Труды Математического института АН СССР
1981, том 158

УДК 517.9

А. А. САМАРСКИЙ

О НОВЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

1. В последние годы большой интерес вызывает изучение неограниченных (не существующих «в целом») решений параболических уравнений. В работах автора и его сотрудников [1—15, 18, 21, 23, 29] был обнаружен ряд необычных свойств (таких, например, как локализация (инерция) тепла) диффузии тепла в сплошной среде в связи с возникновением в ней режимов с обострением. Под режимом с обострением понимают обычно такой процесс, некоторые характерные параметры которого неограниченно нарастают в течение конечного времени (времени обострения). Режимы с обострением возникают в различных существенно нестационарных физических процессах [1, 2, 10, 23].

Эффект локализации тепла был обнаружен при изучении квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad k(u)=u^{\sigma},\quad \sigma>0,\quad u>0;\quad u(0,\ x)=0,\quad x\in R^1_+, \tag{1}$$

с граничным режимом с обострением

$$u(t,\ 0)=(T-t)^n,\quad 0<t<T,\quad n=\mathrm{const}<0. \tag{1'}$$

Локализация тепла означает, что температура при $t\to T^-$ неограниченно возрастает в конечной области (области локализации тепла), а в остальной части пространства ограничена равномерно по t.

В [7—12] был исследован эффект локализации тепла для задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Q(u),\quad t>0,\quad x\in R^1,$$
$$k(u)=u^{\sigma},\quad Q(u)=u^{\beta},\quad \sigma>0,\quad \beta>1;\quad u(0,\ x)=u_0(x),\quad x\in R^1. \tag{2}$$

Эффект локализации («инерции») тепла и горения, в частности, дает возможность сконцентрировать любое количество энергии в ограниченном объеме, удержать его в течение конечного времени практически без распространения из зоны локализации и может иметь ряд важных физических приложений [10, 23]. Локализация является также внутренней причиной сложного взаимодействия в нелинейной среде различного рода нестационарных диссипативных структур [7—9, 12].

2. При изучении процессов локализации тепла для уравнений (1) и (2) со степенными зависимостями $k(u)=u^{\sigma}$ и $Q(u)=u^{\beta}$ использовались автомодельные решения [1, 4—6, 7—9, 13]. С помощью автомодельных решений были получены оценки снизу и сверху неавтомодельных решений уравнений (1) и (2). Были изучены также асимптотические свойства решений.

Автомодельные решения, как известно, существуют только при $k(u)=u^\sigma$ и $k(u)=\exp u$ [16, 17]. В [18—20] был развит математический аппарат теорем сравнения, позволивший провести изучение режимов с обострением для уравнений (1) и (2) с $k(u)$ и $Q(u)$ нестепенного вида. Традиционные теоремы сравнения для параболических уравнений устанавливают непрерывную зависимость решения уравнения от краевых данных. В [18] был развит метод, позволивший сравнивать решения задач, соответствующих не только разным краевым условиям, но и разным параболическим уравнениям (в случае (1) и (2) — разным $k(u)$ и $Q(u)$). С помощью обобщенных теорем сравнения установлена, например, локализация тепла для уравнения (1) с произвольной функцией $k(u)$ и даны в [21] соответствующие оценки.

3. В данной работе, содержащей результаты ряда работ автора с сотрудниками, мы рассмотрели две задачи. Первая из них связана с локализацией процесса диффузии тепла, описываемого линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<t<T, \quad x\in R^1_+=(0, +\infty), \tag{3}$$

в предположении, что при $x=0$ задан граничный режим с обострением. Вторая задача соответствует процессу горения под действием объемного энерговыделения, нелинейно зависящего от температуры:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(u), \quad t>0, \quad x\in R^1=(-\infty, +\infty) \tag{4}$$

(полулинейное параболическое уравнение).

Мы рассматриваем здесь источник $Q(u)$ специального вида

$$Q(u)=(1+u)\ln^\beta(1+u), \quad \beta>1. \tag{5}$$

Уравнения (1), (2) исследовались многими авторами обычно с других точек зрения. Отметим, что полулинейное уравнение (4) с ограниченным сверху источником $Q(u)\geqslant 0$, удовлетворяющим условиям $Q(0)=Q(1)=0$, $Q(u)\equiv 0$ при $u>1$, изучалось в известной работе [25] и в большом числе последующих работ, которые посвящены исследованию бегущих волн в биологических, химических и других средах. В отличие от этого круга работ в наших работах [7—12, 14, 15, 17], так же как и в данной статье, ограничение на рост $Q(u)$ отсутствует; это и приводит в ряде случаев к появлению неограниченных решений (режимов с обострением).

