ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 21 Январь 1981 Февраль № 1

УДК 517.958:537.84

ВАРИАЦИОННЫЕ СХЕМЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. М. ГОЛОВИЗНИН, Т. К. КОРШИЯ, А. А. САМАРСКИЙ, В. Ф. ТИШКИН, А. П. ФАВОРСКИЙ

(Москва)

На основе вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия в классической механике, строятся разностные схемы для трехмерных уравнений МГД. При этом используется произвольная криволинейная система координат. Исследованы свойства получившихся разностных уравнений.

§ 1. Дифференциальные уравнения

1. При численном моделировании движения сплошной среды оказывается удобным использовать формализм, основанный на введении функции Лагранжа [1, 2]. В отсутствие диссипативных процессов лагранжиан сплошной среды, погруженной в магнитное поле, можно представить в виде

$$L=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{v_iv^i}{2}-\varepsilon-\frac{H_iH^i}{8\pi\rho}\right)\rho g^{1/2}\,d\Omega. \tag{1.1}$$

Здесь в качестве эйлеровой системы отсчета применяется произвольная неподвижная криволинейная система координат x^i, $i=1, 2, 3$; ρ — плотность; ε — удельная внутренняя энергия; v_i, v^i суть ко- и контравариантные компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$; H_i, H^i суть ко- и контравариантные компоненты вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$; Ω — область, занятая средой, $d\Omega=dx^1dx^2dx^3$; g — определитель метрического тензора g_{ik}. В дальнейшем предполагается, что латинские индексы принимают значения от 1 до 3; повторяющийся индекс означает суммирование.

Переходя к лагранжевым координатам q^i, т. е. полагая $x^i=x^i(q^1, q^2, q^3, t)$, $dx^i/dt=v^i(q^1, q^2, q^3, t)$, можно переписать лагранжиан (1.1) в виде

$$L=\int\limits_{\Omega_q}\left(\frac{v_iv^i}{2}-\varepsilon-\frac{H_iH^i}{8\pi\rho}\right)\rho Jg^{1/2}\,d\Omega_q,$$

где $\Omega_q=\Omega(\mathbf{x}(\mathbf{q}))$, $d\Omega_q=dq^1dq^2dq^3$, $J=\partial(x^1, x^2, x^3)/\partial(q^1, q^2, q^3)>0$.

Задание лагранжиана вместе с дополнительными связями, отражающими характерные особенности течения, полностью описывает МГД-систему. В рассматриваемом случае роль таких связей играют условия неразрывности, сохранения магнитного потока и адиабатичности.

2. Условие неразрывности следует из закона сохранения массы произвольного жидкого объема $\Omega' \subset \Omega$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega'} \rho g^{1/2}\, d\Omega = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_q'} \rho J g^{1/2}\, d\Omega_q = 0,$$

или

$$\rho J g^{1/2} = \rho_0(\mathbf{q}). \tag{1.2}$$

Если в качестве q^i принять координаты частиц среды в начальный момент, то ρ_0 имеет смысл плотности при $t=0$. Дифференцируя (1.2) по времени, получаем соотношение

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho g^{-1/2}\frac{\partial g^{1/2} v^i}{\partial x^i} = 0,$$

представляющее собой уравнение неразрывности в криволинейной системе координат.

3. Условие сохранения магнитного потока через произвольную жидкую поверхность Σ (условия вмороженности для бесконечно электропроводной среды) выражается в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma} H^i g^{1/2}\, dS_i = 0;$$

здесь dS_i — компоненты псевдовектора элементарной площадки [3]. Величины $g^{1/2} dS_i$ — компоненты вектора, направленного по нормали к элементу поверхности и по абсолютной величине равного его площади. Используя правила преобразования псевдовекторов [4], находим, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma_q} H^i J g^{1/2}\frac{\partial q^k}{\partial x^i}\, dS_{qk} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь dS_{qk} — компоненты $d\mathbf{S}$ в лагранжевой системе координат. Из (1.3) нетрудно получить условия вмороженности в форме

$$g^{1/2} J_i^{\ k} H^i = \Phi^k(\mathbf{q}), \tag{1.4}$$

где

$$J_i^{\ k} = J\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2} e^{kmn} e_{irl}\frac{\partial x^r}{\partial q^m}\frac{\partial x^l}{\partial q^n},$$

e^{kmn}, e_{irl} — абсолютно антисимметричные тензоры.

Учитывая свойство $J_i^{\ k}$

$$J_i^{\ k}\frac{\partial x^m}{\partial q^k} = \delta_i^{\ m} J, \tag{1.5}$$

равенства (1.4) легко разрешить относительно H^i:

$$J g^{1/2} H^i = \Phi^k \partial x^i / \partial q^k. \tag{1.6}$$

Из (1.6) непосредственно следуют уравнения индукции и изменения энергии магнитного поля в лагранжевых переменных:

$$J g^{1/2}\frac{dH^i}{dt} = -\frac{dJ^{1/2} g}{dt} H^i + \Phi^k \frac{\partial v^i}{\partial q^k}, \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dt} J g^{1/2} \frac{H^i H_i}{8\pi} = -\frac{H_i H^i}{8\pi} \frac{dJ g^{1/2}}{dt} + \frac{H_i \Phi^k}{4\pi} \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \frac{J g^{1/2} H^m H^n}{8\pi} \frac{\partial g_{mn}}{dt}. \tag{1.8}$$

4. Условие адиабатичности течения выражается равенством

$$d\varepsilon = -p d\rho^{-1}. \tag{1.9}$$

Совместно с уравнением неразрывности (1.2) условие (1.9) определяет закон изменения ε:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \frac{d}{dt}(J g^{1/2}). \tag{1.10}$$

5. Согласно принципу наименьшего действия, движение среды происходит таким образом, что функционал действия

$$F = \int_{t_1}^{t_2} L(t)\, dt$$

принимает стационарное значение [5, 6], т. е.

