НОЯБРЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 11

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 519.6

А. А. САМАРСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия современной теории дифференциальных уравнений сформировались при решении классических задач математической физики. Именно при исследовании простейших задач гидродинамики, акустики, теплопроводности, электродинамики возникли такие понятия, как задача Коши, краевая задача, обобщенное решение, и физическая интуиция была мощным эвристическим средством при отыскании математически правильных постановок задач, а потребности физики и техники указывали на наиболее актуальные проблемы, решение которых и составило прогресс теории дифференциальных уравнений.

Сегодня многие разделы теории дифференциальных уравнений в частных производных уже приобрели математически законченной вид. Дальнейшие успехи в теории дифференциальных уравнений, как нам кажется, во многом будут определяться качественно новыми задачами, источник которых — проблемы физики.

Конечно, многие классические задачи математической физики еще не решены (и среди них в первую очередь математические задачи гидродинамики, связанные с уравнениями Навье—Стокса, Эйлера, уравнения газовой динамики и др.). Но здесь нам хотелось бы обратить внимание на некоторые качественно новые постановки задач, возникающие при решении современных проблем физики.

Качественно новые постановки задач возникают даже в такой классической и хорошо изученной области, как теория эллиптических и параболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Например, при математическом описании некоторых процессов в плазме мы приходим к следующей задаче [1] *: Пусть G — открытая область n-мерного евклидова пространства E^n, $n \geqslant 2$, ∂G — гладкая граница G (достаточно, чтобы ∂G удовлетворяла бы условию Ляпунова), $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор эллиптического типа на дважды непрерывно дифференцируемых в G функциях. Пусть σ — часть ∂G, и пусть T непрерывно дифференцируемое отображение σ в некоторую гладкую поверхность $T\sigma$, лежащую в G. Нужно найти дважды непрерывно дифференцируемую в G функцию $u(x)$, $x \in E^n$, непрерывную в $G \cup \partial G$, которая удовлетворяла бы условиям:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, \ x \in G, \ x = (x_1, \ \ldots, \ x_n); \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial G \setminus \sigma, \ \varphi \in C(\partial G \setminus \sigma); \\ u(Tx) = u(x), \ x \in \sigma. \end{cases}$$

* Приводимые нами ниже ссылки на литературу не претендуют ни на полноту, ни на историчесьи правильное освещение вопроса. Их задача состоит только в том, чтобы указать на некоторые типичные, на наш взгляд, работы по рассматриваемому вопросу.

$$\mathscr{L} = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + C(x); \quad u \in C^{(2)}(G) \cap C(G \cup \partial G).$$

Своеобразие этой задачи состоит в том, что граничные условия ставятся в точках области G, где искомая функция должна удовлетворять уравнению. При изучении нестационарных процессов аналогичная задача ставится для уравнения параболического типа [2, 3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{L}u, \ x \in G, \ t > 0,$$

$$u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial G \setminus \sigma, \ t > 0; \ \varphi \in C(\partial G \setminus \sigma),$$

$$u(Tx) = u(x), \ x \in \sigma, \ t > 0;$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Первоначальное изучение этих задач уже проведено (исследована разрешимость, доказан принцип максимума). Но, конечно, здесь хотелось бы иметь более подробную информацию о решении (его оценки, сходимость численных методов и др.). Интересны также встретившиеся нам нестандартные задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < 1, \ t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), \ 0 < x < 1; \end{cases}$$

с граничными условиями следующего вида:

$$a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = 0,$$

$$c_1 u_x(0, t) + d_1 u_x(1, t) + c_0 u(0, t) + d_0 u(1, t) = 0,$$

либо с такими условиями:

$$u(0, t) = \nu(t), \quad \int_0^1 u(x, t)\, dx = \mu(t).$$

Нестандартный вид краевых условий порождает ряд своеобразных явлений: в некоторых случаях получается бесконечное число присоединенных функций, полнота системы собственных и присоединенных функций требует особого доказательства, нетривиальные вопросы сходимости разложений по собственным функциям, вопросы существования и устойчивости решения задачи. Исследование этих вопросов проведено в [4—6].

