141

ПРЕПР.
Г-61

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ СБАЛАНСИРОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ В МНОГОМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Препринт № 141 за 1980 г.

Москва.

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается вариационный подход к конструированию вычислительных алгоритмов в гидродинамике и газовой динамике. В работе вычислительные алгоритмы трактуются как дискретные по пространству и времени модели сплошной среды.

Вариационный подход к построению дискретных моделей основан на аппроксимации функционала действия по Гамильтону и ряда условий, имеющих характер связей, разностными по пространственным переменным выражениями. Последующее использование вариационного формализма приводит к дифференциально-разностным уравнениям (дифференциальным по времени и разностным по пространству), аппроксимирующим уравнения газовой динамики.

Показано, что при достаточно общих требованиях к способу аппроксимации функционала получающиеся дифференциально-разностные уравнения будут консервативными и, кроме того, аппроксимации различных уравнений, образующих систему уравнений газовой динамики, оказываются в определенном смысле взаимосогласованными ("сбалансированными"). Вариационный подход позволяет получать сбалансированные дискретные модели, имеющие любой, наперед заданный порядок аппроксимации на достаточно гладких решениях.

Переход от систем обыкновенных дифференциальных уравнений к разностным уравнениям осуществляется заменой производных по времени конечными разностями.

Приведены примеры расчетов двумерных течений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Введение	4
§I.	Дискретизация пространственной области	7
§2.	Аппроксимация лагранжиана и условий типа ограничений	9
§3.	Вариационный формализм и дифференциально-разностные уравнения	11
§4.	Закон сохранения импульса	13
§5.	Закон сохранения энергии. Свойство сбалансированнооти дискретных моделей	15
§6.	Различные формы представления дискретных моделей.	17
§7.	Аппроксимация и искусственная вязкость	19
§8.	Двухслойные полностью консервативные разностные схемы	20
§9.	Примеры численных расчетов	24
	Литература	30

ВВЕДЕНИЕ

При математической формулировке задач динамики жидкостей и газов, как правило, делается предположение о том, что изучаемая среда сплошным образом заполняет занимаемое пространство, а все физические характеристики этой среды почти всюду являются непрерывными и достаточно гладкими функциями точек пространственной области. Такая идеализация принимается, в частности, для того, чтобы использовать хорошо развитый аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

В приближении сплошной среды задачи газовой динамики сводятся к системам нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, для подавляющего большинства прикладных задач такое сведение, вследствие фактического отсутствия аналитических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, оказывается малоэффективным.

Более того, на сегодняшний день не доказаны даже теоремы существования и единственности, которые гарантировали бы непротиворечивость и полноту дифференциальной модели.

Широкое использование континуального приближения в практике научных исследований основывается, на наш взгляд, в конечном счете на разумности принципов, положенных в основу вывода соответствующих дифференциальных уравнений.

Отсутствие хорошо развитого аналитического аппарата исследования задач газовой динамики приводит к тому, что практически единственным универсальным средством их решения оказываются численные методы, ориентированные на использование высокопроизводительных ЭВМ. Современные же цифровые вычислительные устройства оперируют конечными массивами чисел, так что вводимая в ЭВМ и получаемая в процессе численного решения информация по необходимости является ограниченной.

Модели, среды, полностью определяемые конечным числом вычисляемых параметров естественно назвать дискретными. Таким образом необходимость использования ЭВМ диктует необходимость построения и изучения дискретных моделей сплошной среды. Так метод конечных разностей, который в основном и используется для численного решения задач газовой динамики, состоит в замене непрерывной среды некоторым ее дискретным аналогом. При этом физическое пространст-

во аппроксимируется разностной сеткой, а дифференциальные уравнения, описывающие исходную задачу – системой алгебраических уравнений (разностной схемой).

Можно сказать, что любой разностной схеме соответствует некоторая дискретная модель сплошной среды. Очевидно, что такая модель будет тем лучше воспроизводить процессы в сплошной среде, чем точнее она будет отражать наиболее характерные ее свойства. Так, например, консервативные разностные схемы [1], [2], [3], [4], [5], для которых имеют место разностные аналоги основных законов сохранения, позволяют обеспечить достаточную точность расчета разрывных решений. Полностью консервативные схемы [2], для которых дополнительно выполняются балансные соотношения между определяющими физическими величинами, могут успешно использоваться даже на грубых сетках.

Вопросы, связанные с построением дискретных моделей сплошной среды, обладающих требуемыми свойствами, представляют значительный интерес как с чисто теоретической, так и практической точек зрения.

Как правило, дискретные модели в механике сплошных сред получают исходя из соответствующих континуальных моделей, задаваемых дифференциальными или интегральными уравнениями. Однако, на наш взгляд, более последовательным было бы отроить дискретные модели исходя непосредственно из тех фундаментальных физических принципов, которые кладутся в основу вывода этих уравнений и, помимо того, устанавливают непосредственную связь задач механики сплошной среды с задачами динамики механических систем с конечным числом степеней свободы.

Один из наиболее общих и фундаментальных подходов к исследованию проблем теоретической и математической физики основан на использовании вариационных принципов. Классическими примерами могут служить закон минимальности энергии для стационарных механических систем [6] и закон наименьшего действия для динамических систем с конечным числом степеней свободы [7]. Из соответствующего вариационного принципа [8] могут быть получены уравнения электродинамики, известны вариационные формулировки для диссипативных явлений [9].