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_q} \left\{ \rho_0 \left[g_{il} v^l \delta v^i + \frac{v^i v^l}{2} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \delta x^k - \delta\varepsilon \right] - \right.$$

$$\left. -\delta(J g^{1/2}) \frac{H_i H^i}{8\pi} - \frac{J g^{1/2}}{4\pi} g_{il} H^l \delta H^i - J \frac{g^{1/2} H^l H^i}{8\pi} \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} \delta x^k \right\} d\Omega_q\, dt = 0.$$

Используя дополнительные условия (1.2), (1.6), (1.9), можно исключить отсюда вариации $\delta\varepsilon$, δv^i, δH^i, $\delta(J g^{1/2})$, выразив их через вариации δx^i.

Приравнивая нулю множители при независимых вариациях, приходим к уравнениям движения магнитной гидродинамики:

$$\rho_0 \left(\frac{dv_i}{dt} - \frac{v^k v^l}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) = \tag{1.11}$$

$$= -g^{1/2} \frac{\partial}{\partial q^l} (p^* J_i{}^l) + \frac{\partial}{\partial q^l} \frac{H_i \Phi^l}{4\pi} - \frac{H^k H^l}{8\pi} \frac{\partial q_{kl}}{\partial x^i} J \sigma^{1/2}$$

где $p^* = p + H_i H^i / 8\pi$.

Уравнения (1.2), (1.6) или (1.7), (1.10) и (1.2) совместно с кинематическими соотношениями $dx^i/dt = v^i$ и уравнением состояния $p = p(\rho, \varepsilon)$ полностью определяют поведение бездиссипативной МГД-среды при соответствующих начальных и граничных условиях.

Для распределения начального магнитного поля необходимо потребовать соблюдения условия соленоидальности

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{1/2} H^i) = 0, \tag{1.12}$$

которое может быть выражено в терминах потоков Φ^i следующим образом: $\partial \Phi^i / \partial q^i = 0$.

§ 2. Дискретная модель

1. Будем предполагать, что Ω_q представляет собой единичный куб в пространстве лагранжевых переменных q^i. Введем на Ω_q прямоугольную разностную сетку с шагами $\Delta q^i = h_i$. Индексацию сеточных величин будем производить греческими буквами. Каждому узлу поставим в соответствие тройку натуральных чисел $(\alpha, \beta, \gamma) \in \omega_h = \{(\alpha, \beta, \gamma): \alpha = 0, 1, \ldots, N; \beta = 0, 1, \ldots, M; \gamma = 0, 1, \ldots, P\}$. Множество всех узлов, определяющих ячейку сетки (элементарный параллелепипед), обозначим через $Ш_1$, считая, что индекс ячейки равен индексу узла $(\alpha, \beta, \gamma) \in Ш_1$, на котором достигается $\min(\alpha+\beta+\gamma)$. Множество всех ячеек, содержащих данный узел (α, β, γ) в качестве вершины, назовем $Ш_2(\alpha, \beta, \gamma)$. Введем множество ячеек $\bar{\omega}_h$ и всех внутренних узлов $\check{\omega}_h$, а также пространства сеточных функций R_h и $\bar{R}_h$, определенных на ω_h и $\bar{\omega}_h$ соответственно.

Величины x^i, v^i, v_i и g_{ik} отнесем к узлам разностной сетки, обозначив их, соответственно, $\{(x^i)_{\alpha\beta\gamma}\}$ и т. д. Тогда связь между ко- и контравариантными компонентами $\mathbf{v}$ будет записываться обычным образом для каждого узла:

$$v_i = g_{ik} v^k \quad \text{для} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \omega_h \tag{2.1}$$

(для упрощения записи в формуле опущен индекс $\alpha\beta\gamma$).

Термодинамические величины, а также $H_i H^i$, J и J_h^m будем относить к центрам лагранжевых ячеек и помечать индексом ячейки. Так как $\{(g_{ik})_{\alpha\beta\gamma}\} \in R_h$, то зависимость между $(H_i)_{\alpha\beta\gamma}$ и $(H^i)_{\alpha\beta\gamma}$ установим соотношением

$$(H_i)_{\alpha\beta\gamma} = \langle g_{ik} \rangle_{\alpha\beta\gamma} (H^k)_{\alpha\beta\gamma}, \tag{2.2}$$

где $\{\langle g_{ik} \rangle_{\alpha\beta\gamma}\} \in \bar{R}_h$ — некая аппроксимация g_{ik} в центре ячейки, например вида

$$\langle g_{ik} \rangle_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{8} \sum_{\nu \in Ш_1(\alpha\beta\gamma)} (g_{ik})_\nu. \tag{2.3}$$

2. Определим разностные аналоги для частных производных $\partial f / \partial q^i$. Для лагранжевой ячейки (α, β, γ) введем выражения

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{1}} f &= \frac{1}{4h_1} \sum_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0, 1} (-1)^{\alpha_1+1} f_{\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1, \gamma+\gamma_1}, \\
\partial_{\bar{2}} f &= \frac{1}{4h_2} \sum_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0, 1} (-1)^{\beta_1+1} f_{\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1, \gamma+\gamma_1}, \\
\partial_{\bar{3}} f &= \frac{1}{4h_3} \sum_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0, 1} (-1)^{\gamma_1+1} f_{\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1, \gamma+\gamma_1},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\{f_{\alpha\beta\gamma}\} \in R_h$. Выражение (2.4) аппроксимирует $\partial f / \partial q^i$ в центре ячейки. Для достаточно гладких f

$$\partial_{\bar{i}} f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \Big|_{\overline{\alpha\beta\gamma}} + O(h^2). \tag{2.4'}$$

Черта над индексом означает, что аппроксимация проводится в центре ячейки, $h^2=h_1^2+h_2^2+h_3^2$.