2. С задачами физики плазмы связана и другая группа проблем теории дифференциальных уравнений, относящаяся к нелинейным уравнениям, а именно к уравнениям Больцмана и Власова. Недавно в математической теории этих уравнений были достигнуты принципиальные успехи [7—14]. Для уравнения Больцмана доказаны, наконец, теоремы существования решения в пространственно неоднородном случае. Теоремы существования решения уравнения Больцмана доказаны, по-существу, классическим методом построения решения в окрестности равновесия методом последовательных приближений. Правда, при этом было необходимо проделать очень большую работу по поиску нужных пространств. Решающим моментом в доказательстве явились оценки оператора столкновений. Условия на начальную функцию в доказанных теоремах существования еще довольно жесткие, и они слишком обременительны для математически корректного изучения наиболее интересных и сложных вопросов (таких, как асимптотически по малому числу Кнудсена в окрестности границы). Тем не менее изучение этих вопросов уже начато [15, 16], и можно надеяться, что в этих спорных вопросах удастся, наконец, добиться ясности. Остановимся более подробно на уравнении Власова. Это уравнение было предложено для описания плазмы А. А. Власовым в [17] и с тех пор стало одним из самых популярных уравнений математической физики.

Пусть область G трехмерного евклидова пространства заполнена достаточно разреженной плазмой. Тогда в предложенном А. А. Власовым для описания плазмы приближении самосогласованного поля функции распределения ионов и электронов плазмы удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{gathered}\partial_t f^{\pm}+\frac{1}{m_{\pm}}(p,\ \partial_x f^{\pm})\mp e(\partial_x\varphi,\ \partial_p f^{\pm})=0,\ t>0,\ x\in G,\ p\in E^3,\\ -\Delta\varphi=4\pi\rho,\ \rho=\int\limits_{E^3}(f^+(x,\ p,\ t)-f^-(x,\ p,\ t))\,dp,\\ \varphi|_{\partial G}=0,\ f^{\pm}(x,\ p,\ 0)=f_0^{\pm}(x,\ p),\end{gathered}\tag{1}$$

где $f^{\pm}(x,\ p,\ t)$ — функции распределения ионов и электронов в фазовом пространстве; $m_{\pm}$ — массы иона и электрона; e — заряд электрона; φ — потенциал самосогласованного электрического поля. С математической точки зрения система (1) имеет несколько особенностей.

Во-первых, коэффициент первых двух уравнений $\partial_x\varphi$ зависит от решения нелокально: изменение функции $f^{\pm}(x,\ p,\ t)$ как угодно далеко от точки x ведет к изменению $\partial_x\varphi$ в данной точке x (уравнение является интегро-дифференциальным).

Во-вторых, коэффициент при $\partial_x f^{\pm}$ обращается в ноль в точке $p=0$. Это создает определенные трудности (вырождение).

В-третьих, естественные с физической точки зрения граничные условия для системы (1), состоящие в условиях зеркального отражения частиц на границе области G, нелокальны:

$$f^{\pm}\left(x,\ \frac{1}{m_{\pm}}p,\ t\right)-f^{\pm}\left(x,\ \frac{1}{m_{\pm}}(p-2n_x(n,\ p)),\ t\right),\quad x\in\partial G,\ p\in E^3$$

(n_x — вектор нормали к ∂G в точке x). Математическая формулировка условий частичного отражения или условий прилипания частиц к границе еще более сложна.

Проблема исследования уравнения (1) с учетом граничных условий очень трудна, и мы не будем ее касаться, а будет считать, что область G совпадает со всем пространством.

