ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 21 Март 1981 Апрель № 2

УДК 517.958

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В СМЕШАННЫХ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГОЛОВИЗНИН В. М., САМАРСКИЙ А. А., ФАВОРСКИЙ А. П.

(Москва)

Сформулирован вариационный принцип для динамических уравнений адиабатической магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Подробно рассмотрена вариационная формулировка двумерных уравнений в случаях плоской и осевой симметрии.

Введение

Один из наиболее общих и фундаментальных подходов к исследованию проблем теоретической и математической физики основан на использовании вариационных принципов. Классическими примерами могут служить закон минимальности энергии для стационарных механических систем и закон наименьшего действия для динамических систем с конечным числом степеней свободы. Из соответствующего вариационного принципа могут быть получены уравнения электродинамики, известны вариационные формулировки для диссипативных процессов, существуют вариационные принципы, описывающие гидродинамическое движение сплошной среды [1].

Вариационные принципы давно и успешно используются для получения эффективных вычислительных алгоритмов расчета широкого круга прикладных задач. Так, в [2], [3] вариационный принцип, аналогичный принципу наименьшего действия Гамильтона, положен в основу построения дискретных моделей сплошной среды.

Вариационный подход к построению дискретных моделей основан на аппроксимации функционала действия и ряда условий, носящих характер связей [3], разностными по пространственным переменным выражениями. Последующее использование вариационного формализма приводит к дифференциально-разностным уравнениям (дифференциальным по времени и разностным по пространству), аппроксимирующим динамические уравнения в лагранжевых переменных. При достаточно общих требованиях к способу аппроксимации функционала действия получающиеся дифференциально-разностные уравнения обладают свойством консервативности. Кроме того, аппроксимации различных уравнений, образующих полную систему уравнений механики сплошной среды, оказываются в определенном смысле самосогласованными [2], [3]. Самосогласованные дискретные модели хорошо передают тонкие особенности моделируемых течений даже на грубых расчетных сетках.

Однако, поскольку получающиеся на основе вариационного подхода [1] вычислительные алгоритмы оказываются лагранжевыми, они имеют ограниченную сферу применения. Так, течения с сильными деформациями рассчитывать на их основе трудно.

Для расчета течений с сильными деформациями обычно используются эйлеровы [4], [5] или смешанные эйлерово-лагранжевы [6] переменные. Дискретные модели в этих переменных строятся, как правило, на основе интегроинтерполяционного подхода [7]. Однако при таком подходе, к сожалению, не всегда удается сохранить ряд важных свойств, которыми обладают вариационные модели в лагранжевых переменных, например свойство полной консервативности [8].

Попытки получить дискретные модели сплошной среды в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных (с.э.л.п.) на основе вариационного подхода не приводили к желаемым результатам главным образом из-за отсутствия удовлетворительной формы соответствующего вариационного принципа [1].

В настоящей работе такая форма вариационного принципа предложена.

§ 1. Вариационная формулировка уравнений двумерной МГД в с. э. л. п.

1. Пусть x, y — эйлеровы переменные, α, β — лагранжевы переменные, u и v — составляющие вектора скорости среды, t — время. Через ξ, μ будем обозначать эйлерово-лагранжевы, или «опорные», координаты. Так как переменные x, y и α, β связаны взаимно-однозначным соответствием $x=x(\alpha, \beta, t)$, $y=y(\alpha, \beta, t)$, которое в дальнейшем будем предполагать достаточно гладким, можно написать

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial y}{\partial t} dt.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Предположим далее, что (x, y) и (α, β) являются также взаимно-однозначными функциями от опорных переменных (ξ, μ), так что имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi,\mu} dt, \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi,\mu} dt, \\
d\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} d\mu + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_{\xi,\mu} dt, \\
d\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \beta}{\partial \mu} d\mu + \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_{\xi,\mu} dt.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Если (1.2) подставим в (1.1) и потребуем, чтобы $d\xi=d\mu=0$, получим

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial \alpha}\dot{\alpha}+\frac{\partial x}{\partial \beta}\dot{\beta}+u,$$

(1.3)

$$\dot{y}=\frac{\partial y}{\partial \alpha}\dot{\alpha}+\frac{\partial y}{\partial \beta}\dot{\beta}+v,$$

где $\dot{x}=(\partial x/\partial t)_{\xi,\mu}$, $\dot{y}=(\partial y/\partial t)_{\xi,\mu}$, $\dot{\alpha}=(\partial \alpha/\partial t)_{\xi,\mu}$, $\dot{\beta}=(\partial \beta/\partial t)_{\xi,\mu}$ — скорости перемещения опорной координатной системы (ξ,μ) относительно координат x, y, α, β соответственно.

Перепишем (1.3) в более симметричном относительно переменных (x, y) и (α, β) виде:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}(\dot{x}-u)=\frac{\partial(x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}\dot{\alpha}+\frac{\partial(\alpha,x)}{\partial(\xi,\mu)}\dot{\beta},$$

(1.3′)

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}(\dot{y}-v)=\frac{\partial(y,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}\dot{\alpha}+\frac{\partial(\alpha,y)}{\partial(\xi,\mu)}\dot{\beta}.$$

Разрешая (1.3′) относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, приходим к другой эквивалентной (1.3) форме записи кинематических связей между переменными (x, y), (α, β) и (ξ, μ):

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\dot{\alpha}=\frac{\partial(\alpha,y)}{\partial(\xi,\mu)}(\dot{x}-u)+\frac{\partial(x,\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}(\dot{y}-v),$$

(1.3″)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\dot{\beta}=\frac{\partial(\beta,y)}{\partial(\xi,\mu)}(\dot{x}-u)+\frac{\partial(x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}(\dot{y}-v).$$

В дальнейшем используются следующие обозначения: ρ — плотность, E — удельная внутренняя энергия, P — давление, S — удельная энтропия, $\eta=1/\rho$ — удельный объем, T — абсолютная температура среды, $\tilde{\rho}=\tilde{\rho}(\alpha)$ — плотность среды в лагранжевых переменных.