Заметим, что для $\partial_{\bar{i}}f$ справедлива формула

$$\partial_{\bar{i}}f=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)} f_\nu \frac{\partial}{\partial (x^k)_\nu}(\partial_{\bar{i}}x^k).$$

Разностный аналог производной $\partial f/\partial q^i$, определенный в узле разностной сетки, введем следующим образом:

$$(\partial_i f)_{\alpha\beta\gamma}=-\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)} f_\nu \frac{\partial}{\partial (x^k)_{\alpha\beta\gamma}}(\partial_{\bar{i}}x^k)_\nu.$$

Нетрудно видеть, что $\partial_i f$, $f\in\overline{R}_h$, является аппроксимацией $\partial f/\partial q^i$ в узле со вторым порядком.

3. Используя $\partial_{\bar{i}}$, произведем дискретизацию величин J_j^i и J. Поставим в соответствие J_j^i и J разностные выражения S_j^i и S, полученные формальной заменой производной $\partial/\partial q^i$ на $\partial_{\bar{i}}$:

$$S_j^i=\frac{1}{2}e^{imn}e_{jkl}\partial_{\bar{m}}x^k\partial_{\bar{n}}x^l, \tag{2.5}$$

$$S=\frac{1}{6}e^{imn}e_{jkl}\partial_{\bar{m}}x^k\partial_{\bar{n}}x^l\partial_{\bar{i}}x^j. \tag{2.6}$$

При этом

$$S_j^i=J_j^i|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2),\qquad S=J|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2)$$

и выполнен разностный аналог тождества (1.5), имеющего место в дифференциальном случае:

$$S_j^i\partial_{\bar{i}}x^m=\delta_j^m S; \tag{2.7}$$

кроме того, отметим равенство

$$\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma}}{\partial (x^m)_\nu}=0.$$

Используя (2.7), (2.4) и (2.4′), можно показать, что если $f\in R_h$, а $\varphi\in\overline{R}_h$, то

$$\begin{gathered}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)} f_\nu\frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma}}{\partial (x^k)_\nu}=S_k^i\partial_{\bar{i}}f=J\frac{\partial f}{\partial x^k}\bigg|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+o(h^2),\\ \sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}\varphi_\nu\frac{\partial S_\nu}{\partial (x^k)_{\alpha\beta\gamma}}=[\partial_i(\varphi S_k^i)]_{\alpha\beta\gamma}=-J\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\bigg|_{\alpha\beta\gamma}+O(h^2).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Следовательно, выражения

$$\sum_{Ш_1} f_\nu\frac{\partial S}{\partial (x^k)_\nu}\quad\text{и}\quad -\sum_{Ш_2}\varphi_\nu\frac{\partial S_\nu}{\partial x^k}$$

можно рассматривать как разностные аналоги операторов $J\partial/\partial x^k$, отнесенных, соответственно, к ячейке и к узлу разностной сетки.

4. Остановимся на вопросе аппроксимации выражения $g^{1/2}$ в ячейке. Поскольку g_{ik} относится к узлам, то значение $g^{1/2}$ в центре ячейки может быть определено, например, следующим образом:

$$(2.9)\qquad \langle\langle g^{1/2}\rangle\rangle=\frac{1}{8}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)} g_\nu^{1/2},$$

где $g_\nu=\det(g_{ik})_\nu$, при этом $\langle\langle g^{1/2}\rangle\rangle=g^{1/2}|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2)$.

С другой стороны, если известно разностное выражение для $V=Jg^{1/2}$ (см., например, [7–9]), то можно определить среднее значение для $g^{1/2}$, как

$$(2.10)\qquad \langle g^{1/2}\rangle_{\alpha\beta\gamma}=V_{\alpha\beta\gamma}/S_{\alpha\beta\gamma}.$$

Очевидно, что $\langle g_{1/2}\rangle=g^{1/2}|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2)$ при условии, что $V_{\alpha\beta\gamma}$ аппроксимирует $(g^{1/2}J)|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}$ со вторым порядком.

§ 3. Дифференциально-разностные уравнения МГД

1. Множество лагранжевых ячеек $\bar\omega_h$ может быть рассмотрено как некая дискретная модель сплошной среды. Состояние каждой ячейки определяется величинами $p_{\alpha\beta\gamma}$, $\rho_{\alpha\beta\gamma}$, $V_{\alpha\beta\gamma}$, $H_{\alpha\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $(v^i)_\nu$, $\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)$. Вариационный подход позволяет построить класс дифференциально-разностных уравнений, задающих согласованное изменение всех МГД-величин.

Для дискретной системы $\bar\omega_h$ лагранжиан определяется, как разность кинетической и потенциальной энергии:

$$L^h=\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar\omega_h}\rho_{\alpha\beta\gamma}V_{\alpha\beta\gamma}(K_{\alpha\beta\gamma}-\Pi_{\alpha\beta\gamma});$$

здесь $K_{\alpha\beta\gamma}$, $\Pi_{\alpha\beta\gamma}$ обозначают, соответственно, удельную кинетическую и потенциальную энергии ячейки:

$$K_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{8}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\left(\frac{v^kv_k}{2}\right)_\nu,$$

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}+\frac{(H^kH_k)_{\alpha\beta\gamma}}{8\pi\rho_{\alpha\beta\gamma}}.$$

Очевидно, что $L^h=L+O(h^2)$. Заметим, что аппроксимация кинетической ячейки может производиться и другими способами.

Для разностного лагранжиана вводится функционал действия

$$F_h=\int_{t_1}^{t_2}L^h(t)\,dt.$$

Чтобы получить дополнительные условия, накладываемые на изменение входящих в L^h функций, рассмотрим разностные аналоги условий неразрывности и вмороженности магнитного поля.

