Компоненты $AL\xi_{ij}$, $AL\eta_{ij}$, $AL\zeta_{ij}$ сеточной вектор-функции **A** определены в центрах соответствующих ребер. Пространство таких сеточных вектор-функций обозначим через $\mathcal{H}L$.

6. Пусть, например, скалярные функции заданы своими значениями в узлах. Оператор grad в каждой точке пространства полностью описывается своими ортогональными проекциями на три некомпланарных направления l_1, l_2, l_3:

$$\text{(5)}\qquad \operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial l_1};\ \frac{\partial u}{\partial l_2};\ \frac{\partial u}{\partial l_3}\right\}.$$

В дискретном случае естественно выбрать l_1, l_2, l_3 направленными вдоль соответствующих ребер ячейки пространственной сетки. Используя формулу (5), определяющий оператор GRAD определим следующим образом:

$$\text{(6)}\qquad (\mathrm{GRAD}\,u)_{ij} = \left\{\frac{u_{i+1} - u_{ij}}{l\xi_{ij}};\ \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{l\eta_{ij}};\ 0\right\},$$

где $l\xi_{ij}$, $l\eta_{ij}$ – длины соответствующих сторон ячейки Ω_{ij} (рис. 1). Из (6) следует, что областью определения оператора GRAD в данном случае являются сеточные функции из HK, а областью значений – пространство сеточных вектор-функций $\mathcal{H}L$.

Для построения определяемого оператора DIV воспользуемся дискретным аналогом тождества (1), где $\varphi \in HK$, $\mathbf{A} \in \mathcal{H}L$. Аппроксимируя входящие в (1) интегральные выражения, например аналогично ([7]), получим в результате выражение для оператора DIV: $\mathcal{H}L \to HK$

$$(7)\quad (\mathrm{DIV}\,\mathbf{A})_{ij} = \Big\{ \sum_{p=0,1} (-1)^p \frac{AL\xi_{i-p,j}}{l\xi_{i-p,j}} \sum_{l,q=0,1} \frac{V_{i-p,j-q}}{\sin^2 \varphi^{i-p,j-q}_{i+l-p,j}} +$$

$$+ \sum_{p=0,1} \frac{1}{l\xi_{i-p,j}} \sum_{l,q=0,1} (-1)^{l-q} \frac{V_{i-p,j-q} \cos \varphi^{i-p,j-q}_{i+l-p,j}}{\sin^2 \varphi^{i-p,j-q}_{i+l-p,j}} AL\eta_{i+l-p,j-q} +$$

$$+ \sum_{p=0,1} (-1)^p \frac{AL\eta_{ij-p}}{l\eta_{ij-p}} \sum_{l,q=0,1} \frac{V_{i-q,j-p}}{\sin^2 \varphi^{i-q,j-p}_{i,j+l-p}} +$$

$$+ \sum_{p=0,1} \frac{1}{l\eta_{i,j-p}} \sum_{l,q=0,1} (-1)^{l-q} \frac{V_{i-q,j-p} \cos \varphi^{i-q,j-p}_{i,j+l-p}}{\sin^2 \varphi^{i-q,j-p}_{i,j+l-p}} AL\xi_{i-q,j+l-p} \Big\} \times$$

$$\times \Big(\sum_{l,q=0,1} V_{i-l,j-q} \Big)^{-1}.$$

Таким же образом, используя соотношение (3), приходим к определению оператора ROT: $\mathcal{H}L \to \mathcal{H}S$; $(\mathrm{ROT}\,\mathbf{A})_{ij} = \{RS\xi_{ij}, RS\eta_{ij}, RS\zeta_{ij}\}$:

$$RS\xi_{ij} = -\frac{1}{l\eta_{ij}}(AL\zeta_{ij+1} - AL\zeta_{ij}),$$

$$(8)\quad RS\eta_{ij} = \frac{1}{l\xi_{ij}}(AL\zeta_{i+1j} - AL\zeta_{ij}),$$

$$RS\zeta_{ij} = \frac{1}{\Omega_{ij}}\{-(AL\xi_{ij+1}l\xi_{ij+1} - AL\xi_{ij}l\xi_{ij}) + (AL\eta_{i+1j}l\eta_{i+1j} - AL\eta_{ij}l\eta_{ij})\}.$$

Для образования повторных операций оператору rot необходимо поставить в соответствие еще один разностный аналог – $\mathcal{R}$OT: $\mathcal{H}S \to \mathcal{H}L$. Построение этого оператора производится на основе тождества (2), вид этого оператора аналогичен построенному в ([7]).