Производные по времени при фиксированных ξ и μ будем обозначать символом D/Dt.

2. Закон сохранения массы в лагранжевых переменных записывается в виде [1]

$$\rho x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}=\tilde{\rho}(\alpha,\beta). \tag{1.4}$$

Здесь l — целочисленный параметр, равный 1 или 2.

В первом случае уравнение (1.4) справедливо для плоскопараллельных течений, во втором — для осесимметричных, причем x при $l=2$ соответствует радиусу r, а y — оси z в цилиндрических координатах. При введении опорных переменных ξ, μ соотношение (1.4) принимает вид

$$\rho x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}=\tilde{\rho}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}. \tag{1.4′}$$

Считая ξ, μ не зависящими от времени, продифференцируем (1.4′) по времени:

$$\frac{D\rho}{Dt}\Delta+\rho\frac{D\Delta}{Dt}=\frac{D\tilde{\rho}}{Dt}\Delta+\tilde{\rho}\frac{D\tilde{\Delta}}{Dt}, \tag{1.4''}$$

где

$$\Delta=x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)},\qquad \tilde{\Delta}=\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}. \tag{1.5}$$

Преобразуем правую часть равенства (1.4″):

$$\begin{aligned}\frac{D\tilde{\rho}}{Dt}\tilde{\Delta}+\tilde{\rho}\frac{D\Delta}{Dt}&=\left[\frac{\partial(\tilde{\rho},\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\alpha}+\frac{\partial(\alpha,\tilde{\rho})}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\beta}\right]\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\\&+\tilde{\rho}\left[\frac{\partial(\dot{\alpha},\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\alpha,\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}\right]=\frac{\partial(\tilde{\rho}\dot{\alpha},\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\alpha,\tilde{\rho}\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}=\\&=\tilde{\Delta}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}\dot{\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde{\rho}\dot{\beta}}{\partial\beta}\right).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Учитывая (1.3″) и (1.4), записываем

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}\dot{\alpha}&=\rho x^{l-1}\left[\frac{\partial y}{\partial\beta}(\dot{x}-u)-\frac{\partial x}{\partial\beta}(\dot{y}-v)\right],\\\tilde{\rho}\dot{\beta}&=\rho x^{l-1}\left[\frac{\partial x}{\partial\alpha}(\dot{y}-v)-\frac{\partial y}{\partial\alpha}(\dot{x}-u)\right],\end{aligned} \tag{1.7}$$

откуда находим

$$\frac{\partial\tilde{\rho}\dot{\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde{\rho}\dot{\beta}}{\partial\beta}=\frac{\partial(\rho x^{l-1}(\dot{x}-u),y)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(x,\rho x^{l-1}(\dot{y}-v))}{\partial(\alpha,\beta)}. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.6) и (1.6) в (1.4″), приходим к уравнению неразрывности в с.э.л.п.:

$$\begin{aligned}x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left[\frac{\partial(x^{l-1}\dot{x},y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{1}{l}\frac{\partial(x^{l},\dot{y})}{\partial(\xi,\mu)}\right]&=\\=\frac{\partial(\rho x^{l-1}(\dot{x}-u),y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,\rho x^{l-1}(\dot{y}-v))}{\partial(\xi,\mu)}.\end{aligned} \tag{1.5'}$$

Умножая (1.5′) на $\Delta^{-1}\cdot x^{l-1}$, получаем окончательно

$$x^{l-1}\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{\partial x^{l-1}\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial x^{l-1}\dot{y}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\rho x^{l-1}(\dot{x}-u)+\frac{\partial}{\partial y}\rho x^{l-1}(\dot{y}-v). \tag{1.5''}$$

Запишем в с.э.л.п. закон изменения удельной внутренней энергии.

Поскольку диссипативные процессы считаются отсутствующими, можно написать $S=S(\alpha,\beta)$.

Дифференцируя внутреннюю энергию $E=E(\eta,S)$ по времени и учитывая термодинамические тождества $(\partial E/\partial\eta)_S=-P$, $(\partial E/\partial S)_\eta=T$, получаем

$$\frac{DE}{Dt}=\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\frac{\partial E}{\partial S}\frac{DS}{Dt}=\frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}+T\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\dot{\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}\dot{\beta}\right). \tag{1.9}$$

В (1.9) подставляем $D\rho/Dt$ из (1.5″) и $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ из (1.3″), находим

$$\frac{DE}{Dt}=-\frac{P}{\rho}\frac{1}{x^{l-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^{l-1}\dot{x})+\frac{\partial}{\partial y}(x^{l-1}\dot{y})\right]+$$
$$+\frac{P}{\rho^2}\frac{1}{x^{l-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho x^{l-1}(\dot{x}-u)+\frac{\partial}{\partial y}\rho x^{l-1}(\dot{y}-v)\right]+$$
$$+T\left[\frac{\partial S}{\partial x}(\dot{x}-u)+\frac{\partial S}{\partial y}(\dot{y}-v)\right].$$

3. Пусть магнитное поле представлено компонентами H_x и H_y. Условие вмороженности магнитного поля записывается в виде [3]

$$x^{l-1}\left[H_x\frac{\partial y}{\partial\beta}-H_y\frac{\partial x}{\partial\beta}\right]=H_\alpha,\qquad x^{l-1}\left[H_y\frac{\partial x}{\partial\alpha}-H_x\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right]=H_\beta, \tag{1.10}$$

где $H_\alpha=H_\alpha(\alpha,\beta)$ и $H_\beta=H_\beta(\alpha,\beta)$ — компоненты вектора магнитного поля в лагранжевых переменных.