Уравнение Власова уже давно привлекало внимание исследователей [18—30]. Отметим, что большое число работ по уравнению Власова посвящено «сглаженному» уравнению Власова. «Сглаживание» эквивалентно замене электростатического взаимодействия между частицами на взаимодействие, потенциал которого менее сингулярен на малых расстояниях. Дело обстоит следующим образом. Пусть $G=E^3$. Мы можем решить второе уравнение системы (1) относительно φ и получим систему:

$$\begin{gathered}\partial_t f^{\pm}+\frac{1}{m_{\pm}}(p,\ \partial_x f^{\pm})\mp e(\partial_x\textstyle\int|x-x'|^{-1}\rho(x',\ t)\,dx',\ \partial_p f^{\pm})=0,\\ f^{\pm}(x,\ p,\ 0)=f_0^{\pm}(x,\ p),\ \rho(x,\ t)=\textstyle\int(f^+(x,\ p,\ t)-f^-(x,\ p,\ t))\,dp.\end{gathered}\tag{2}$$

Если в уравнении (2) функцию $|x-x'|^{-1}$ заменить на менее сингулярное ядро (допустим, взять $|x-x'|^{-(1-\delta)}$, $\delta>0$, или $(|x-x'|^2+\delta^2)^{-1/2}$ — именно в этом и состоит «сглаживание»), то тогда существование «в целом» (т. е. всех $t>0$) и единственность решения задачи Коши для системы (2) доказываются сравнительно просто стандартными методами. В связи с обсуждаемой в работе [27] проблемой единственности решения уравнения Власова отметим, что единственность классического решения даже для «не сглаженного» случая доказана в работе [30], а для «сглаженного» потенциала взаимодействия (который только и обсуждается в [28]) эта единственность получается совсем просто (см. лемму 7, с. 19 из [29]).

В трехмерном пространстве наиболее интересный для практики случай электромагнитного (или гравитационного) взаимодействия (т. е. когда подынтегральная функция в (2) имеет особенность типа $|x-x'|^{-1}$) оказывается критическим: здесь удалось получить лишь частичные результаты [26, 29, 30]: существование в «целом» обобщенного решения задачи Коши в ограниченной и неограниченной области (единственность решения не гарантируется) и существование в «малом» единственного классического решения. Для общего трехмерного случая и «несглаженного» взаимодействия эти результаты остаются пока единственно известными. В двухмерном случае ($x\in E^2$, $p\in E^2$), трехмерном сферически симметричном и трехмерном цилиндрически симметричном случае удалось доказать теорему существования классического решения «в целом» [24]. Однако подчеркнем, что проблема исследования системы уравнений Власова в ограниченной области с учетом граничных условий остается открытой (здесь известно только существование обобщенного решения, удовлетворяющего уравнению и граничным условиям в смысле интегрального тождества на равных нулю в окрестности границы подобных функциях).

Конечно, теоремами существования не исчерпываются все интересные задачи для уравнения Власова, наиболее интересные и нужные задачи здесь связаны с разработкой численных методов решения задачи Коши для уравнения (2).

Одним из наиболее популярных численных методов решения уравнения Власова являются различные модификации метода «крупных частиц». Сущность этих методов состоит в том, что течение плазмы моделируется движением облака достаточно большого числа заряженных частиц. Число работ, в которых использованы различные варианты метода «крупных частиц», очень велико, регулярно появляются обзоры, в которых обсуждаются связанные с этим методом вопросы, и мы не будем здесь останавливаться на методе «крупных частиц». Но насколько нам известно, полного математического обоснования какого-нибудь варианта метода «крупных частиц» в настоящее время нет. Косвенным его оправданием (помимо физической очевидности и разумности получаемых результатов) с математической точки зрения может служить работа [28], в которой доказано, что решение уравнения Лиувилля (т. е. точного уравнения для одночастичной функции распределения N частиц, взаимодействующих между собой через поле с достаточно гладким потенциалом) при $N\to\infty$ в определенном смысле сходится к решению уравнения Власова. Нам кажется, что развитые в работе [28] идеи могли бы стать основой для математически четкого обоснования простейших вариантов «метода крупных частиц», и это одна из актуальных задач теории уравнения Власова. Но, конечно, является актуальной и разработка альтернативных математически достоверных численных методов решения уравнения Власова. Сейчас получено математическое обоснование двух численных методов решения задачи Коши для уравнения Власова: метода Ньютона [33] и метода суммарной аппроксимации [34]. Практическая ценность этих методов проходит проверку.