2. Используя выражение для V, введенное в § 2, можно написать

$$(3.1)\qquad V_{\alpha\beta\gamma}\rho_{\alpha\beta\gamma}\equiv m_{\alpha\beta\gamma}=g^{1/2}J\rho|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2),$$

при этом m имеет смысл не изменяющейся во времени массы лагранжевой ячейки (предполагается, что обмен массой между ячейками не происходит). Из (3.1) следует дифференциально-разностное уравнение неразрывности

$$V\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{dV}{dt}=0. \tag{3.2}$$

Производную от V по времени можно аппроксимировать двояко.

Если выражение для объема рассматривать как функцию от координат, $V_{\alpha\beta\gamma}=V_{\alpha\beta\gamma}\{x_\nu^i\colon \nu\in Ш_1(\alpha,\beta,\gamma)\}$, то следует положить

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial V}{\partial(x^k)_\nu}\frac{\partial x_\nu^k}{dt}=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial V}{\partial(x^k)_\nu}v_\nu^k. \tag{3.3}$$

Поскольку V — известная алгебраическая функция, $\partial V/\partial(x^k)_\nu$ вычисляется явно.

С другой стороны, равенство $dg^{1/2}J/dt=J_k^i\partial g^{1/2}v^k/\partial x^i$ можно с помощью (2.8) аппроксимировать выражением

$$\frac{dV}{dt}=S_k^i\partial_{\bar i}(v^kg^{1/2})=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial S}{\partial(x^k)_\nu}(v^kg^{1/2})_\nu. \tag{3.4}$$

Убедимся, что уравнение (3.2) аппроксимирует дифференциальное уравнение неразрывности (1.2) в центре ячейки, если для dV/dt использовать (3.4) или (3.3). В первом случае это очевидно, так как из (2.5) имеем

$$\frac{dV}{dt}=S_k^i\partial_{\bar i}(v^kg^{1/2})=J_k^i\frac{\partial v^kg^{1/2}}{\partial x^i}\Big|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2).$$

Для (3.3), используя (2.8)—(2.10), можно написать

$$\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial V}{\partial(x^k)_\nu}v_\nu^k=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\Bigg[\langle g^{1/2}\rangle\frac{\partial S}{\partial(x^k)_\nu}v_\nu^k+$$
$$+\frac{S\partial\langle g^{1/2}\rangle}{\partial(x^k)_\nu}v_\nu^k\Bigg]=Jg^{1/2}\frac{\partial v^k}{\partial x^k}\Big|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+\frac{S}{8}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}v_\nu^k\frac{\partial(g^{1/2})_\nu}{\partial(x^k)_\nu}+$$
$$+O(h)^2=J\left(g^{1/2}\frac{\partial v^k}{\partial x^k}+v^k\frac{\partial g^{1/2}}{\partial x^k}\right)\Big|_{\overline{\alpha\beta\gamma}}+O(h^2).$$

3. Дискретизируем уравнение вмороженности для магнитного поля. Разностное выражение

$$\langle g^{1/2}\rangle H^kS_k^i=\Phi^i, \tag{3.5}$$

в силу (2.6), (2.10), аппроксимирует условие вмороженности (1.4) в центре ячейки с точностью $O(h^2)$. Можно показать, что Φ^k представляет собой «разностные» потоки через плоскости, проходящие в центре ячейки перпендикулярно q^k. Проводя свертку $\Phi^i\partial_{\bar i}x^k$ с учетом (2.6), уравнение (3.5) преобразуем к разностному аналогу уравнения (1.6):

$$VH^k=\Phi^i\partial_{\bar i}x^k. \tag{3.5'}$$

Дифференцирование (3.5′) по времени приводит к разностному уравнению индукции, соответствующему (1.8):

$$V\frac{dH^k}{dt}=-H^k\frac{dV}{dt}+\Phi^i\partial_i v^k, \tag{3.6}$$

при этом под dV/dt понимается одно из выражений (3.3) или (3.4).

Из (3.6) и из уравнения индукции, записанного для ковариантных компонент H_k, путем стандартных преобразований получаем уравнение для энергии магнитного поля ячейки в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{H^kH_k}{8\pi}V\right)=-\frac{H^kH_k}{8\pi}\frac{d}{dt}V_k+\frac{H_k\Phi^i\partial_i v^k}{4\pi}+ \tag{3.7}$$
$$+\frac{VH^nH^m}{8\pi}\frac{d\langle g_{mn}\rangle}{dt}.$$

Как легко видеть, (3.7) аппроксимирует (1.9) с точностью $O(h^2)$. Для $d\langle g_{mn}\rangle/dt$, так же как и для производной dV/dt, допускаются различные приближения. В общем случае очевидно, что

$$\frac{d\langle g_{ik}\rangle}{dt}=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\langle g_{ik}\rangle}{\partial x_\nu{}^l}v_\nu{}^l. \tag{3.8}$$

Если $\langle g_{ik}\rangle$ вычислять по формуле (2.3), то (3.8) переходит в

$$\frac{d\langle g_{ik}\rangle}{dt}=\frac{1}{8}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)_\nu v_\nu{}^l. \tag{3.9}$$

В заключение рассмотрим вопрос о выполнении условия соленоидальности магнитного поля.

С помощью формулы разностного дифференцирования (2.8) и соотношения (3.5) аппроксимируем выражение (1.12) равенством

$$\partial_i(\langle g^{1/2}\rangle H^kS_k{}^i)=\partial_i\Phi^i=0. \tag{3.10}$$

Но, в силу (2.8), левая часть (3.10) есть не что иное, как аппроксимация div $\mathbb{H}$. Следовательно, условие

$$\partial_i\Phi^i=0 \tag{3.11}$$

можно считать условием соленоидальности магнитного поля. Таким образом, как и в дифференциальном случае, если в момент $t=t_0$ выполнено (3.11), то магнитное поле остается соленоидальным и в последующие моменты времени.