Разрешая (1.10) относительно H_x и H_y и переходя к опорным переменным ξ, μ, получаем

$$\begin{aligned} x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}H_x&=H_\alpha\frac{\partial(x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,x)}{\partial(\xi,\mu)},\\ x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}H_y&=H_\alpha\frac{\partial(y,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,y)}{\partial(\xi,\mu)}. \end{aligned} \tag{1.10′}$$

Получим уравнение магнитной индукции в с.э.л.п. Для этого продифференцируем (1.10′) по времени, считая ξ, μ от времени не зависящими. Дифференцируя первое из уравнений (1.10′), находим

$$\Delta\frac{DH_x}{Dt}+H_x\frac{D\Delta}{Dt}=\left[H_\alpha\frac{\partial(\dot{x},\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,\dot{x})}{\partial(\xi,\mu)}\right]+ \tag{1.11}$$
$$+\left[H_\alpha\frac{\partial(x,\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\dot{\alpha},x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{DH_\alpha}{Dt}\frac{\partial(x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{DH_\beta}{Dt}\frac{\partial(\alpha,x)}{\partial(\xi,\mu)}\right].$$

Преобразуем с учетом (1.10) первое выражение в квадратных скобках из правой части (1.11):

$$H_\alpha\frac{\partial(\dot{x},\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,\dot{x})}{\partial(\xi,\mu)}=x^{l-1}\left[H_x\frac{\partial(\dot{x},y)}{\partial(\xi,\mu)}+H_y\frac{\partial(x,\dot{x})}{\partial(\xi,\mu)}\right]. \tag{1.12}$$

Подставляя выражения DH_α/Dt и DH_β/Dt во вторые квадратные скобки (1.11), получаем

$$H_\alpha\frac{\partial(x,\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\dot{\alpha},x)}{\partial(\xi,\mu)}+\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial\alpha}\dot{\alpha}+\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}\dot{\beta}\right)\frac{\partial(x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.13}$$
$$+\left(\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}\dot{\alpha}+\frac{\partial H_\beta}{\partial\beta}\dot{\beta}\right)\frac{\partial(\alpha,x)}{\partial(\xi,\mu)}=\frac{\partial(x,H_\alpha\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\dot{\alpha}H_\beta,x)}{\partial(\xi,\mu)}.$$

Подставляя (1.13), (1.12) в (1.11), находим

$$(1.14)\qquad \frac{DH_x}{Dt}\Delta+H_x\frac{D\Delta}{Dt}=x^{l-1}\left[H_x\frac{\partial(\dot{x},y)}{\partial(\xi,\mu)}+H_y\frac{\partial(x,\dot{x})}{\partial(\xi,\mu)}\right]+$$
$$+\left\{\frac{\partial(x,H_\alpha\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\dot{\alpha}H_\beta,y)}{\partial(\xi,\mu)}\right\}.$$

Второе уравнение (1.10′) аналогичным образом преобразуется к виду

$$(1.15)\qquad \frac{DH_y}{Dt}\Delta+H_y\frac{D\Delta}{Dt}=x^{l-1}\left[H_x\frac{\partial(\dot{y},y)}{\partial(\xi,\mu)}+H_y\frac{\partial(x,\dot{y})}{\partial(\xi,\mu)}\right]+$$
$$+\left\{\frac{\partial(y,H_\alpha\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\dot{\alpha}H_\beta,y)}{\partial(\xi,\mu)}\right\}.$$

Преобразуем в (1.14) члены, заключенные в фигурные скобки:

$$\frac{\partial(x,H_\alpha\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\dot{\alpha}H_\beta,x)}{\partial(\xi,\mu)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\frac{\partial}{\partial y}(H_\alpha\beta-\dot{\alpha}H_\beta).$$

Используя (1.10) и (1.3″), находим

$$H_\alpha\beta-\dot{\alpha}H_\beta=x^{l-1}[H_x(\dot{y}-v)-H_y(\dot{x}-u)].$$

После подстановки двух последних выражений в (1.14) получаем

$$x^{l-1}\frac{DH_x}{Dt}+H_x\left[\frac{\partial}{x}(x^{l-1}\dot{x})+\frac{\partial}{\partial y}(x^{l-1}\dot{y})\right]=$$
$$=x^{l-1}\left(H_x\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}+H_y\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}x^{l-1}[H_x(\dot{y}-v)-H_y(\dot{x}-u)].$$

Аналогично из (1.15) получается и второе уравнение индукции в с.э.л.п.:

$$x^{l-1}\frac{DH_y}{Dt}+H_y\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^{l-1}\dot{x})+\frac{\partial}{\partial y}(x^{l-1}\dot{y})\right]=$$
$$=x^{l-1}\left[H_x\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}-H_y\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial x}x^{l-1}[H_y(\dot{x}-u)-H_x(\dot{y}-v)].$$