Следующий круг вопросов, на которых нам хотелось бы остановиться и который явился в последнее время источником новых идей и методов в теории дифференциальных уравнений, связан с изучением математических моделей турбулентного движения сплошной среды. Эти модели приводят к задачам для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных со случайной правой частью либо со случайными начальными данными. Здесь следует выделить две группы вопросов: принципиальные математические вопросы, связанные с существованием решений, математических ожиданий, корректной постановкой задач, и группу вопросов, связанных с разработкой конструктивных методов решения. Определенные успехи достигнуты в двух этих направлениях.

Для математического обоснования широко употребляемого в теории турбулентности понятия «осреднения по всем решениям» большую роль сыграло введенное Ч. Фояшем, Г. Проди в 1972 г. понятие статистического решения дифференциального уравнения. На важность этого понятия для теории турбулентности, как известно, было указано А. Н. Колмогоровым в 1978 г. Поясним понятие статистического решения на простом примере.

Рассмотрим уравнение эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \quad u|_{t=0} = u^0, \tag{3}$$

где A — некоторый дифференциальный оператор (вообще говоря, нелинейный). Пусть M — множество, в котором ищется решение уравнения (3). (Например, $M = L^2(R^n)$, $M = W_1^l(\Omega)$ и т. д.) Пусть S^t — оператор, который ставит в соответствие элементу $u^0 \in M$ значение решения уравнения (3) в момент времени t. Зададим n неотрицательных чисел α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

и пусть u_i^0 — фиксированные функции из множества M. Каждому непрерывному фунционалу Φ, заданному на M, можем поставить в соответствие число $\mu^t(\Phi)$, вычисляемое по правилу

$$\mu^t(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(S^t(u_i^0)),$$

т. е. $\mu^t(\Phi)$ — среднее значение функционала Φ на решениях $S^t(u_i^0)$. Отображение $\Phi \to \mu^t(\Phi)$ линейно по Φ, удовлетворяет условию: $\mu^t(\Phi) \geqslant 0$ при $\Phi \geqslant 0$ и непрерывно по Φ; если $\sup_{u \in M} |\Phi_m(u)| \to 0$ при $m \to \infty$, то $\mu^t(\Phi_m) \to 0$. Поэтому отображение $C(M) \to R^1$: $\Phi \to \mu^t(\Phi)$ (здесь $C(M)$ — множество всех непрерывных функционалов на M) задает некоторую меру μ^t на M (меру Радона). Эта мера, рассматриваемая как функция t, и является примером статистического решения уравнения (3). В рассматриваемом примере мера дискретна, т. е. сосредоточена на конечном множестве функций $\{S^t(u_i^0),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, однако существуют более сложные примеры статистических значений.

Оказывается, что статистическое решение удовлетворяет функциональному уравнению, которое в простейшем случае имеет вид

$$\mu^t(\Phi) - \mu^0(\Phi) = \int_0^t d\tau \mu^\tau (\delta\Phi(A)), \ t > 0, \tag{4}$$

где

$$\delta\Phi(A)(u) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi(u + \varepsilon A(u))|_{\varepsilon=0}.$$

Если уравнение (4) выполнено для всех функционалов, для которых $\delta\Phi(A(u)) \in C(M)$, то μ^t — статистическое решение.

Уравнение (4) для статистических решений имеет решение даже тогда, когда решение исходного эволюционного уравнения не единственно и оператора S^t построить нельзя. Для уравнения Навье—Стокса статистические решения были введены и изучены Фояшем [35]. Ряд интересных результатов по теории статистических решений получен в [36—39].

Сейчас разработаны [39] методы доказательства существования статистических решений для эволюционных уравнений весьма общего вида (включая такие уравнения, как уравнения Навье—Стокса, Власова, нелинейное волновое уравнение), причем предложенное в [39] обобщение понятия статистического решения позволяет доказывать существование математических ожиданий от функционалов, определяемых по значениям решения в разные моменты времени.

Существенно отметить, что большинство полученных в теории статистических решений результатов относится к теоремам существования решения задачи Коши для таких решений. Грубо говоря, это эквивалентно доказательству существования решения задачи Коши для бесконечной цепочки моментных уравнений в традиционном подходе теории турбулентности. Но с физической точки зрения постановка задачи Коши для статистических решений не совсем естественна, так как начальная мера, как правило, бывает неизвестна.