4. Найдем условия равенства нулю первой вариации функционала действия F_h:

$$\delta F_h=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar\omega_h}\left\{m_{\alpha\beta\gamma}\left[\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}(v_k)_\nu\delta v_\nu{}^k+\left(\frac{v^iv^k}{2}\delta g_{ik}\right)_\nu-\delta\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\right]-\right. \tag{3.12}$$
$$-\delta V_{\alpha\beta\gamma}\frac{(H^kH_k)_{\alpha\beta\gamma}}{8\pi}-V_{\alpha\beta\gamma}\frac{(H_k\delta H^k)_{\alpha\beta\gamma}}{4\pi}-$$
$$\left.-\frac{(VH^kH^l)_{\alpha\beta\gamma}}{8\pi}\delta\langle g_{kl}\rangle_{\alpha\beta\gamma}\right\}h_1h_2h_3\,dt.$$

Примем за независимые вариации $\delta(x^i)_{\alpha\beta\gamma}$ и определим их связь с вариациями остальных величин, входящих в (3.12). Она устанавливается соотношениями

$$\delta v^i=\delta\frac{dx^i}{dt}=\frac{d}{dt}\delta x^i,\qquad \delta g_{ik}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\delta x^n,$$

(3.13)

$$V\delta H^k=-H^k\delta V+\Phi^i\partial_i\delta x^k,\qquad \delta\varepsilon=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho^{-1}}\right)\left(\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial V}\right)\delta V=-\frac{p}{m}\delta V.$$

Для δV и $\delta\langle g_{ik}\rangle$ используем два типа соотношений, соответствующих (3.3), (3.8) или (3.4), (3.9):

$$\delta V=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\overline{V}}{\partial(x^k)_\nu}\delta x_\nu^k,$$

(3.14)

$$\delta\langle g_{ik}\rangle=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\langle g_{kl}\rangle}{\partial(x^n)_\nu}\delta x_\nu^n$$

и

$$\delta V=S_k^i\partial_i(\delta x^k g^{1/2})=\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial S}{\partial(x^n)_\nu}(g^{1/2}\delta x^n)_\nu,$$

(3.15)

$$\delta\langle g_{kl}\rangle=\frac{1}{8}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\delta(g_{kl})_\nu=\frac{1}{8}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n}\right)_\nu\delta x_\nu^n.$$

Как нетрудно заметить, наличие разных аппроксимаций δV и $\delta\langle g_{kl}\rangle$ приводит к различным динамическим уравнениям, для получения которых требуется подставить (3.13) и (3.14) или (3.15) в (3.12) и провести соответствующие преобразования. Выпишем эти уравнения в окончательной форме:

$$M\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}-\frac{v^kv^l}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}P_\nu\cdot\frac{\partial V_\nu}{\partial x^i}-$$
$$-\partial_n\frac{H_i\Phi^n}{4\pi}+\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\langle g_{lk}\rangle_\nu}{\partial x^i}\frac{(VH^lH^k)_\nu}{8\pi}\tag{3.16}$$

(соответствует случаю с (3.14)),

$$M\left(\frac{dv_i}{dt}-\frac{v^kv^l}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=g^{1/2}\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}p_\nu\cdot\frac{\partial S_\nu}{\partial x^i}-$$
$$-\partial_n\frac{H_i\Phi^n}{4\pi}+\frac{1}{8}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{(VH^kH^l)_\nu}{8\pi}\tag{3.17}$$

(соответствует случаю с (3.15)). Здесь

$$M=\hat{m}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{8}\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}m_\nu.$$

Так как $M=\rho Jg^{1/2}|_{\alpha\beta\gamma}+O(h^2)$, то второй порядок аппроксимации для уравнений (3.17) легко устанавливается на основе формул § 2. В уравнении

(3.16) необходимо оценить порядок аппроксимации выражения

$$\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)} p_\nu^* \frac{\partial V_\nu}{\partial x^i} = \sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)} \left(p_\nu^* \langle g^{1/2}\rangle_\nu \frac{\partial S_\nu}{\partial x^i} + p_\nu^* S_\nu \frac{\partial \langle g^{1/2}\rangle_\nu}{\partial x^i} \right).$$

Используя (2.8) и то, что

$$\langle g^{1/2}\rangle_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{8} \sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)} (g^{1/2})_\nu + O(h^2),$$

получаем

$$\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)} p_\nu^* \frac{\partial V_\nu}{\partial x^i} = \frac{\partial g^{1/2}}{\partial x_i} \sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)} p_\nu^* S_\nu - \frac{J\,\partial p^* g^{1/2}}{\partial x^i}\Big|_{\alpha\beta\gamma} + O(h^2) =$$

$$= \left(p^* \frac{J\,\partial g^{1/2}}{\partial x^i} - \frac{J\,\partial p^* g^{1/2}}{\partial x^i} \right)\Big|_{\alpha\beta\gamma} + O(h^2) = -\frac{g^{1/2}\,\partial p^* J_i^n}{\partial q^n}\Big|_{\alpha\beta\gamma} + O(h^2).$$

Таким образом, аппроксимация динамических уравнений (3.16), (3.17) показана.

3. Уравнение для удельной внутренней энергии может быть получено аналогично тому, как это делается в [1]:

$$m\frac{d\varepsilon}{dt} = -p\frac{dV}{dt} = \frac{m}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.18) имеет энтропийную форму, причем для dV/dt можно использовать любое из выражений (3.3), (3.4).

Для расчета течений с ударными волнами, сопровождающихся повышением энтропии, необходимо введение искусственных диссипативных процессов. Это может быть осуществлено по рекомендациям, предложенным в [10, 11].

Следует отметить, что в случае двух пространственных переменных для декартовых, цилиндрических и сферических координат полученные схемы совпадают с приведенными в [1, 2, 7, 8].

Техника дискретизации по времени ничем не отличается от той, которая развита в [1, 2, 12].