4. Для двумерных динамических уравнений МГД в с.э.л.п. сформулируем

Вариационный принцип. Динамические уравнения МГД следуют из условия равенства нулю первой вариации функционала

$$(1.16)\qquad \Phi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_{\Omega(\xi,\mu)}\rho x^{l-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left(\frac{u^2+v^2}{2}-E-\frac{H_x^2+H_y^2}{8\pi\rho}\right)d\xi\,d\mu\right]dt,$$

причем предполагается, что опорные переменные ξ, μ не варьируются, а вариации всех других величин связаны между собой условиями сохранения массы (1.4′), сохранения магнитного потока (1.10′), кинематическими соотношениями (1.3′) и первым началом термодинамики:

$$(1.16')\qquad dE=-Pd\eta+TdS.$$

5. Проиллюстрируем технику получения динамических уравнений МГД из сформулированного выше вариационного принципа.

Выпишем первую вариацию функционала (1.16):

$$\delta\Phi=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iint_{\Omega}\left[\delta(\rho\Delta)\left(\frac{u^2+v^2}{2}-E\right)+\rho\Delta(u\delta u+v\delta v-\delta E)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\delta\Delta\frac{H_x^2+H_y^2}{8\pi}-\frac{\Delta}{4\pi}(H_x\delta H_x+H_y\delta H_y)\right]d\xi\,d\mu\right\}dt. \tag{1.17}$$

Из (1.4′) выразим первую вариацию плотности:

$$\delta\rho=-\rho\frac{\delta\Delta}{\Delta}+\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde{\rho}\delta\beta}{\partial\beta}\right), \tag{1.18}$$

откуда найдем

$$\delta(\rho\Delta)=\tilde{\Delta}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde{\rho}\delta\beta}{\partial\beta}\right).$$

Соотношения (1.3′) позволяют выразить вариации δu и δv через вариации δx, δy, $\delta\alpha$, $\delta\beta$:

$$\begin{aligned}
\delta u&=\delta\dot{x}-\frac{\partial\delta x}{\partial\alpha}\dot{\alpha}-\frac{\partial\delta x}{\partial\beta}\dot{\beta}+\left(\frac{\partial\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\delta\beta}{\partial\beta}\right)(\dot{x}-u)-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\dot{\alpha}-\\
&-\frac{\partial x}{\partial\beta}\delta\dot{\beta}-\frac{\partial(x,\delta\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\alpha}-\frac{\partial(\delta\alpha,x)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\beta},\\
\delta v&=\delta\dot{y}-\frac{\partial\delta y}{\partial\alpha}\dot{\alpha}-\frac{\partial\delta y}{\partial\beta}\dot{\beta}+\left(\frac{\partial\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\delta\beta}{\partial\beta}\right)(\dot{y}-v)-\frac{\partial y}{\partial\alpha}\delta\dot{\alpha}-\\
&-\frac{\partial y}{\partial\beta}\delta\dot{\beta}-\frac{\partial(y,\delta\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\alpha}-\frac{\partial(\delta\alpha,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\beta}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

а величину δE — определить с учетом (1.16′):

$$\delta E=\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\delta\rho+\frac{\partial E}{\partial S}\delta S=\frac{P}{\rho^2}\delta\rho+T\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial S}{\partial\beta}\delta\beta\right). \tag{1.20}$$

Варьируя (1.10′), находим δH_x и δH_y:

$$\begin{aligned}
\delta H_x&=-H_x\frac{\delta\Delta}{\Delta}+\frac{1}{\Delta}\left[H_\alpha\frac{\partial(\delta x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,\delta x)}{\partial(\xi,\mu)}\right]+\\
&+\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial(x,H_\alpha\delta\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\delta\alpha H_\beta,x)}{\partial(\xi,\mu)}\right],\\
\delta H_y&=-H_y\frac{\delta\Delta}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\left[H_\alpha\frac{\partial(\delta y,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,\delta y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]+\\
&+\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial(y,H_\alpha\delta\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(H_\beta\delta\alpha,y)}{\partial(\xi,\mu)}\right].
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Подставляя (1.18) — (1.21) в (1.17), получаем

$$\delta\Phi=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\{\iint\limits_{\Omega}\Big\{\Big\{\rho\Delta\Big[u\Big(\delta\dot{x}-\frac{\partial\delta x}{\partial\alpha}\dot{\alpha}-\frac{\partial\delta x}{\partial\beta}\dot{\beta}\Big)+$$

$$+v\Big(\delta\dot{y}-\frac{\partial\delta y}{\partial\alpha}\dot{\alpha}-\frac{\partial\delta y}{\partial\beta}\dot{\beta}\Big)\Big]+\Big(P+\frac{H_x^2+H_y^2}{8\pi}\Big)\delta\Delta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}H_x\Big[H_\alpha\frac{\partial(\delta x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H^\beta\frac{\partial(\alpha,\delta x)}{\partial(\xi,\mu)}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4\pi}H_y\Big[H_\alpha\frac{\partial(\delta y,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+H_\beta\frac{\partial(\alpha,\delta y)}{\partial(\xi,\mu)}\Big]\Big\}+$$

$$+\Big\{\Big(\frac{u^2+v^2}{2}-E-\frac{P}{\rho}\Big)\tilde{\Delta}\Big(\frac{\partial\tilde{\rho}\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde{\rho}\delta\beta}{\partial\beta}\Big)+\rho\Delta u\Big[\Big(\frac{\partial\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\rho\beta}{\partial\beta}\Big)\times$$

