С.П. КУРДЮМОВ, Г.Г. МАЛИНЕЦКИЙ, Ю.А. ПОВЕЩЕНКО,
Ю.П. ПОПОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ТЕПЛОВЫХ СТРУКТУР В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

1. Многие процессы в нелинейных средах такие, как, например, распространение тепла в среде, коэффициент теплопроводности которой зависит от температуры, диффузия вещества или проникновение магнитного поля в среду с конечной проводимостью, некоторые задачи биологии и т.д. в математическом отношении описываются квазилинейным уравнением параболического типа ([1-8])

$$(1)\qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa(T)\operatorname{grad} T) + Q(T):$$

Ниже при исследовании уравнения (1) мы будем рассматривать $T(\mathbf{r}, t)$ как температуру среды, $\kappa(T)$ – коэффициент теплопроводности, $Q(T)$ – источник тепла, моделирующий процессы горения в среде. Зависимости $\kappa(T)$, $Q(T)$ нелинейны:

$$(2)\qquad \kappa = \kappa_0 T^\sigma, \qquad Q = q_0 T^\beta, \qquad k_0 > 0, \qquad q_0 > 0, \qquad \sigma > 0.$$

В работах ([2-8]) в одномерном нестационарном приближении было показано, что при $\beta > 1$ эволюция пространственного распределения температуры $T(r, t)$ может происходить в "режиме с обострением", когда температура среды в некоторых точках или областях неограниченно возрастает за конечное время t_f, называемое временем обострения. При $\beta \geqslant \sigma + 1$ наблюдается явление локализации горения: несмотря на неограниченный рост температуры в некоторой области пространства при $t \to t_f$, горение среды происходит в конечной области, вне которой температура не изменяется. Можно выделить три типа режимов с обострением: S-режим при $\beta = \sigma + 1$, HS-режим ($\beta < \sigma + 1$), LS-режим ($\beta > \sigma + 1$). В S-режиме область эффективного горения $G_{\text{эф}}$ не изменяется на развитой стадии процесса, в LS-режиме $G_{\text{эф}}$ сокращается, в HS-режиме $G_{\text{эф}}$ растет. $G_{\text{эф}}$ – пространственный аналог полуширины распределения, $\mathbf{r} \in G_{\text{эф}}$, если $T(\mathbf{r}, t) \geqslant 0{,}5 \max T(\mathbf{r}, t)$.

Исследования, проведенные в одномерном, цилиндрически- и сферически-симметричных случаях ([2],[3],[9]), показывают, что при $\beta \geqslant \sigma + 1$ интенсивное горение (т.е. рост температуры идет по закону

$$\max_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r}, t) \sim (1 - t/t_f)^{-(\beta-1)^{-1}})$$

сопровождается явлением локализации и наблюдается, если область $G_{\text{эф}}$ превышает характерную для данной среды область G_f, называемую фундаментальной.

В работах ([4],[5],[8]) было показано, что в LS-режиме в одномерном случае возможно горение среды в виде структур, когда профиль температуры $T(r, t)$ остается со временем самоподобным. Этот профиль может быть найден из решения некоторой автомодельной задачи для функции $f(\xi)$ ([4],[5]), к которой приводится (1), и имеет вид

$$T(r, t) = (1 - t/t_f)^{-(\beta-1)^{-1}} f(\xi), \qquad \xi = r(1 - t/t_f)^{-0{,}5(\beta-\sigma-1)(\beta-1)^{-1}}.$$

Различают п р о с т ы е с т р у к т у р ы, имеющие один максимум, и с л о ж н ы е, имеющие несколько максимумов. Для реализации горения среды в виде сложных структур требуется с высокой точностью задавать начальный профиль в соответствии с решением автомодельной задачи. Реально начальное распределение всегда