Для физики важно знать существование статистических решений, устойчивых относительно малых возмущений уравнения. Как установлено в [40, 41], такими устойчивыми относительно малых возмущений уравнения решениями будут аналоги меры Гиббса — так называемые состояния Кубо—Мартина—Швингера.

Особенно важно разработать практические методы вычисления средних по таким мерам. В статистической физике для этих целей служит аппарат функций Грина. Было бы весьма желательным получить обобщение этого аппарата для эволюционных уравнений в частных производных.

В этом направлении получен ряд предварительных результатов для модельных задач, связанных с нелинейным волновым уравнением [42, 43].

Общая проблема построения аналогов меры Гиббса для систем, описываемых эволюционным дифференциальным уравнением в частных производных, является одной из актуальных и интересных задач современной теории дифференциальных уравнений.

В последнее время в математической физике интенсивно развивается новое направление, связанное с изучением нестационарных диссипативных структур. Такие структуры встречаются при исследовании нелинейных процессов в задачах астрофизики, физики атмосферы и океана, ядерной физики, единой теории поля, при исследовании математических моделей активных биологических сред и др. Изучению стационарных диссипативных структур посвящены многочисленные работы, обзор которых можно найти в книгах И. Пригожина с соавторами [44, 45]. Одним из примеров нестационарных диссипативных структур является эффект T-слоя в магнитной гидродинамике (см. обзоры [46—49]), обнаруженный сначала в вычислительном эксперименте и затем подтвержденный в результате ряда физических экспериментов.

Простейшая математическая модель, описывающая диссипативные структуры,— это задача Коши для уравнения

$$\partial_t T = \partial_x (k(T)\partial_x T) + Q(T), \ t > 0, \ x \in R^1,$$
$$T(0, x) = T_0(x).$$

(Это уравнение описывает, например, процессы электронной теплопроводности и горение среды с выделением тепла.)

В типичных случаях

$$k(T) = k_0 T^\sigma, \ Q(T) = q_0 T^\beta; \ k_0, \ \sigma, \ q_0, \ \beta > 0.$$

В зависимости от значений параметров β и σ существуют, как показано в [46, 50—56], различные режимы горения среды: при $\beta > 1$ может развиваться режим горения с обострением, когда за конечное время t_f температура неограниченно возрастает

1) либо во всем пространстве (если $1 < \beta < \sigma + 1$), HS — режим;

2) либо в конечном объеме (если $\beta = \sigma + 1$), S — режим;

3) либо только в одной точке среды (если $\beta > \sigma + 1$), LS — режим.

Обнаружено парадоксальное явление локализации процесса горения в S- и LS-режимах на определенных пространственных масштабах (на фундаментальной длине L_T). В S-режиме ($\beta = \sigma + 1$)

$$L_T = 2\pi\sigma^{-1}(\sigma + 1)^{1/2} k_0^{1/2} q_0^{-1/2},$$

L_T зависит от свойств среды (k_0, q_0, σ_0). В LS-режиме ($\beta > \sigma + 1$) L_T зависит еще и от амплитуды начального возмущения ($T_{0m} = \max\limits_x |T_0(x)|$ и от размера области его задания a).

Условие возникновения локализации горения в LS-режиме имеет пороговый характер:

1) существует такое число $L_T^* = L_T^* (T_{0m}, \sigma, \beta, k_0, q_0)$ («резонансная длина»), что при $a > L_T^*$ в среде возникает горение в режиме с обострением, локализованное в области с диаметром $L_T \leqslant L_T^*$, где

$$L_T^* = d T_{0m}^{-[\beta - (\sigma+1)]/2}, \ d = \pi \sqrt{2(\beta + \sigma + 1) k_0 / \sigma(\beta - 1) q_0}.$$

Локализация существует конечное время до момента обострения

$$t_f = (\beta + \sigma + 1)/[(\sigma + 2)(\beta - 1) q_0 T_{0m}^{\beta-1}].$$

2) Если же $a < L_T^*$, то возможны два случая: а) при $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$ локализация наступает через конечное время $t = t^*$ на фундаментальной длине, зависящей от энергии начального возмущения $W_0 = T_{0m} a$, так что

$$L_T \leqslant d^{2/(\sigma+3-\beta)} W_0^{-[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+3-\beta)};$$

б) при $\beta > \sigma + 3$ возмущение затухает и выходит на автомодельный режим Зельдовича—Компанейца.