$$\times(\dot{x}-u)-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\dot{\alpha}-\frac{\partial x}{\partial\beta}\delta\dot{\beta}-\frac{\partial(x,\delta\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\alpha}-\frac{\partial(\delta\alpha,x)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\beta}\Big]+$$

$$+\rho\Delta v\Big[\Big(\frac{\partial\delta\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\delta\beta}{\partial\beta}\Big)(\dot{y}-v)-\frac{\partial y}{\partial\alpha}\delta\dot{\alpha}-\frac{\partial y}{\partial\beta}\delta\dot{\beta}-$$

$$-\frac{\partial(y,\delta\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\alpha}-\frac{\partial(\delta\alpha,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\dot{\beta}\Big]-\rho\Delta T\Big(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial S}{\partial\beta}\delta\beta\Big)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}H_x\Big[\frac{\partial(x,H_\alpha\delta\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\delta\alpha H_\beta,x)}{\partial(\xi,\mu)}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4\pi}H_y\Big[\frac{\partial(y,H_\alpha\delta\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\delta\alpha H_\beta,y)}{\partial(\xi,\mu)}\Big]\Big\}\Big\}\,d\xi\,d\mu\Big\}\,dt.$$

Проводя в последнем выражении интегрирование по частям и полагая $\delta x=\delta y=\delta\alpha=\delta\beta=0$ на границе области интегрирования $\Omega\times t$, получаем

$$\delta\Phi=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\{\iint\limits_{\Omega}\Big\{\Big[-\frac{D}{Dt}(\rho\Delta u)+\frac{\partial(\tilde{\rho}u\dot{\alpha},\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\alpha,\tilde{\rho}u\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}-$$

$$-x^{l-1}\frac{\partial(P,y)}{\partial(\xi,\mu)}-x^{l-1}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(H_x^2+H_y^2,y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_xH_\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\alpha,H_xH_\beta)}{\partial(\xi,\mu)}\Big]\delta x+\Big[-\frac{D}{Dt}(\rho\Delta v)+\frac{\partial(\tilde{\rho}v\dot{\alpha},\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\alpha,\tilde{\rho}v\dot{\beta})}{\partial(\xi,\mu)}-$$

$$-\frac{\partial(x,Px^{l-1})}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(x,x^{l-1}(H_x^2+H_y^2))}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_\alpha H_y,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\alpha,H_yH_\beta)}{\partial(\xi,\mu)}\Big]\delta y+\Big\{\frac{D}{Dt}\rho\Delta\Big(u\frac{\partial x}{\partial\alpha}+v\frac{\partial y}{\partial\alpha}\Big)-$$

$$-\tilde{\rho}\frac{\partial([u^2+v^2)/2-E-P/\rho],\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{\partial(\tilde{\rho}u(\dot{x}-u),\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-$$

$$-\frac{\partial(\tilde{\rho}v(\dot{y}-v),\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\tilde{\rho}u\dot{\beta},x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\tilde{\rho}v\dot{\beta},y)}{\partial(\xi,\mu)}-\rho\Delta T\frac{\partial S}{\partial\alpha}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}H_\beta\left[\frac{\partial(H_x,x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(H_y,y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]\Bigg\}\delta\alpha+\Bigg\{\frac{D}{Dt}\rho\Delta\left(u\frac{\partial x}{\partial\beta}+v\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)-$$

$$-\tilde\rho\frac{\partial(\alpha,[(u^2+v^2)/2-E-P/\rho])}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{\partial(\alpha,\tilde\rho u(\dot x-u))}{\partial(\xi,\mu)}-$$

$$-\frac{\partial(\alpha,\tilde\rho v(\dot y-v))}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,\tilde\rho u\dot\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(y,\tilde\rho v\dot\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}-\rho\Delta T\frac{\partial S}{\partial\beta}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}H_\alpha\left[\frac{\partial(x,H_x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(y,H_y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]\Bigg\}\delta\beta\Bigg\}d\xi\,d\mu\Bigg\}dt.$$

Требование равенства нулю первой вариации $\delta\Phi$ при условии независимости вариаций δx, δy, $\delta\alpha$, $\delta\beta$ приводит к уравнениям

$$\frac{D}{Dt}(\rho\Delta u)-\frac{\partial(\tilde\rho u\dot\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{\partial(\alpha,\tilde\rho u\dot\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+x^{l-1}\frac{\partial(P,y)}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.22}$$

$$+x^{l-1}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(H_x^2+H_y^2,y)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_xH_\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\alpha,H_xH_\beta)}{\partial(\xi,\mu)}=0,$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho\Delta v)-\frac{\partial(\tilde\rho v\dot\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{\partial(\alpha,\tilde\rho v\dot\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,Px^{l-1})}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.23}$$

$$+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(x,x^{l-1}(H_x^2+H_y^2))}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_\alpha H_y,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial(\alpha,H_yH_\beta)}{\partial(\xi,\mu)}=0,$$

$$\frac{D}{Dt}\rho\Delta\left(u\frac{\partial x}{\partial\alpha}+v\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial(\tilde\rho[u(\dot x-u)+v(\dot y-v)],\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.24}$$

$$+\frac{\partial(\tilde\rho u\dot\beta,x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\tilde\rho v\dot\beta,y)}{\partial(\xi,\mu)}-\tilde\rho\frac{\partial([(u^2+v^2)/2-E-P/\rho],\beta)}{\partial(\xi,\mu)}-$$

$$-\rho\Delta T\frac{\partial S}{\partial\alpha}+\frac{1}{4\pi}H_\beta\left[\frac{\partial(H_x,x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(H_y,y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]=0,$$

$$\frac{D}{Dt}\rho\Delta\left(u\frac{\partial x}{\partial\beta}+v\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial(\alpha,\tilde\rho[u(\dot x-u)+v(\dot y-v)])}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.25}$$

$$+\frac{\partial(x,\tilde\rho u\dot\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(y,\tilde\rho v\dot\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}-\tilde\rho\frac{\partial(\alpha,[(u^2+v^2)/2-E-P/\rho])}{\partial(\xi,\mu)}-$$

$$-\rho\Delta T\frac{\partial S}{\partial\beta}+\frac{1}{4\pi}H_\alpha\left[\frac{\partial(x,H_x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(y,H_y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]=0.$$