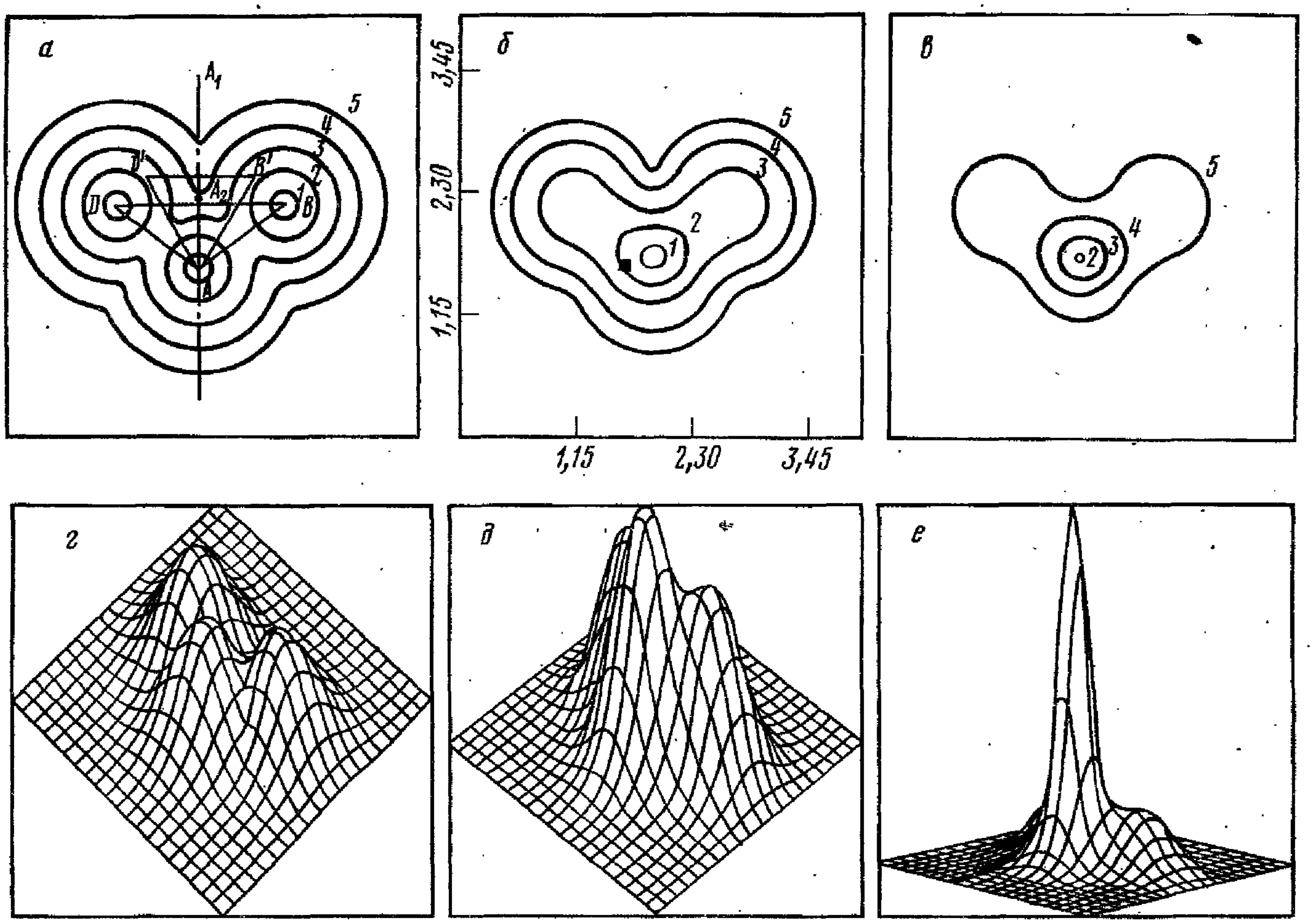

Рис. 1. Эволюция сложной квазиструктуры $T(x, y, 0) = 1{,}35 \max[\exp(-2{,}5x^2 - 2{,}5y^2),\ \exp(-2{,}5 \cdot (x + 0{,}96)^2 - 2{,}5\,(y - 0{,}72)^2)]$, $\angle BAD = 2 \arcsin 0{,}6$, $\beta = 4{,}0$, $\sigma = 2{,}0$, $k_0 = 1{,}0$, $q_0 = 5{,}25$. *а* – *в* – линии уровня $T_1 = 0{,}95\,T_M$; $T_2 = 0{,}75\,T_M$; $T_3 = 0{,}5\,T_M$; $T_4 = 0{,}25\,T_M$; $T_5 = 0{,}1\,T_M$, где $T_M = \max_{\mathbf{r}} (T(\mathbf{r}, t))$. *г* – *е* – распределение температуры $T(x, y, t)$. *а*, *г* соответствуют моменту времени $t = 0{,}0$; *б*, *д* – $5{,}94 \cdot 10^{-2}$, *в*, *е* – $6{,}04 \cdot 10^{-2}$