Для обеих указанных задач найдены условия локализации тепла. Однако основное внимание здесь уделяется методам изучения асимптотических свойств решений параболических уравнений при наличии режима с обострением.

4. В данной работе на примере указанных двух задач излагается новый метод исследования асимптотических свойств (в том числе, эффекта локализации) решений параболических уравнений. Показано, что в том случае, когда уравнение подходящих автомодельных решений не имеет, решение $u(t, x)$ рассматриваемой задачи может асимптотически сходиться к автомодельным решениям $v_a(t, x)$ совсем других уравнений. Такие решения $v_a(t, x)$ будем называть приближенными автомодельными решениями (п. а. р.).

В разделе 2 установлено, что решение краевой задачи (3) с граничным режимом с обострением экспоненциального вида, обладая свойством лока-

лизации, сходится в специальной норме к п. а. р., удовлетворяющему уравнению первого порядка типа Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{1+v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad 0<t<T, \quad x\in R^1_+.$$

Получена оценка в $C(R^1_+)$ скорости сходимости.

В разделе 3 изучается полулинейное уравнение (4) с источником (5). Показано, что пространственно-временна́я структура неограниченных (существующих в течение конечного времени) решений задачи Коши для уравнения (4), (5) определяется свойствами п. а. р., удовлетворяющих нелинейному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{1+v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+(1+v)\ln^\beta(1+v), \quad t>0, \quad x\in R^1.$$

Построенные в разделах 2, 3 п. а. р. рассматриваемых уравнений дают дополнительную информацию об асимптотических свойствах изучаемых процессов.

2. Локализация и асимптотические свойства граничных режимов с обострением для линейного уравнения теплопроводности

1. В этом разделе рассмотрим задачу о воздействии граничного режима с обострением на распространение тепла в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (t,\ x)\in S_T=(0,\ T)\times R^1_+, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u(t,\ 0)=\varphi(t)\xrightarrow[t\to T^-]{}+\infty, \quad 0<t<T, \\ u(0,\ x)=0, \quad x\in R^1_+. \end{gathered} \tag{2}$$

Будем говорить, что в задаче (1), (2) существует (эффективная) *локализация тепла*, если температура $u(t,\ x)$ неограниченно возрастает при $t\to T^-$ на множестве конечной меры, т. е.

$$\operatorname{mes}\{x: u(T^-,\ x)=+\infty\}=l<+\infty. \tag{3}$$

Множество $0\leqslant x\leqslant l$, на котором $u(t,\ x)\to+\infty$ при $t\to T^-$ (за исключением, быть может, точки $x=l$), назовем областью локализации, а величину l — глубиной локализации.

Если же $\operatorname{mes}\{x: u(T^-,\ x)=+\infty\}=+\infty$, т. е. температура обращается при $t\to T^-$ в бесконечность для всех $x\in R^1_+$, то локализация тепла отсутствует.

2. Решение задачи (1), (2) дается формулой (теплового потенциала двойного слоя) [24, 28]:

$$u(t,\ x)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right](t-\tau)^{-3/2}\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (t,\ x)\in S_T. \tag{4}$$

Переходя в (4) к пределу при $t\to T^-$, получим

$$u(T^-,\ x)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^T \exp\left[-\frac{x^2}{4(T-\tau)}\right](T-\tau)^{-3/2}\varphi(\tau)\,d\tau, \quad x\in R^1_+. \tag{5}$$

Отсюда непосредственно следует, что режимы с локализацией надо искать в однопараметрическом семействе экспоненциальных граничных функций

$$\varphi(t)=\exp((T-t)^n), \quad 0<t<T, \quad n=\text{const}<0, \tag{6}$$

зависящих от параметра n.

Подстановка (6) в (5) дает

$$u(T^-, x)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^T \exp\left\{(T-\tau)^{-1}\left[(T-\tau)^{n+1}-\frac{x^2}{4}\right]\right\}\frac{d\tau}{(T-\tau)^{3/2}}. \tag{7}$$

Из этой формулы получаем следующую классификацию экспоненциальных режимов[1]:

а). Если $n=-1$, то имеет место локализация тепла в S-режиме с глубиной $l=2$.