6. Покажем, что для описания динамики среды достаточно любых двух уравнений из (1.22) — (1.25). Приведем уравнения (1.22), (1.23) к более привычному виду. Рассмотрим второй и третий члены из (1.22). Подставляя в них $\dot\alpha$ и $\dot\beta$ из (1.3″), находим:

$$\tilde\rho u\dot\alpha=A\frac{\partial y}{\partial\beta}-B\frac{\partial x}{\partial\beta},\qquad \tilde\rho u\dot\beta=B\frac{\partial x}{\partial\alpha}-A\frac{\partial y}{\partial\alpha}, \tag{1.26}$$

где $A=x^{l-1}\rho u(\dot x-u)$, $B=x^{l-1}\rho u(\dot y-v)$. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial(\tilde\rho u\dot\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\alpha,\tilde\rho u\dot\beta)}{\partial(\xi,\mu)}=\Delta\left(\frac{\partial\tilde\rho u\dot\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde\rho u\dot\beta}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial(A,y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,B)}{\partial(\xi,\mu)}. \tag{1.27}$$

Преобразуем последние два члена уравнения (1.22). Учитывая (1.10), находим

$$H_xH_\alpha=x^{l-1}\left(A'\frac{\partial y}{\partial\beta}-B'\frac{\partial x}{\partial\beta}\right),\qquad H_xH_\beta=x^{l-1}\left(B'\frac{\partial x}{\partial\alpha}-A'\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right). \tag{1.28}$$

Здесь $A'=H_x^2$, $B'=H_xH_y$. Далее имеем

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(H_\alpha H_x,\beta)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(\alpha,H_xH_\beta)}{\partial(\xi,\mu)}\right]=\frac{1}{4\pi}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\alpha H_x)+\right. \tag{1.29}$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_xH_\beta)\right]=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(x^{l-1}A',y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,x^{l-1}B')}{\partial(\xi,\mu)}\right].$$

Подставляя (1.29) и (1.27) в (1.22), получаем

$$\frac{D}{Dt}(\rho\Delta u)-\frac{\partial(x^{l-1}\rho u(\dot x-u),y)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{\partial(x,x^{l-1}\rho u(\dot y-v))}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.22'}$$
$$+x^{l-1}\frac{\partial(P,y)}{\partial(\xi,\mu)}+x^{l-1}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(H_x^2+H_y^2,y)}{\partial(\xi,\mu)}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(x^{l-1}H_x^2,y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,x^{l-1}H_xH_y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]=0.$$

Проделывая аналогичные операции с (1.23), приводим его к виду

$$\frac{D}{Dt}(\rho\Delta v)-\frac{\partial(x^{l-1}\rho v(\dot x-u),y)}{\partial(\xi,\mu)}-\frac{\partial(x,x^{l-1}\rho v(\dot y-v))}{\partial(\xi,\mu)}+ \tag{1.23'}$$
$$+\frac{\partial(x,Px^{l-1})}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(x,(H_x^2+H_y^2)x^{l-1})}{\partial(\xi,\mu)}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(x^{l-1}H_xH_y,y)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(x,x^{l-1}H_y^2)}{\partial(\xi,\mu)}\right]=0.$$

Интегрируя (1.22′), (1.23′) по какой-либо области Ω' в плоскости переменных (ξ,μ), нетрудно убедиться, что эти уравнения представляют собой закон сохранения импульса.

Преобразуем уравнения (1.24), (1.25). Упростим первый член в (1.25):

$$\frac{D}{Dt}\rho\Delta\left(u\frac{\partial x}{\partial\beta}+v\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{D}{Dt}(\rho\Delta v)-\right. \tag{1.30}$$
$$\left.-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{D}{Dt}(\rho\Delta u)\right]+\rho\Delta\left[u\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)+v\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)\right].$$

Выпишем производные по времени от $\partial x/\partial\beta$ и $\partial y/\partial\beta$:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial(\dot\alpha,x)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial\dot x}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\dot\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\dot\beta}{\partial\beta}\right), \tag{1.31}$$
$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial(\dot\alpha,y)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial\dot y}{\partial\beta}-\frac{\partial y}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\dot\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\dot\beta}{\partial\beta}\right)$$

Учитывая (2.3″), нетрудно показать, что

$$(1.32)\qquad \frac{\partial\dot\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\beta}{\partial\beta}=\frac{\partial(\dot x-u)}{\partial x}+\frac{\partial(\dot y-v)}{\partial y}+(\dot x-u)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+$$
$$+(\dot y-v)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right).$$