содержит различные возмущения. В работе численно моделируется эволюция многомерных начальных распределений вида

$$T(\mathbf{r}, 0) = \max_{i = 1, 2, \ldots, N} [A_i \exp(-k_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2)].$$

Решения (1) с одним максимумом, соответствующие исходным данным

$$(3) \qquad T(\mathbf{r}, 0) = A \exp(-k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2),$$

будем называть простыми квазиструктурами. Оказывается, при достаточном перекрытии областей G_f, соответствующих простым квазиструктурам, эволюцию профиля можно описать как процесс их взаимодействия. В этом случае профиль $T(\mathbf{r}, t)$ естественно называть сложной квазиструктурой (от сложной структуры ее отличают меньшие времена метастабильности и ряд новых свойств, исследуемых ниже).

2. Многомерные численные расчеты проводились по неявной консервативной схеме с использованием пакета прикладных программ ТЕКОН ([11]). Алгоритм содержит итерационный процесс по нелинейности с последующим решением линейной системы алгебраических уравнений, для чего используется двухслойная итерационная схема с чебышевским упорядоченным набором параметров ([10]). Этот алгоритм является "изотропным" в том смысле, что при его реализации не выделяется какого-либо направления в пространстве. Это особенно важно при численном моделировании режимов с обострением. Дело в том, что малые возмущения, прив-

носимые вычислительным алгоритмом, могут качественно изменить характер решения этих неустойчивых по Ляпунову задач.

3. В двухмерных и трехмерных численных экспериментах (см. рис. 1) наблюдалось явление локализации при горении среды в S- и LS-режимах с обострением (исследованы LS-режим, $\beta = 4$, $\sigma = 2$, и S-режим, $\beta = 3$, $\sigma = 2$, параметры k_0 и q_0 варьировались в широком диапазоне).

Можно выделить три стадии процесса горения ([12]).

Первая – стадия перестройки начального профиля. Локальные максимумы остаются неподвижными, в то время как полная энергия квазиструктуры $E = \int_G T\,dV$ растет по закону, близкому к линейному.

Вторая – стадия динамики. Квазиструктуры эффективно взаимодействуют, что сопровождается движением локальных максимумов температуры к общему центру (см. рис. 1*б, д*). Длительность и характер взаимодействия определяются величиной пересечения фундаментальных областей простых квазиструктур. При удалении двух простых квазиструктур друг от друга наблюдается увеличение в десятки раз интервала температур, где происходит эффективное взаимодействие, сопровождающееся движением локальных максимумов. Однако этот эффект носит пороговый характер. Начиная с некоторой критической величины пересечения фундаментальных областей простых квазиструктур, происходит независимое развитие различных частей температурного профиля и формирование двух простых структур. Наблюдаемая картина связана с конкуренцией процесса "затекания" на общий центр и сокращения области $G_{эф}$ в LS-режиме.

На третьей – асимптотической – стадии в области $G_{эф}$ сложная квазиструктура вырождается в несколько невзаимодействующих простых структур. При этом в LS-режиме вне $G_{эф}$ формируется часть температурного распределения, практически не меняющаяся до t_f. Эта часть может иметь сложную пространственную форму (см. рис. 1*в, е*).

4. Сопоставим особенности явления локализации горения в многомерном случае с результатами одномерных расчетов. Как известно, на асимптотической стадии процесса горения в одномерном случае начальные данные не влияют на область $G_{эф}$ и форму профиля температур, близкую к автомодельной задаче ([4]), а определяют только время обострения t_f. В многомерном случае также существуют цилиндрически- и сферически-симметричные автомодельные решения, определяющие цилиндрически- и сферически-симметричную фундаментальную область. Однако оказывается, что параметры начального распределения в многомерном случае влияют не только на величину t_f, но и на эволюцию области $G_{эф}$ на развитой стадии.