Формула (7) принимает вид

$$u(T^-, x)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^T \exp\left\{\frac{4-x^2}{4(T-\tau)}\right\}\frac{d\tau}{(T-\tau)^{3/2}}, \quad x\in R_+^1.$$

В области локализации $0\leqslant x\leqslant l=2$ температура $u(t, x)$ неограниченно возрастает при $t\to T^-$, а вне этой области ограничена сверху равномерно по t предельной кривой

$$u(T^-, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1-\left(\frac{2}{x}\right)^2\right]^{-1/2}\int_s^\infty \exp(-\eta)\,\eta^{-1/2}d\eta, \quad x>2, \quad s=\frac{x^2-4}{4T}. \tag{8}$$

б). Если $-1<n<0$, то условие (3) выполнено при $l=0$ (LS-режим) — температура обращается в бесконечность только в точке $x=0$, а всюду при $x>0$ ограничена сверху равномерно по t:

$$u(T^-, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_s^\infty \exp\left(-\eta+\frac{x^{2n}}{4^n}\eta^{-n}\right)\eta^{-1/2}d\eta, \quad s=\frac{x^2}{4T}. \tag{9}$$

в). Если $n<-1$, то из (7) видно, что $u(T^-, x)=+\infty$ при любых $x>0$ (HS-режим), т. е. локализация тепла отсутствует.

Пользуясь многомерным аналогом потенциала (4), можно провести исследование многомерной задачи теплопроводности и выяснить вопрос о возможных формах областей локализации. Границей области локализации, в частности, может быть любая из поверхностей второго порядка. Принцип суперпозиции позволяет объединять области локализации, соответствующие различным граничным режимам, и получать, например, области с негладкими границами.

3. Формула (7) дает лишь предельные ($t=T^-$) значения температуры. Представляют интерес асимптотические (при $t\to T^-$) распределения температуры и, в частности, закон изменения со временем полуширины $x_{эф}(t)$ проникновения тепловой волны; величина $x_{эф}(t)$ определяется условием

$$u(t, x_{эф}(t))={}^1/_2 u(t, 0). \tag{10}$$

Уравнение (1) с условием (6) не имеет автомодельных решений (оно допускает автомодельные решения только в случае степенных ($u(t, 0)=(T-t)^n$, $n=\text{const}<0$) режимов с обострением, см. [13]).

---

[1] Более общее двухпараметрическое семейство экспоненциальных режимов с обострением рассматривалось в [13, 29].

Однако для нашей задачи с экспоненциальным режимом удается построить п. а. р. уравнения (1). Удобно заменить (6) условием

$$u(t,\ 0)=\exp[(T-t)^n]-1,\quad 0<t<T. \tag{11}$$

Уравнению (1) поставим в соответствие нелинейное уравнение первого порядка типа Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{1+v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\quad (t,\ x)\in S_T. \tag{12}$$

Оно имеет следующее автомодельное решение:

$$v_a(t,\ x)=\exp[(T-t)^n\theta_a(\xi)]-1,\qquad \xi=x(T-t)^{-(1+n)/2}, \tag{13}$$

где $\theta_a(\xi)\geqslant 0$ есть решение краевой задачи

$$(\theta_a')^2-\frac{1+n}{2}\xi\theta_a'+n\theta_a=0,\quad \xi\in R_+^1,\ \ \theta_a(0)=1,\ \ \theta_a(+\infty)=0. \tag{14}$$

Граничное условие (11) для $v_a(t,\ x)$ выполнено в силу условия $\theta_a(0)=1$.

Уравнение (14) интегрируется в квадратурах, и функция $\theta_a(\xi)$ в тех точках, где она положительна, определяется из соотношений (в остальных точках $\theta_a=0$)

$$\left[X-\frac{1+n}{4}\right]^{(1+n)/2}\left[X+\frac{1-n}{4}\right]^{(1-n)/2}=\frac{(-n)^{1/2}}{\xi},$$

$$X=\left[\left(\frac{1+n}{4}\right)^2-\frac{n\theta_a(\xi)}{\xi^2}\right]^{1/2}. \tag{15}$$

В случае S-режима, т. е. при $n=-1$, задача (14) имеет простое решение

$$\theta_a(\xi)=(1-\xi/2)^2 \text{ при } 0\leqslant\xi\leqslant 2,\qquad \theta_a(\xi)=0 \text{ при } \xi>2, \tag{16}$$

причем $\xi\equiv x$.