Подставляя (1.32) в (1.31), а (1.31) — во второй член правой части (1.30), получаем

$$(1.33)\quad \rho\Delta\left[u\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)+v\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)\right]=\tilde\rho\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}v-\frac{\partial\alpha}{\partial y}u\right)\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)}+\right.$$
$$+\left[(\dot x-u)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}+(\dot y-v)\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\right]+$$
$$+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$
$$+(\dot x-u)\left[v\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-u\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\right]-$$
$$\left.-(\dot y-v)\left[u\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}-v\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\right]\right\}.$$

Второй член (1.25) преобразуем к виду

$$(1.34)\qquad -\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde\rho[u(\dot x-u)+v(\dot y-v)]-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde\rho\times\right.$$
$$\left.\times[u(\dot x-u)+v(\dot y-v)]\right\}.$$

Рассмотрим третий и четвертый члены из (1.25):

$$(1.35)\qquad \frac{\partial(x,\tilde\rho u\dot\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(y,\tilde\rho v\dot\alpha)}{\partial(\xi,\mu)}=$$
$$=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\tilde\rho u(\dot x-u)-\frac{\partial}{\partial x}\tilde\rho v(\dot x-u)\right]+\right.$$
$$+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\tilde\rho u(\dot y-v)-\frac{\partial}{\partial x}\tilde\rho v(\dot y-v)\right]+$$
$$+\tilde\rho\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}u(\dot x-u)+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}u(\dot y-v)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}v(\dot x-u)-\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}v(\dot y-v)\right]\right\}.$$

Учитывая (1.16′), можно показать, что

$$(1.36)\qquad -\tilde\rho\frac{\partial(\alpha,(u^2+v^2)/2-E-P/\rho)}{\partial(\xi,\mu)}-\rho\Delta T\frac{\partial S}{\partial\beta}=$$
$$=-\rho\Delta\left(u\frac{\partial u}{\partial\beta}+v\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)+\Delta\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\frac{\partial(\alpha,P)}{\partial(x,y)}.$$

Подставляя H_α из (1.10) в последний член (1.25), находим

$$(1.37)\qquad \frac{1}{4\pi}H_\alpha\left[\frac{\partial(x,H_x)}{\partial(\xi,\mu)}+\frac{\partial(y,H_y)}{\partial(\xi,\mu)}\right]=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\left(H_x\frac{\partial\alpha}{\partial x}+H_y\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\right).$$

Складывая (1.30) с учетом (1.33) с выражениями (1.34) — (1.37), после ряда несложных преобразований, получаем

$$(1.25')\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x}\left\{\frac{D}{Dt}(\rho\Delta v)-\frac{D(x,y)}{D(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial\rho x^{l-1}(\dot x-u)}{\partial x}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\rho x^{l-1}v(\dot y-v)}{\partial y}\right]+\Delta\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{8\pi}\Delta\frac{\partial(H_x^2+H_y^2)}{\partial y}-$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial x^{l-1}H_xH_y}{\partial x}+\frac{\partial x^{l-1}H_y^2}{\partial y}\right]\right\}-$$
$$-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left\{\frac{D}{Dt}(\rho\Delta u)-\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial\rho x^{l-1}u(\dot x-u)}{\partial x}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\rho x^{l-1}u(\dot y-v)\right]+\Delta\frac{\partial P}{\partial x}+\Delta\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(H_x^2+H_y^2)}{\partial x}-$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial x^{l-1}H_x^2}{\partial x}+\frac{\partial x^{l-1}H_xH_y}{\partial y}\right]\right\}=0.$$

Аналогичными выкладками уравнение (1.24) можно привести к виду

$$(1.24')\qquad \frac{\partial\beta}{\partial y}\left\{\frac{D}{Dt}(\rho\Delta u)-\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\rho x^{l-1}u(x-u)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\rho x^{l-1}u(\dot y-v)\right]+\Delta\frac{\partial P}{\partial x}+\Delta\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(H_x^2+H_y^2)}{\partial x}-$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial x^{l-1}H_x^2}{\partial x}+\frac{\partial x^{l-1}H_xH_y}{\partial y}\right]\right\}-$$
$$-\frac{D\beta}{\partial x}\left\{\frac{D}{Dt}(\rho\Delta v)-\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial\rho x^{l-1}v(\dot x-u)}{\partial x}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\rho x^{l-1}v(\dot y-v)}{\partial y}\right]+\Delta\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{8\pi}\Delta\frac{\partial(H_x^2+H_y^2)}{\partial y}-$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\mu)}\left[\frac{\partial x^{l-1}H_xH_y}{\partial x}+\frac{\partial x^{l-1}H_y^2}{\partial y}\right]\right\}=0.$$

Нетрудно видеть, что уравнения (1.24′), (1.25′) эквивалентны системе уравнений (1.22′), (1.23′) и что любых двух уравнений из системы (1.22′) — (1.25′) достаточно для описания движения среды.

Уравнения (1.22′), (1.23′), (1.5″), (1.9′), (1.14′), (1.15′) совместно с уравнением состояния $P=P(\rho,E)$ при заданных $\dot x=\dot x(\xi,\mu,t)$, $\dot y=\dot y(\xi,\mu,t)$ образуют полную систему уравнений двумерной МГД в с.э.л.п.

§ 2. Общая формулировка вариационного принципа в адиабатической МГД

1. Пусть x^i — эйлеровы переменные, α^i — лагранжевы переменные, ξ^i — опорные координаты, H^i — компоненты магнитного поля в декартовой системе координат. Здесь и далее все индексы пробегают значения от единицы до трех. Обозначим через q^i какие-либо криволинейные координаты с метрикой, определяемой тензором q_{ij}; H'^i — компоненты магнитного поля в координатах q^i.