Проведенный расчет LS-режима в двумерном случае ($\beta = 4$, $\sigma = 2$, $k_0 = 1{,}0$, $q_0 = 5{,}25$, $A_1 = A_2 = 1{,}35$, $k_1 = k_2 = 2{,}5$, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 1{,}2$) показал, что после взаимодействия квазиструктур область $G_{эф}$ приобретает форму эллипса и сохраняет ее при росте температуры более чем в 100 раз. Несмотря на сокращение обеих полуосей эллипса симметризация и изменение его эксцентриситета происходят медленно по сравнению с ростом температуры. Это связано с тем, что для направлений, где диаметр $G_{эф}$ минимален, рост температуры в периферийной области идет в основном за счет подтока тепла из центральных областей.

В S-режиме ($\beta = 3$, $\sigma = 2$, $k_0 = 1{,}0$, $q_0 = 5{,}25$, $A_1 = A_2 = 1{,}35$, $k_1 = k_2 = 2{,}5$, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 1{,}2$) после взаимодействия двух простых квазиструктур область $G_{эф}$ также приобретает форму эллипса. При этом происходит эффективная локализация горения по одному направлению и растекание тепла по другому, что позволяет говорить о векторном характере локализации процесса горения.

5. Для изучения влияния пространственной симметрии на характер взаимодействия квазиструктур рассмотрим два численных эксперимента. Ограничимся случаем трех одинаковых простых квазиструктур в LS-режиме в двумерном случае.

В первом эксперименте квазиструктуры в начальный момент расположены так, как это показано на рис. 1*а*; *г* (ΔABD). После стадии динамики, во время которой происходит движение абсолютного максимума температуры по AA_2 (см. рис. 1*б*, *д*), интенсивное горение наблюдается в сокращающейся области вблизи физически выделенной квазиструктуры A (см. рис. 1*в*, *е*).

Рассмотрим теперь случай симметричного начального распределения, когда выделенной квазиструктуры нет. Разместим три квазиструктуры с теми же параметрами, что и в первом эксперименте, так, чтобы их максимумы были расположены в вершинах равностороннего треугольника $AB'D'$ (см. рис. 1*а*). При численном моделировании этой ситуации наблюдается движение локальных максимумов простых квазиструктур A, B', D' до слияния в точке A_2, центре симметрии. По сравнению с предыдущим экспериментом продолжительность стадии динамики возрастает в 2,3–2,35 раза, а время обострения в 1,45 раза.

Обратим внимание на то, что время обострения во втором эксперименте увеличивается, хотя большая энергия при этом сосредоточена в меньшем пространстве, чем в случае треугольника ABD. Отсюда видно, что пространственная симметрия увеличивает стабильность сложной квазиструктуры.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
10 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А.А. Самарский, Ю.П. Попов*, Разностные схемы газовой динамики, М., "Наука", 1974. [2] *Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов и др.*, Препринт ИПМ АН СССР, № 74, 1976. [3] *А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др.*, ДАН, т. 227, № 2, 321 (1976). [4] *Г.Г. Еленин, С.П. Курдюмов*, Препринт ИПМ АН СССР, № 106, 1977. [5] *А.А. Самарский, Г.Г. Еленин и др.*, ДАН, т. 237, № 6, 1330 (1977). [6] *С.П. Курдюмов, Н.В. Змитренко*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1 (1977). [7] *Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов и др.*, Письма ЖЭТФ, т. 26, в. 9 (1977). [8] *С.П. Курдюмов*, Препринт ИПМ АН СССР, № 29, 1979. [9] *С.П. Курдюмов, Е.С. Куркина, Г.Г. Малинецкий*, Препринт ИПМ АН СССР, № 16, 1979. [10] *А.А. Самарский*, Введение в теорию разностных схем, М., "Наука", 1974. [11] *Ю.А. Повещенко, Ю.П. Попов*, Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1978. [12] *С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий и др.*, Препринт ИПМ АН СССР, № 77, 1978. [13] *А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др.*, ДАН, т. 223, № 6, 1344 (1975).