Подробное исследование свойств решения задачи (14) дано в [13]. Ниже понадобится лишь оценка

$$\sup_{\xi\in R_+^1}|\theta_a''(\xi)|<+\infty. \tag{17}$$

Функция (13) является п. а. р. для задачи (1), (11).

Теорема 1. *Функция*

$$\theta(t,\ x)=(T-t)^{-n}\ln(1+u(t,\ x)),\quad (t,\ x)\in S_T,$$

где $u(t,\ x)$ — решение краевой задачи (1), (11), *сходится при $t\to T^-$ к функции $\theta_a(\xi)$ — решению задачи* (14), *причем верна оценка*

$$\sup_{x\in R_+^1}|\theta(t,\ x)-\theta_a(\xi)|=O[(T-t)^{-n}|\ln(T-t)|]\xrightarrow[t\to T^-]{}0. \tag{18}$$

Для доказательства теоремы введем функции $U=\ln(1+u)$, $V=\ln(1+v_a)$ и $z=U-V$. Для z получим в S_T уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(U+V) \tag{19}$$

с условием $z(t,\ 0)=0$, $0<t<T$, причем

$$\sup_x|z(0,\ x)|=\sup_x|\ln(1+u_0(x))-\theta_a(x)|<+\infty.$$

В силу [6, 13] можно формально считать $z \in C^{1,2}_{t,x}(S_T)$. Обозначая $Y(t) = \sup_x |z(t, x)|$ и пользуясь принципом максимума для (19), получим при $t \to T^-$

$$\frac{dY(t)}{dt} \leqslant \sup_x \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2}. \tag{20}$$

Так как $V = \ln(1 + v_a)$, а v_a определяется согласно (13), то $\partial^2 V/\partial x^2 = (T - t)^{-1}\theta_a''(\xi)$. Отсюда из (17) и (20) следует

$$Y(t) = O[|\ln(T - t)|], \quad t \to T^-. \tag{21}$$

Учитывая затем, что $\sup_{x \in R^1_+} |\theta(t, x) - \theta_a(\xi)| \leqslant (T - t)^{-n} Y(t)$, получим искомую оценку (18), откуда и следует сходимость $\theta \to \theta_a$ при $t \to T^-$.

4. В силу теоремы 1 асимптотическое поведение решения задачи (1), (11) описывается п. а. р. (13):

а). Если $n = -1$ (S-режим), то согласно (16)

$$u(t, x) \sim v_a(t, x) = \exp[(T - t)^{-1}(1 - x/2)^2] - 1, \quad 0 < x < 2; \tag{22}$$

глубина локализации $l = 2$ совпадает с вычисленной по (7).

б). При $-1 < n < 0$ (LS-режим) температура ограничена всюду в R^1_+ предельным распределением, совпадающим с (9) при $x \to 0$:

$$u(t, x) \to \exp[C(n) x^{2n/(n+1)}] - 1, \quad t \to T^- \text{ при } x \to 0,$$

где

$$C(n) = -[(n + 1)/2n]\, 2^{-2n/(n+1)} (-n)^{1/(n+1)}.$$

в). При $n < -1$ (HS-режим) температура в области $0 \leqslant x < (T - t)^{(n+1)/2} \times 2(-n)^{n/2}(-n - 1)^{-(n+1)/2}$ изменяется (неограниченно возрастает) по закону

$$u(t, x) \sim \exp\{(T - t)^n - x(-n)^{1/2}(T - t)^{(n-1)/2}\}, \quad t \to T^-.$$

Эффективная глубина тепловой волны $x_{эф}(t)$ — решение уравнения (10)—во всех трех режимах сокращается по закону

$$x_{эф}(t) = (T - t)^{(1-n)/2} \ln 2(-n)^{1/2} + o(T - t)^{(1-n)/2}, \quad t \to T^-. \tag{23}$$

Отметим, что обычно применяемая оценка глубины проникновения тепловой волны

$$x_{эф}(t) \sim (T - t)^{1/2}, \tag{24}$$

получаемая из размерностных соображений, в данном случае неправильно описывает асимптотическую стадию процесса. Это видно из сравнения (24) с (23). Значение $x_{эф}(t)$ согласно (23) определяется структурой соответствующего п. а. р. (13).