Наличие в рассматриваемой нелинейной задаче характерного пространственного масштаба (фундаментальной длины L_T) и характерного временного масштаба (времени обострения t_f) показывает, как существен анализ нелинейных процессов на модельных задачах для правильного выбора пространственно-временной сетки при дискретной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений.

Результаты исследования на модельных уравнениях локализации горения с помощью новых теорем сравнения [57] распространены на среды с более общей зависимостью $k(T)$ и $Q(T)$, нежели степенная. Оказалось, что локализация имеет место и в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности [58] и в среде с распределенными параметрами [59]. Выяснен ряд особенностей локализации в многомерных задачах [60].

При анализе локализации горения в среде в виде структур большую роль играют автомодельные задачи. В связи с этим в [61] групповыми методами были выделены инвариантные решения, в том числе решения, допускающие режимы с обострением. В частности, для рассматриваемой задачи горения был получен [61] тип инвариантно-групповых решений. Частные случаи инвариантно-групповых решений ранее были исследованы С. Ли и Л. В. Овсянниковым. Исследование новых автомодельных решений начато в [62]. На основе изучения особенностей протекания процессов с обострением удалось сформулировать условия объединения простых структур в сложные и установить закономерности усложнения организации нелинейной диссипативной сплошной среды [46, 51, 55, 59, 54, 63—65].

Литература

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач.— Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 4, с. 739—740.

2. Камынин Л. И. О единственности решения краевой задачи с граничными условиями Самарского для параболических уравнений 2-го порядка.— ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 6, с. 1480—1488.

3. Камынин Л. И. Единственность краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 1, с. 39—49.

4. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 2, с. 294—304.

5. Ионкин Н. И. Об устойчивости одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1279—1283.

6. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечным краевым условием.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1284—1295.

7. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана /Пер. с англ. Э. А. Гурмузовой и др. Под ред. Р. Г. Баранцева.— М.: Мир, 1978.— 495 с.

8. Маслова Н. Б., Чубенко Р. П. О решениях нестационарного уравнения Больцмана.— Вестник ЛГУ, 1973, № 19, с. 100—105.

9. Nishida T., Imai K. Global solution to the initial value problem for the non-linear Boltzmann equation.— Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 1976, vol. 12, N 1, p. 229—239.

10. Ukai S. On the existence fo global solution of mixed problem for nonlinear Boltzmann equation.— Proc. Japan Acad., 1974, vol. 50, N 3, p. 179—184.

11. Ukai S. Global solution of the Boltzmann equation in a whole space.— Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1976, vol. 282, N 6, Ser. A, p. A317—A320.

12. Ukai S., Point N., Ghidvuche H. Sur la solution globale du probleme mixte de l'equation de Boltzmann nonlineaire.— J. Math. Pure et Appl., 1978, vol. 57, N 3, p. 203—229.

13. Shizuta I., Asano K. Global solution of the Boltzmann equation in a bounded convex domain.— Proc. Japan Acad., 1977, vol. 53, N 1, Ser. A, P. 3—5.

14. Kaniel S., Shinbrot M. The Boltzmann equation. I. Uniqueness and Local Existence.— Com. Math. Phys., 1978, vol. 58, N 1, p. 65—84.

15. Nishida T. Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation.— Com. Math. Phys., 1978, vol. 61, N 2, p. 119—148.

16. Kawashima S., Matsumura A., Nishida T. On the Fluid-dynamical Approximation to the Boltzmann equation at the level of the Navier-Stokes equation.— Com. Math. Phys., 1979, vol. 70, N 2, p. 97—124.

17. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа.— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 291—318.