§ 4. Некоторые свойства дифференциально-разностных уравнений МГД

В этом параграфе изучены свойства разностной системы МГД-уравнения для случаев, когда используется динамическое уравнение (3.16), а выражение для $d\mathbf{V}/dt$ задается из (3.3). Все полученные результаты без труда распространяются на случай с уравнениями (3.17) и (3.4).

1. Выпишем полную систему дифференциально-разностных уравнений МГД:

$$M\left(\frac{dv_i}{dt} - \frac{v^k v^l}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right) = \sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)} \left[p^* \frac{\partial V_\nu}{\partial x^i} - \frac{\partial \langle g_{kl}\rangle_\nu}{\partial x^i}\frac{(VH^kH^l)_\nu}{8\pi} \right] - \tag{4.1}$$

$$- \partial_k \frac{H_i \Phi^k}{4\pi},$$

$$\rho V\frac{d\varepsilon}{dt} = -p\frac{dV}{dt} = -p \sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)} \frac{\partial V}{\partial (x^k)_\nu}(v^k)_\nu, \tag{4.2}$$

$$VH^k=\Phi^i\partial_{\bar i}x^k, \tag{4.3}$$

$$V\frac{dH^k}{dt}=-H^k\frac{dV}{dt}+\Phi^n\partial_{\bar n}v^k, \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{H^kH_k}{8\pi}V=-\frac{H_kH^k}{8\pi}\frac{dV}{dt}+\frac{H_k\Phi^n\partial_{\bar n}v^k}{4\pi}-\frac{VH^kH^l}{8\pi}\frac{d\langle g_{kl}\rangle}{dt},\quad m=V\rho, \tag{4.5}$$

$$dx^i/dt=v^i,\qquad p=p(\varepsilon,\ \rho). \tag{4.6}$$

Отметим, что система (4.1)—(4.6) использует смешанные компоненты векторов скорости и напряженности магнитного поля, что упрощает их запись. Однако нетрудно привести эти уравнения к форме, в которой использовались бы только ко- или только контравариантные компоненты; для этого достаточно прибегнуть к формулам преобразования (2.1) и (2.2).

2. Обратимся к вопросу о законах сохранения для системы (4.1)—(4.6). Как следует из дифференциального динамического уравнения (1.11), закон изменения импульса выделенного объема жидкости $\Omega\subset\Omega'$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_q'}\rho_0v_i\,d\Omega_q=\int\limits_{\Omega_q'}\rho_0\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\left(\frac{v^kv^l}{2}-\frac{H^kH^l}{8\pi}\right)d\Omega_q+ \tag{4.7}$$
$$+\int\limits_{\Omega_q'}p^*\frac{\partial g^{1/2}}{\partial x^i}J\,d\Omega_q-\oint\left[p^*\delta_i{}^k+\frac{1}{4\pi}(H_iH^k-H_lH^l)\right]dS_k.$$

Пусть Ω_q в разностном случае соответствует множество $\omega_h'=\{\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2,\ \beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2,\ \gamma_1\leqslant\gamma\leqslant\gamma_2\}\subset\bar\omega_h$. Динамические уравнения (4.1) определяют изменение импульса этого множества. Просуммируем (4.1) по всем $(\alpha\beta\gamma)\subset\omega_h'$ и используем соотношения

$$\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial V_{\alpha\beta\gamma}}{\partial(x^i)_\nu}=S_{\alpha\beta\gamma}\sum_{\nu\in Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\langle g^{1/2}\rangle_{\alpha\beta\gamma}}{\partial(x^i)_\nu}.$$

В результате получим разностный аналог (4.7)

$$\frac{d}{dt}\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\omega_h'}M_{\alpha\beta\gamma}(v_i)_{\alpha\beta\gamma}=\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\omega_h'}\left[M_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{v^kv^l}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)_{\alpha\beta\gamma}-\right.$$
$$\left.-\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\langle g_{kl}\rangle_\nu}{\partial(x^i)_{\alpha\beta\gamma}}\frac{(VH^lH^k)_\nu}{8\pi}\right]+\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar\omega_h'}(\mathrm{Sp}^*)_{\alpha\beta\gamma}\sum_{\nu\in Ш_2(\alpha\beta\gamma)}\frac{\partial\langle g^{1/2}\rangle_{\alpha\beta\gamma}}{\partial(x^i)_\nu}+F_{BH},$$

где F_{BH} представляет собой разностный аналог поверхностного интеграла в (4.7). Таким образом, разностные уравнения (4.1) консервативны по импульсам.

Используя уравнения (4.2) и (4.4), аналогично можно получить выражения для изменения удельной внутренней и магнитной энергии дискретного множества ω_h':

$$\frac{d}{dt}\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar\omega_h'}m_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=-\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar\omega_h'}p_{\alpha\beta\gamma}\frac{dV_{\alpha\beta\gamma}}{dt}, \tag{4.8}$$

$$(4.9)\qquad \frac{d}{dt}\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar{\omega}_h'}\left(\frac{H^kH_k}{8\pi}V\right)_{\alpha\beta\gamma}=-\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar{\omega}_h}\left[\left(\frac{H^kH_k}{8\pi}\frac{dV}{dt}\right)_{\alpha\beta\gamma}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{H_k\Phi^i\partial_{\bar{i}}v^k}{4\pi}\right)_{\alpha\beta\gamma}-\frac{(VH^kH^l)_{\alpha\beta\gamma}}{8\pi}\frac{d\langle g_{kl}\rangle_{\alpha\beta\gamma}}{dt}\right].$$

Эти уравнения выражают баланс отдельных видов энергии.