3. Об условиях неограниченности и локализации решений задачи Коши для полулинейного уравнения

В этом разделе исследуются свойства решений задачи Коши ($\beta = \text{const} > 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + u)\ln^\beta(1 + u), \quad t > 0, \quad x \in R^1; \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in R^1; \quad u_0 \in C(R^1), \quad \sup u_0 < \infty, \tag{2}$$

и, в частности, построены п. а. р. уравнения (1), к которым решения рассматриваемой задачи асимптотически сходятся (отметим, что подходящих автомодельных решений уравнение (1) не имеет [17]). Будем предполагать, что начальная функция $u_0(x)$ либо финитна: mes supp $u_0(x) < \infty$, либо $u_0(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Следуя [7—15], будем называть решение задачи (1), (2) *неограниченным* (или режимом с обострением), если для некоторого $T_0 < +\infty$ имеем

$$\max_{x \in R^1} u(t, x) \to +\infty, \quad t \to T_0^-. \tag{3}$$

Неограниченное решение будем называть *локализованным*, если $u(t, x) \to +\infty$ при $t \to T_0^-$ на множестве конечной меры, т. е.

$$\operatorname{mes}\{x : u(T_0^-, x) = +\infty\} = L < +\infty. \tag{4}$$

Если же $u(T_0^-, x) = +\infty$ всюду в R^1, то решение считаем *нелокализованным*. Задача (1), (2) эквивалентна задаче Коши

$$\mathbf{A}u = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - U^\beta = 0, \quad t > 0, \quad x \in R^1, \tag{5}$$

$$U(0, x) = U_0(x) = \ln[1 + u_0(x)] \geqslant 0, \quad x \in R^1, \tag{6}$$

в чем можно убедиться, полагая

$$U(t, x) = \ln(1 + u(t, x)).$$

1. Сначала будут определены условия неограниченности решения задачи (1), (2). Обозначим через D_T область $(0, T) \times \{x : |x| < \zeta(t)\}$, где $\zeta \in C((0, T))$ — некоторая неотрицательная функция, $P_T = (0, T) \times R^1$.

Лемма. *Пусть $U(t, x)$ — решение задачи* (5), (6), *а функция $z : D_T \to R^1_+$, $z \in C^{1,2}_{t,x}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$, $z \equiv 0$ всюду в $P_T \setminus D_T$, удовлетворяет в D_T неравенству $\mathbf{A}z \leqslant 0$. Тогда если $z(0, x) \leqslant U_0(x)$ при всех $x \in R^1$, то $U \geqslant z$ всюду в P_T.*

Это утверждение доказывается на основе принципа максимума для параболических уравнений (см., например, [30]). Следуя [31], функцию $z(t, x)$ будем называть нижним решением задачи (5), (6).

Рассмотрим теперь в области $D_T = (0, T) \times \{x : |x| < a \times (T - t)^{(\beta-2)/2(\beta-1)}\}$, где $T > 0$, $a > 0$ — фиксированные постоянные (подлежащие определению), функцию

$$z(t, x) = (T - t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\xi), \qquad \xi = x(T - t)^{-(\beta-2)/2(\beta-1)}, \tag{7}$$

где $\theta \in C^2(-a, a)$ — некоторая четная функция. Для того чтобы функция (7) была нижним решением задачи, достаточно, чтобы

$$(T - t)^{+1/(\beta-1)}\theta'' + (\theta')^2 - \frac{\beta - 2}{2(\beta - 1)}\theta'\xi - \frac{1}{\beta - 1}\theta + \theta^\beta \geqslant 0, \quad \xi \in (0, a) \quad (\theta' = d\theta/d\xi), \tag{8}$$

и $z(0, x) \leqslant U_0(x)$ в R^1. Функцию $\theta(\xi)$ будем искать в виде $\theta(\xi) = A(a^2 - \xi^2)$, где $A = \text{const} > 0$. Тогда неравенство (8) будет заведомо выполнено, если постоянные T, a, A таковы, что

$$-\left[2T^{1/(\beta-1)} + \frac{a^2}{\beta - 1}\right] + \xi^2(4A + 1) + A^{\beta-1}(a^2 - \xi^2)^\beta \geqslant 0$$