18. Batt J. Ein Existenzbeweis fur die Vlasov-Gleichung der Stellardynamik bei gemittelter Dichte.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1963, Bd. 13, S. 296—308.

19. Batt J. Global symmetric solution of the initial value problem of stellar dynamics.— J. of Diff. Equ., 1977, vol. 25, N 3, p. 342—363.

20. Batt J. Ein Existenzbeweis fur die Boltzmann-Vlasov Gleichung im eindimensionalen Tall.— Berichte der Kernfor-schuganlage, 1963, Jul, 126-MA.

21. Kurth R. Das Aufanswertproblem der stellardynamik.— Z. Astroph., 1952, vol. 30, S. 213—229.

22. Neunzert H., Wick J. Theoretishe und numerishe Ergebnisse fur nichtlinearen Vlasov-Gleichung.— Lecture Notes in Math., 1972, vol. 267.— 339 s. /Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.

23. Rautmann R. Zur globalen Losung der Vlasovschen Gleichung fur Medien geringer Dichte mit relativistischer Korrekrur.— Z. Angew. Math., Mech., 1968, vol. 48, S. 276—279.

24. Ernst Horst. Zur Existenz globales klassicher Losungen des Anfangswertproblems der stellardynamik. Dim, 1978.

25. Ukai S., Akake T. On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation.— Aaha J. Math., 1978, vol. 15, p. 245—261.

26. Ulner R., Kaurerlauten H. On the Existence theorem far the unmodified Vlasov equation.— Meth. in the Appl. Sci., 1979, vol. 1, p. 530—554.

27. Добрушин Р. Л. Уравнение Власова.— Функц. анализ и его приложения, 1979, т. 13, вып. 2, с. 48.

28. Braun W., Hepp K. The Vlasovdynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles.— Com. Math. Phys., 1977, vol. 56, N 2, p. 101—113.

29. Арсеньев А. А. Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова.— ЖВМ и МФ, 1975, т. 15, № 1, с. 136—147.

30. Арсеньев А. А. Существование и единственность классического решения системы уравнений Власова.— ЖВМ и МФ, 1975, т. 15, № 5, с. 1344—1349.

31. Арсеньев А. А. О существовании обобщенных и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1253—1266.

32. Арсеньев А. А. Построение турбулентной меры для системы уравнений Власова.— Мат. сб., 1977, т. 102 (144), № 1, с. 13—32.

33. Есикова Н. Б. Расчет эволюции пучка электронов в плазме в цилиндрической области: Препринт № 68.— М.: ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша, 1979.— 14 с.

34. Богомолов С. В. О сходимости и применении метода суммарной аппроксимации для системы уравнений Власова: Препринт № 162.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 18 с.; Богомолов С. В. О сходимости метода суммарной аппроксимации для уравнения Больцмана: Препринт № 184.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 12 с.

35. Foias C. Statistical study of Navier—Stokes equations. I—II.— Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 1972, vol. 48, p. 219—348; 1973, vol. 49, p. 9—123.

36. Visik M. I., Foursikov A. V. Solutions satatistiques homogenes des systemes differentielles paraboliques et du systeme de Navier-Stokes.— Ann. Sci. norm. super., Pisa, 1974, vol. 4, N 3, p. 531—576.

37. Вершик А. М., Ладыженская О. А. Об эволюции мер, определяемой уравнениями Навье—Стокса и о разрешимости задачи Коши для статистического уравнения Э. Хопфа.— Записки научных семинаров ЛОМИ, 1976, т. 59, с. 3—23.

38. Арсеньев А. А. О существовании стохастических и статистических решений у нелинейных уравнений.— В сб.: Проблемы математической физики и вычислительной математики.— М.: Наука, 1977, с. 25—34.

39. Арсеньев А. А. О статистических решениях системы уравнений Навье—Стокса.— Мат. сб., 1979, т. 110, № 1, с. 35—50.

40. Haag R., Kastler D., Trych-Pohlmeyer E. Stability and equilibrium states.—Com. Math. Phys., 1974, vol. 38, № 2, p. 173—193.

41. Aizenman M., Gallavotti G., Lebowitz J. L. Stability and Equilibrium States of Infinite Classical Systems.— Com. in Math. Phys., 1976, vol. 48, N 1, p. 1—14.