3. Покажем, что для дифференциально-разностной системы (4.1)—(4.6) выполнен аналог закона сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_q}\rho_0\left(\frac{v_kv^k}{2}+\varepsilon+\frac{H^kH_k}{8\pi\rho}\right)d\Omega_q=$$

$$=\oint_{S'}\left[p^*\delta_{ik}+\frac{1}{4\pi}(H_iH^k-H_lH^l)\right]v^ig^{1/2}dS_k.$$

Предварительно получим выражение, определяющее изменение кинетической энергии ω_h'. Для этого запишем уравнение движения, используя контравариантную компоненту:

$$(4.10)\qquad M\left(\frac{dv^i}{dt}+\Gamma_{kl}{}^iv^kv^l\right)=$$

$$=g^{ik}\sum_{\nu\in\Ш_2(\alpha\beta\gamma)}\left(p_\nu^*\frac{\partial V_\nu}{\partial x^k}+\frac{\partial\langle g_{kl}\rangle_\nu}{\partial x^k}\frac{(H^kH^l)_\nu}{8\pi}-\frac{g^{ik}\partial_lH_k\Phi^l}{4\pi}\right).$$

где $\Gamma_{kl}{}^i$ — символ Кристоффеля II рода.

Произведя свертку (4.1) с $v^i/2$, а (4.10) — с $v_i/2$ и просуммировав по всем $(\alpha\beta\gamma)\in\omega_h'$, получим выражение для изменения кинетической энергии узлов:

$$(4.11)\qquad \frac{d}{dt}\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\omega_h'}\left(\frac{Mv^iv_i}{2}\right)_{\alpha\beta\gamma}=\sum_{\alpha\beta\gamma\in\omega_h'}\left\{\sum_{\nu\in\Ш_1(\alpha\beta\gamma)}\left[p^*_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial V_{\alpha\beta\gamma}}{\partial(x^k)_\nu}(v^k)_\nu+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(VH^kH^l)_{\alpha\beta\gamma}}{8\pi}\frac{\partial\langle g_{kl}\rangle_\nu}{\partial(x^k)_\nu}(v^k)_\nu\right]-\left(\frac{H_k\Phi^l\,\partial_{\bar{l}}v^k}{4\pi}\right)_{\alpha\beta\gamma}\right\}+A_{BH}.$$

Здесь A_{BH} представляет собой работу сил давления и магнитного поля со стороны граничных к ω_h' ячеек.

Складывая далее уравнения (4.8), (4.9) и (4.11), получаем искомое соотношение:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\omega_h'}\left(\frac{Mv^iv_i}{2}\right)_{\alpha\beta\gamma}+\sum_{(\alpha\beta\gamma)\in\bar{\omega}_h'}m_{\alpha\beta\gamma}\left(\varepsilon+\frac{H_kH^k}{8\pi\rho}\right)_{\alpha\beta\gamma}\right]=A_{BH}.$$

Вследствие результатов пп. 2 и 3, а также в силу взаимосогласованности уравнения для магнитного поля и энтропийной формы уравнения для удельной внутренней энергии (4.2), система дифференциально-разностных уравнений (4.1)—(4.6) обладает свойством полной консервативности [13].

§ 5. Примеры численных расчетов

Рассмотрим движение идеального бесконечно проводящего газа, когда все величины зависят от переменных t, $x^1=x$. Пусть в начальный момент $\rho=\rho_0\equiv\text{const}$, $p=p_0=\text{const}$, $v_x\equiv v^1=0$. Начальные значения компонент скоростей $v_y\equiv v^2$, $v_z\equiv v^3$ выберем следующим образом:

$$v_y=\begin{cases} 0, & x<0,\\ W_0\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ 0, & x>l,\end{cases}$$

$$v_z=\begin{cases} W_0, & x<0,\\ \dfrac{W_0}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ 0, & x>l.\end{cases}$$

Начальное магнитное поле зададим выражениями

$$H_x\equiv H^1=H_{x_0},$$

$$H_y\equiv H^2=\begin{cases} 0, & x<0,\\ H_0\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ 0, & x>l,\end{cases}$$

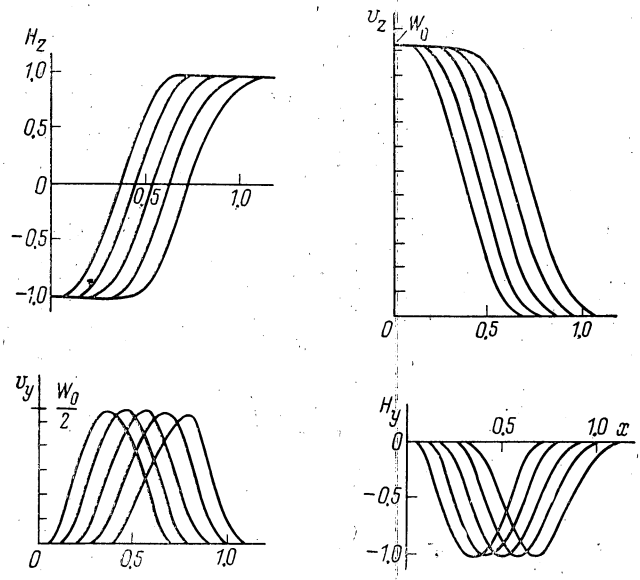
$$H_z\equiv H^3=\begin{cases} -H_0, & x<0,\\ -H_0\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ H_0, & x>l.\end{cases}$$

Пусть $W_0=2H_0(4\pi\rho_0)^{-1/2}$. Как нетрудно видеть, в системе отсчета, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}}=(a_A,\ 0,\ W_0/2)$, где $a_A=H_{x_0}(4\pi\rho_0)^{-1/2}$, выполнены соотношения $H_\tau^2=H_y^2+H_z^2=\text{const}$. $v_\tau^2=v_y^2+v_z^2=\text{const}$, $\mathbf{v}=-\mathbf{H}(4\pi\rho)^{-1/2}$.