при любых $\xi \in (0, a)$. Анализируя это неравенство, убеждаемся, что справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть начальная функция u_0 такова, что*

$$u_0(x) \geqslant \exp\{T^{-1/(\beta-1)}A[a^2 - |x|^2 T^{-(\beta-2)/(\beta-1)}]\} - 1, \quad |x| < a,$$

где постоянные T, a, A удовлетворяют неравенствам

$$A > (2-\beta)/4(\beta-1),$$

$$A^{\beta-1}a^{2\beta}\left[1-\frac{1}{(1+4A)(\beta-1)}\right]^{\beta} \geqslant 2T^{1/(\beta-1)}+\frac{a^2}{\beta-1}.$$

Тогда решение задачи (1), (2) *является неограниченным и для некоторого* $T_0 < T$ *выполняется условие* (3).

Замечание. Из оценок теоремы 2 нетрудно вывести известный [15, 32] результат о неограниченности любого решения задачи (1), (2) при $1<\beta\leqslant 3$ и $u_0(x)\not\equiv 0$.

2. Пусть $U(t, x)$ — решение задачи (5), (6) при условиях теоремы 2. Тогда членом $\partial^2U/\partial x^2$ в (5) можно пренебречь при $T\to 0$, так как $\partial U^2/\partial x^2$ в неравенстве (8) соответствует произведение $(T-t)^{1/(\beta-1)}\theta''(\xi)$, причем $\max(T-t)^{1/(\beta-1)}=T^{1/(\beta-1)}\to 0$ при $T\to 0$. Таким образом (по аналогии с разделом 2), вторая производная $\partial^2U/\partial x^2$ на асимптотической стадии ($t\to T_0^-$) процесса становится пренебрежимо малой по сравнению с другими членами уравнения (5) и решение задачи при $t\to T_0^-$ сходится к автомодельному решению

$$V(t, x)=(T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\theta_a(\xi), \quad \xi=x(T_0-t)^{-(\beta-2)/2(\beta-1)} \tag{9}$$

уравнения первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+V^{\beta}, \quad t>0, \quad x\in R^1. \tag{10}$$

Функция $\theta_a\geqslant 0$ в (9) является решением краевой задачи

$$\begin{gathered}(\theta')^2-\frac{\beta-2}{2(\beta-1)}\theta'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta+\theta^{\beta}=0, \quad \xi\in R^1_+,\\ \theta'(0)=0, \quad \theta(+\infty)=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Существование решения этой задачи при любых $\beta>1$ установлено в [15], где показано, что $\theta_a(0)=(\beta-1)^{1/(\beta-1)}$, $\beta>1$.

При $\beta=2$ имеем $\xi\equiv x$ и решение задачи (11) находится в явном виде

$$\theta_a(\xi)=\cos^2(\xi/2), \quad |\xi|\leqslant\pi; \quad \theta_a(\xi)\equiv 0, \quad |\xi|>\pi. \tag{12}$$

Сходимость неограниченного решения задачи (5), (6) к п. а. р. (9) по аналогии с разделом 2 (см. также [5, 6, 8, 15]) понимается как близость их автомодельных представлений:

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup_{\xi\in R^1}|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)|=0, \tag{13}$$

где $\theta(t, \xi)$ — автомодельное представление решения задачи (5), (6), вычисляемое по формуле (см. [8, 15])

$$\theta(t, \xi)=A[\max_x U(t, x)]^{-1}U\left(t, A^{\beta/2-1}[\max_x U(t, x)]^{1-\beta/2}\xi\right),$$

где $A=\theta_a(0)$.

Справедливость предельного равенства (13) подтвердилась в серии прямых расчетов [15].

Переходя путем обратных замен $U=\ln(1+u)$, $V=\ln(1+v)$ к переменным u, v, видим, что п. а. р. исходного уравнения (1) удовлетворяют уравнению первого порядка типа Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{(1+v)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+(1+v)\ln^{\beta}(1+v), \quad t>0, \quad x\in R^1. \tag{14}$$

3. Асимптотическая сходимость (13) п. а. р. (9) к решению задачи (5), (6) обеспечивает в пределе совпадение их свойств, так что при $t \to T_0^-$ их пространственно-временные распределения совпадают.

Поэтому, анализируя (9), получаем следующую классификацию неограниченных решений задачи (1), (2) в зависимости от значений параметра β:

а). Если $\beta=2$, то имеет место локализация в S-режиме, когда решение неограниченно возрастает на множестве с мерой $L=2\pi$ (см. (12)).