42. Арсеньев А. А. О единственности состояний Кубо—Мартина—Швингера для классических динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством: Препринт № 90.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 18 с.

43. Арсеньев А. А. О состояниях Кубо—Мартина—Швингера классических динамических систем: Препринт № 96.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 26 с.

44. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций /Пер. с англ. Н. В. Вдовиченко и В. А. Онищука. Под ред. Ю. А. Чизмаджева.— М.: Мир, 1973.— 280 с.

45. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации /Пер. с англ. В. Ф. Пастушенко. Под ред. Ю. А. Чизмаджева.— М.: Мир, 1979.— 512 с.

46. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. *N* и *S* режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— Прикладн. механ. и техническая физ., 1977, № 1, с. 3—23.

47. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.— Вестник АН СССР, 1979, № 5, с. 38—49.

48. Самарский А. А., Попов Ю. П.— Вычислительный эксперимент в физике.— Международный ежегодник «Наука и человечество». М.: Знание, 1975.— 448 с.

49. Самарский А. А. Численный эксперимент в физике плазмы.— В сб. Проблемы теории плазмы. Киев: Наукова Думка, 1976, с. 262—271. (Труды Международной конференции по теории плазмы, Киев, 1974).

50. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324; Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения. Препринт № 74.— М.: ИПМ АН СССР, 1976.— 67 с.

51. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды: Препринт № 106.— М.: ИПМ АН СССР, 1977.— 80 с.

52. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—623.

53. Samarskii A. A., Kurdjumov S. P., Zmitrenko N. V., Mikhailov A. P. Nonlinear processes in dense plasma and peculiarities of the «aggravation regimes» thermodynamics.— Technology of inertial confinement experiments (Technical Document IAEA — 200). Vienna, 1977, p. 185—200.
Аналогичный текст на русском языке:
Самарский А. А., Курдюмов С. П., Змитренко Н. В., Михайлов А. П. Нелинейные процессы в плотной плазме и особенности термодинамики режимов с обострением: Препринт № 109.— М.: ИПМ АН СССР, 1976.— 35 с.

54. Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. Инерция тепла и диссипативные структуры.— В сб. научных трудов ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша. Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами /Под ред. А. А. Самарского. М.: ИПМ АН СССР, 1980.—227 с.

55. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации: Препринт № 29.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 64 с.

56. Самарский А. А., Курдюмов С. В. Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС.— Труды кафедры волновой и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ. М.: МГУ, 1979, № 3, с. 18—28.

57. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. 1) Об одном подходе к сравнению решения параболических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1449—1459. 2) Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной: Препринт № 21.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 60 с.

58. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. 1) О сравнении решений параболических уравнений.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 3, с. 586—589. 2) Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью: Препринт № 28.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 78 с. 3) О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений: Препринт № 161.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 35 с.

59. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. 1) Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587—591. 2) Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами: Препринт № 16.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 79 с. 3) Устойчивость собственных функций и эффекты переноса в неоднородной диссипативной среде: Препринт № 16.— М.: ИПМ АН СССР, 1980.— 27 с.

60. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. 1) Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836—839. 2) Взаимодействие тепловых структур: Препринт № 77.— М.: ИПМ АН СССР, 1978.— 78 с.

61. Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником: Препринт № 31.— М.: ИПМ АН СССР, 1980.— 24 с.

62. Дородницын В. А. 1) Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком: Препринт № 57.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.— 31 с. 2) О инвариантных решениях одномерной нестационарной магнитной гидродинамики с конечной проводимостью: Препринт № 143.— М.: ИПМ АН СССР, 1976.— 53 с.

63. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.

64. Курдюмов С. П. Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением. Дис... докт. физ.-мат. наук. М., Ин-т прикладной математики АН СССР, 1979.

65. Samarskii A. A. Numerical simulation in plasma physics. (Report a Colloque international sur les methodes de calcul scientifique et technique, France. Versailles, 1979). /Springer Verlag, in print.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша

Поступила в редакцию 27 мая 1979 г.