Полученные операторы допускают возможность образования повторных операций, при этом оказывается $(\mathrm{DIV}\cdot\mathrm{GRAD})^* = \mathrm{DIV}\cdot\mathrm{GRAD} < 0$; $(\mathrm{ROT}\cdot\mathcal{R}\mathrm{OT})^* = \mathrm{ROT}\cdot\mathcal{R}\mathrm{OT} > 0$; $\mathrm{ROT}\cdot\mathrm{GRAD} \equiv \mathbf{0}$; $\mathrm{DIV}\cdot\mathcal{R}\mathrm{OT} \equiv \mathbf{0}$. Отметим, что операторы DIV×GRAD, ROT·$\mathcal{R}$OT имеют дивергентный вид ([1]). Приведенные выше свойства разностных операторов позволяют представить любую сеточную вектор-функцию $A \in \mathcal{H}L$ в виде ортогонального разложения $\mathbf{A} = \mathrm{GRAD}\,\varphi + \mathcal{R}\mathrm{OT}\,\mathbf{B}$, где $\varphi \in HK$, $\mathbf{B} \in \mathcal{H}S$. Подобное разложение для случая прямоугольных сеток было получено в ([4]).

7. Аналогичным образом в качестве определяющего можно выбрать оператор div. Непосредственная аппроксимация этого оператора может производиться интегроинтерполяционным методом согласно определению

$$(9)\quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS}{V}.$$

Оператор DIV: $\mathcal{H}S \to HC$, построенный на основе (9), имеет вид ([8], [9])

$$(\mathrm{DIV}\,\mathbf{A})_{ij} = \frac{1}{V_{ij}}(AS\xi_{ij+1}S\xi_{ij+1} - AS\xi_{ij}S\xi_{ij} + AS\eta_{i+1j}S\eta_{i+1j} - AS\eta_{ij}S\eta_{ij}).$$

Определяемые операторы GRAD: $HC \to \mathcal{H}S$; $\mathcal{R}$OT: $\mathcal{H}S \to \mathcal{H}L$; ROT: $\mathcal{H}L \to \mathcal{H}S$ строятся соответственно на основе соотношений (1)–(3).

Выбор оператора rot в качестве определяющего позволяет получить еще одну систему согласованных операторов. Непосредственная аппроксимация этого оператора производится в соответствии с его определением

$$(10) \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \mathbf{n}) = \lim_{S \to 0} \frac{\oint\limits_l (\mathbf{A}, d\mathbf{l})}{S}.$$

Определяющий оператор ROT: $\mathcal{H}L \to \mathcal{H}S$, построенный на основе (10), совпадает с оператором, заданным равенствами (8) (см. ([7])). Определяемые операторы GRAD: $HK \to \mathcal{H}L$; DIV: $\mathcal{H}L \to HK$; $\mathcal{R}$OT: $\mathcal{H}S \to \mathcal{H}L$ строятся соответственно на основе соотношений (3), (1), (2).

Наряду с использованием соотношений (5), (9), (10) можно использовать и другие подходы к аппроксимации определяющих операторов, например, приведенные в ([9, 10]). Отметим также, что изложенный подход к построению разностных схем применим для сеток произвольной структуры и для любого сеточного описания скалярных и векторных величин. В качестве условий согласования вместо соотношений (1)–(3) могут также использоваться соответствующие вариационные принципы ([2]), ([7]), ([8]).

Аппроксимация определяющих операторов, очевидно, следует из способа их введения. Аппроксимация же операторов, полученных из условий согласования, в каждом конкретном случае должна являться предметом специального рассмотрения. Некоторые примеры исследования аппроксимации определяемых операторов можно найти в ([7, 8]). Дивергентный вид построенных операторов второго порядка позволяет использовать при исследовании сходимости результаты общей теории ([1]).

Отметим, что на прямоугольной сетке построенные предлагаемым методом разностные схемы переходят в известные схемы из ([1]).

8. В заключение отметим, что согласованные разностные операторы использовались при построении разностных схем для уравнений теплопроводности, диффузии магнитного поля и гидродинамики. Примеры прикладных расчетов можно найти в ([11, 12]).

Авторы благодарят Т.К. Коршия за полезные обсуждения.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
9 I 1981

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А.А. Самарский*, Теория разностных схем, М., "Наука", 1977. [2] *В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский*, ДАН, т. 235, № 6, 1285 (1977). [3] *А.А. Самарский, Ю.П. Попов*, Разностные схемы газовой динамики, М., "Наука", 1975. [4] *В.И. Лебедев*, Журн.вычислит. матем. и матем.физ., т. 4, № 3, 449 (1964); т. 4, № 4, 649 (1964). [5] *А.Л. Крылов*, ДАН, т. 142, № 3, 572 (1962). [6] *А.П. Фаворский*, Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики, Препринт ИПМ АН СССР, № 159, 1979. [7] *Т.К. Коршия, В.Ф. Тишкин и др.*, ДАН, т. 254, № 6, 1388 (1980). [8] *Т.К. Коршия, В.Ф. Тишкин и др.*, Журн.вычислит.матем. и матем.физ., т. 20, № 2, 401 (1980). [9] *А.П. Фаворский*, Дифференц.уравнения, т. 16, № 7, 1308 (1980). [10] *В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский*, ДАН, т. 246, № 5, 1083 (1979). [11] *Е.Г. Гамалий, В.Б. Розанов и др.*, ЖЭТФ, т. 79, вып. 2(8), 459 (1980). [12] *Е.Г. Гамалий, В.А. Гасилов и др.*, Спонтанные магнитные поля в сферической плазме при двухстороннем лазерном облучении. Препринт ФИАН СССР № 122, 1980.