б). Если $\beta>2$ (LS-режим), то температура обращается в бесконечность на множестве меры нуль ($L=0$).

в). Если $1<\beta<2$ (HS-режим), то $u(t, x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-$ всюду в R^1 и локализация отсутствует.

Замечание. В [15] показано, что при $\beta>3$ и достаточно малых начальных функциях $u_0(x)$ задача (1), (2) имеет решение, определенное при любых $t>0$, причем $\max\limits_x u(t, x)\to 0$ при $t\to+\infty$. Эти глобальные решения задачи асимптотически ($t\to+\infty$) сходятся к п. а. р.

$$v_a(t, x)=\exp\left[(T+t)^{-1/(\beta-1)} f_a(\eta)\right]-1, \quad \eta=x(T+t)^{-1/2}, \tag{15}$$

удовлетворяющим параболическому уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{(1+v)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+(1+v)\ln^\beta(1+v), \quad t>0, \quad x\in R^1. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (16), получаем, что положительная функция $f_a(\eta)$ является решением задачи

$$f_a''+\frac{1}{2}f_a'\eta+\frac{1}{\beta-1}f_a+f_a^\beta=0, \quad \eta\in R_+^1,$$

$$f_a'(0)=0, \quad f_a(+\infty)=0.$$

Таким образом, уравнение (1) в зависимости от того, какие решения — неограниченные или глобальные — исследуются, имеет в качестве п. а. р. функции, удовлетворяющие уравнениям разных порядков — (14) или (16) соответственно.

Отметим, что неограниченные решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^\beta, \quad t>0, \quad x\in R^1; \quad \beta>1$$

всегда локализованы и асимптотически сходятся к его точным автомодельным решениям [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. — ДАН СССР, 1975, 223, № 6, с. 1344—1347.
2. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, 3, № 4, с. 703—719.
3. *Михайлов А. П.* Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью: Препринт № 64. М.: ИПМ АН СССР, 1977.
4. *Галактионов В. А., Михайлов А. П.* Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности: Препринт № 53. М.: ИПМ АН СССР, 1977.
5. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. А.* Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности. — Диф. уравнения, 1980, 16, № 7, с. 1196—1204.
6. *Галактионов В. А.* О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности. — Диф. уравнения, 1980, 16, № 9, с. 1660—1676.
7. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла. — ДАН СССР, 1976, 227, № 2, с. 321—324.
8. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды: Препринт № 106. М.: ИПМ АН СССР, 1977.

9. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур. — ДАН СССР, 1977, **237**, № 6, с. 1330—1333.
10. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью. — Письма в ЖЭТФ, 1977, **26**, № 9, с. 620—624.
11. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах. — ДАН СССР, 1980, **251**, № 4, с. 836—839.
12. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации: Препринт № 29. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
13. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. А.* Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью: Препринт № 28. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
14. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. А.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta$. — ДАН СССР, 1980, **252**, № 6, с. 1362—1364.
15. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. А.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений: Препринт № 161. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
16. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. — ДАН СССР, 1959, **125**, № 3, с. 492—495.
17. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком: Препринт № 57. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
18. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. А.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1979, **19**, № 6, с. 1451—1461.
19. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. А.* О сравнении решений параболических уравнений. — ДАН СССР, 1979, **248**, № 3, с. 586—589.
20. *Галактионов В. А.* Два метода сравнения решений параболических уравнений. — ДАН СССР, 1980, **251**, № 4, с. 832—835.
21. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности: Препринт № 181. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
22. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.
23. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* N- и S-режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. — Прикл. мех. и техн. физ., 1977, № 1, с. 3—18.
24. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
25. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. — Бюл. МГУ, 1937, **1**, № 6, с. 1—26.
26. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. — Прикл. мат. и мех., 1952, **16**, № 1, с. 67—78.
27. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры: Сб., посвящ. семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
28. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
29. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами. — ДАН СССР, 1979, **247**, № 2, с. 349—353.
30. *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968.
31. *Sattinger D. H.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. — Indiana Univ. Math. J., 1972, **21**, p. 979—1000.
32. *Fujita H.* On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations. — In: Nonlinear functional analysis: Proc. Symp. Pure Math. 18, Chicago (Ill.), 1968. Providence (Rhode Island): Amer. Math. Soc., 1970, pt 1, p. 105—113.