Связь между скоростями перемещения опорной координатной системы ξ^i относительно координат q^i и α^i и вектором скорости среды u^i в координатах q^i определяется точно таким же образом, как и в двумерном случае:

$$(\dot{q}^i-u^i)=\frac{\partial q^i}{\partial \alpha^j}\dot{\alpha}^j. \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) можно также переписать в более симметричной относительно переменных $\dot{\alpha}^i$ и $\dot{q}^i$ форме:

$$\frac{\partial(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}(\dot{q}^i-u^i)=\frac{\partial(q^i,\alpha^2,\alpha^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}\dot{\alpha}^1+ \tag{2.1'}$$
$$+\frac{\partial(\alpha^1,q^i,\alpha^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}\dot{\alpha}^2+\frac{\partial(\alpha^1,\alpha^2,q^i)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}\dot{\alpha}^3.$$

Уравнение неразрывности в эйлерово-лагранжевых переменных имеет вид

$$\rho|g_{ij}|^{1/2}\frac{\partial(q^1,q^2,q^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}=\tilde{\rho}\frac{\partial(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}. \tag{2.2}$$

Получим условие вмороженности магнитного поля. Пусть w и v — внутренние координаты какой-либо жидкой поверхности. Поток магнитного поля через площадку $dwdv$ выражается формулой

$$dF=H^i e_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial w}\frac{\partial x^j}{\partial v}dw\,dv=$$
$$=\left[H^1\frac{\partial(x^2,x^3)}{\partial(w,v)}+H^2\frac{\partial(x^3,x^1)}{\partial(w,v)}+H^3\frac{\partial(x^1,x^3)}{\partial(w,v)}\right]dwdv.$$

Перейдем от координат x^i к координатам q^i:

$$\left[H^1\frac{\partial(x^2,x^3)}{\partial(w,v)}+H^2\frac{\partial(x^3,x^1)}{\partial(w,v)}+H^3\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(w,v)}\right]dwdv=$$
$$=\frac{\partial(x^1,x^2\ x^3)}{\partial(q^1,q^2,q^3)}\left[\frac{\partial(q^1,q^2,q^3)}{\partial(w,v,x^1)}H^1+\frac{\partial(q^1,q^2,q^3)}{\partial(w,v,x^2)}H^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(q^1,q^2,q^3)}{\partial(w,v,x^3)}H^3\right]dwdv=|q_{ij}|^{1/2}\left[\frac{\partial(q^2,q^3)}{\partial(w,v)}H'^1+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(q^3,q^1)}{\partial(w,v)}H'^2+\frac{\partial(q^1,q^2)}{\partial(w,v)}H'^3\right]dwdv.$$

Если теперь в качестве (w,v) взять лагранжевы переменные (α^1,α^2),

(α^2, α^3), (α^3, α^1) и потребовать, чтобы магнитные потоки $dF^1=\tilde{H}^1 d\alpha^2 d\alpha^3$, $dF^2=\tilde{H}^2 d\alpha^1 d\alpha^3$, $dF^3=\tilde{H}^3 d\alpha^1 d\alpha^2$ не изменялись во времени, то

$$(2.3)\qquad |q_{ij}|^{1/2}\left[\frac{\partial(q^1, q^2, \alpha^i)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}H'^3+\frac{\partial(q^3, q^1, \alpha^i)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}H'^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(q^2, q^3, \alpha^i)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}H'^1\right]=\tilde{H}^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)\frac{\partial(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}.$$

2. Общий вид вариационного принципа. Динамические уравнения МГД в с.э.л.п. следуют из требования равенства нулю первой вариации функционала

$$\bar{\Phi}=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int\limits_{\Omega}\int\limits_{(q^i)}\rho|q_{ij}|^{1/2}\frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}\left[\frac{1}{2}q_{ij}u^iu^j-\right.\right.$$
$$\left.\left.-E-\frac{1}{8\pi\rho}q_{ij}H'^iH'^j\right]d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3\right\}dt$$

в предположении, что опорные переменные не варьируются, а вариации всех других величин связаны между собой законом сохранения массы (2.2), условием вмороженности магнитного потока (2.3), кинематическими соотношениями (2.1′) и первым началом термодинамики. Сформулированный вариационный принцип приводит к шести динамическим уравнениям, любые три из которых могут быть представлены в виде линейной комбинации остальных.

Для получения системы из трех независимых динамических уравнений на вектор вариаций $\delta\Psi=(\delta q^1, \delta q^2, \delta q^3, \delta\alpha^1, \delta\alpha^2, \delta\alpha^3)$ следует наложить дополнительные ограничения $\delta\Psi^{\mathrm{T}}=A\delta\mu^{\mathrm{T}}$, где $A=A(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — какая-либо матрица размерности 6×3 с рангом, равным трем, а $\delta\mu=(\delta\mu^1, \delta\mu^2, \delta\mu^3)$ — вектор обобщенных независимых вариаций.

Литература

1. *Selenger R. L., Whitham G. B.* Variational principles in continuum mechanics.— Proc. Roy. Soc., 1968, v. A305, p. 1–25.
2. *Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П.* Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике.– Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 6, с. 1285–1288.
3. *Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П.* Об использовании принципа наименьшего действия для построения дискретных математических моделей в магнитной гидродинамике.– Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 5, с. 1083–1088.
4. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1, с. 182–207.
5. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
6. *Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J. L.* An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds.— J. Comput. Phys., 1974, v. 14, p. 227–253.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1978.
8. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 13.V.1980