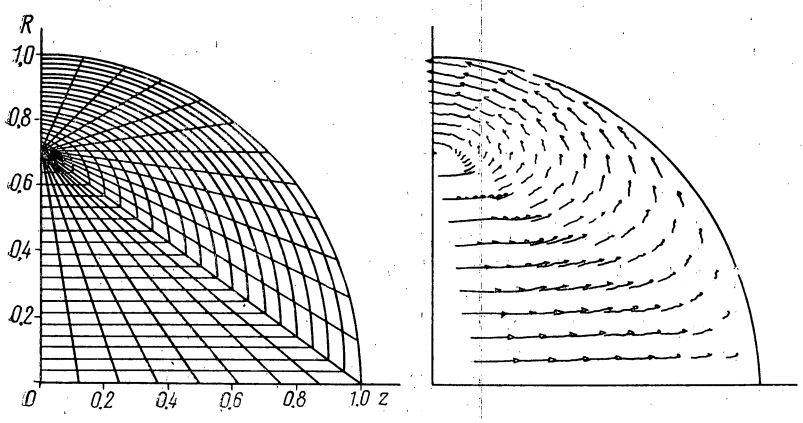
Заданные таким образом начальные условия определяют хорошо известное [14] стационарное движение газа, которое называется вращательной или альфвеновской простой волной. В такой волне поперечные составляющие векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ поворачиваются, не изменяя своих величин. Можно показать, что в рассматриваемом случае все фазы волны перемещаются с постоянной скоростью и профиль волны не деформируется. Заметим, что при $l=0$ простая альфвеновская волна переходит во вращательный разрыв.

Фиг. 1 иллюстрирует результаты численного расчета простой альфвеновской волны. Приведены зависимости величин H_z, H_y, v_y, v_z от эйлеровой координаты в различные моменты времени для следующих значений параметров: $H_0=1$, $\rho=1$, $p_0=0.01$, $H_{x_0}=2$, $l=1$. Показатель адиабаты $\gamma=2$.

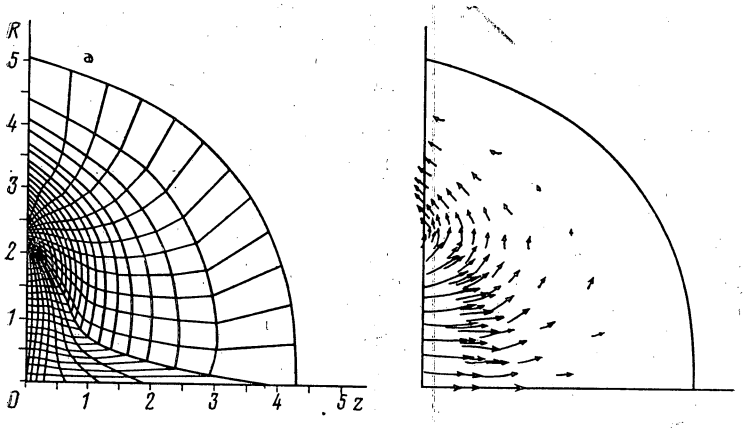
В качестве второго примера рассматривается осесимметричная задача о разлете сгустка идеального бесконечно проводящего газа в вакуум. В ка-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

честве координатной системы используются цилиндрические координаты $x^1=r$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$.

В начальный момент газ покоится и имеет форму шара. На фиг. 2 приведены конфигурация расчетной сетки и распределение напряженности магнитного поля при $t=0$. Значения $\mathbf{H}$ определялись по следующей формуле:

$$\mathbf{H}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \qquad A^1=A_r=0, \qquad A^2=A_\varphi=(H_0/2)-(1-r^2-z^2), \quad A^3=A_z=0,$$

где H_0 — константа, соответствующая максимальному значению напряженности магнитного поля. Величина начального давления находилась из условия $p+\mathbf{H}^2/8\pi=H_0^2/8\pi$. Начальная плотность выбиралась равной единице для всего сгустка, показатель адиабаты $\gamma=2$.

На фиг. 3 показаны конфигурация расчетной сетки и распределение напряженности магнитного поля на момент времени $t=2$.

В заключение авторы приносят благодарность М. Ю. Шашкову и В. А. Гасилову за ряд замечаний, а также Б. Я. Любимову, принимавшему участие в обсуждении дифференциальных уравнений и сделавшему ряд конструктивных предложений.

Поступила в редакцию 13.02.1980

Цитированная литература

1. *V. M. Goloviznin et al.* Numerical simulation of MHD problems on the basis of variational approach. 6th Internat. Conf. on Numer. Methods in Fluid Dynamics, Tbilisi, 1978. Lecture Notes in Phys., 90. Berlin etc., Springer, 1979, 248–252.
2. *В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский.* Вариационный подход к построению конечноразностных математических моделей в гидродинамике. Докл. АН СССР, 235, № 6, 1285—1288.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., «Наука», 1973.
4. *Г. Корн, Т. Корн.* Справочник по математике. М., «Наука», 1977.
5. *W. A. Newcomb.* Lagrangian and hamiltonian methods in magnetohydrodynamics. J. Plasma Phys. and Thermonucl. Fusion, 1962, suppl. 2, 451—463.
6. *Ф. Р. Гантмахер.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука». 1963.
7. *В. М. Головизнин, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский.* Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений гидродинамики в сферических координатах. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 16.
8. *В. Ф. Тишкин, Н. Н. Тюрина, А. П. Фаворский.* Разностные схемы для расчета гидродинамических течений в цилиндрических координатах. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 23.
9. *В. М. Головизнин и др.* О вариационно-разностных схемах двумерной магнитной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 57.
10. *В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский.* Вариационный принцип получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 65.
11. *В. М. Головизнин и др.* О некоторых свойствах вариационно-разностных уравнений МГД и искусственных диссипативных процессах типа «псевдовязкости». Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 25.
12. *В. М. Головизнин и др.* Двумерные вариационно-разностные схемы магнитной гидродинамики с тремя компонентами скоростей и магнитного поля. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 41.
13. *А. А. Самарский, Ю. П. Попов.* Разностные схемы газовой динамики. М., «Наука», 1975.
14. *А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов.* Магнитная гидродинамика. М., «Наука», 1963.