Существуют вариационные принципы, описывающие и гидродинами-

ческое движение сплошной среды [10].

Одной из привлекательных черт вариационного подхода является вполне определенная связь важнейших свойств процессов с формальными требованиями к виду вариационного функционала [11]. В частности законы сохранения импульса и энергии обусловлены отсутствием явной зависимости лангранжиана от пространственных координат или времени, интеграл адиабатичности следует из специального вида одного из уравнений связи и т.д. Дополнительное достоинство вариационных принципов заключается в их инвариантности относительно выбора систем координат.

В работах [12, 13] вариационный принцип, аналогичный принципу наименьшего действия по Гамильтону, было предложено положить в основу построения дискретных моделей сплошной среды. Вариационный подход к построению дискретных моделей основан на аппроксимации функционала действия и ряда условий, носящих характер связей [13], разностными по пространственным переменным выражениями. Последующее использование вариационного формализма приводит к дифференциально-разностным уравнениям (дифференциальным по времени и разностным по пространству), аппроксимирующим уравнения газовой динамики.

В настоящей работе показано, что при достаточно общих требованиях к способу аппроксимации соответствующего функционала, получающиеся дифференциально-разностные уравнения будут консервативными, и, кроме того, аппроксимации различных уравнений, образующих систему уравнений газовой динамики, оказываются в определенном смысле взаимносогласованными.

Дискретные по пространственным переменным модели сплошной ореды, описываемые подобными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, названы сбалансированными. Показано, что вариационный подход позволяет получать сбалансированные дискретные модели, имеющие любой, наперед заданный порядок аппроксимации на достаточно гладких решениях.

Следует отметить, что изучение свойств полученных дифференциально-разностных уравнений представляет самостоятельный интерес ввиду потенциальной возможности их численного интегрирования с помощью специальных методов [14, 15].

В работе показано, что при выборе соответствующего уравнения состояния, в предельном случае бусконечно-большой скорости,

звука, эти дифференциально-разностные уравнения описывают также и модель несжимаемой жидкости.

Переход от систем обыкновенных дифференциальных уравнений к разностным схемам осуществляется заменой производных по времени конечными разностями. При этом, в классе двухслойных разностных схем, получаемых на основе сбалансированных моделей, нетрудно удовлетворить условиям полной консервативности.

В работе, в качестве примера, из простейшей сбалансированной дискретной модели среды получено многопараметрическое семейство разностных схем для расчета двумерных плоскосимметричных и осесимметричных течений в поле потенциальных сил. Схемы имеют второй порядок аппроксимации по проотранственным переменным; указана область значений параметров, при которых полученные схемы обладают свойством полной консервативности. Кратко затрагивается вопрос о выборе искусственной вязкости.

Разработанные алгоритмы проверялись на точных и приближенных аналитических решениях тестовых двумерных задач.

Настоящая работа является по существу продолжением работы [24], поэтому в ней не удалось обойтись без ссылок на некоторые ранее полученные формулы. Номера формул в таких ссылках состоят из двух чисел, записанных через десятичную точку, первое из которых единица, а второе – порядковый номер формулы в [24].

§I. Дискретизация пространственной области

Пусть $\mathcal{D}(t_0)$ – область, занимаемая жидкой средой в плоскости эйлеровых переменных (x, y) в момент времени t_0 и пусть на части границы g_I области $\mathcal{D}$ задано противодавление $P^* = P(x, y)$, а на остальной части границы g_2 – условие непротекания [24] (рис.I). Без ограничения общности полагая область $\mathcal{D}(t_0)$ одно-

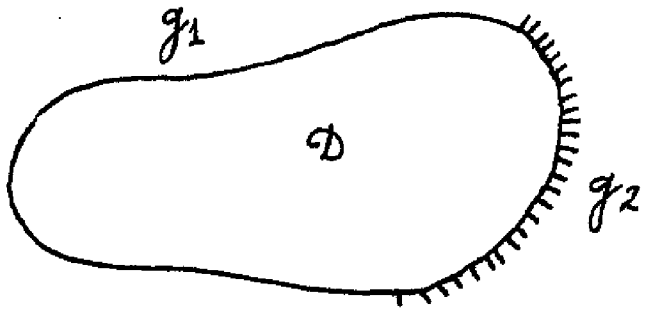

Рис.I

связной, обозначим через $\mathcal{F}$ непрерывное вместе с частными про-

изводными до третьего порядка включительно, взаимнооднозначное преобразование, переводящее $\mathcal{D}(t_0)$ в область Ω, имеющую форму единичного квадрата в плоскости (α, β). Предположим также, что якобиан обратного преобразования $\mathcal{J}^{-1}$ удовлетворяет следующим условиям.

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\alpha,\beta)} > 0 \; ; \; (\alpha,\beta) \in \Omega \; ; \; \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\alpha,\beta)} \equiv 0 \; ; \; (\alpha,\beta) \notin \Omega \qquad (1)$$

Связывая координаты α, β с частицами жидкости, примем их за лагранжевы координаты среды.

Введем на плоскости (α, β) регулярную прямоугольную разностную сетку $\overline{\omega}_h : \{(i-1)h_\alpha ; (j-1)h_\beta ; i=0, \pm 1, \ldots, \pm N, \pm\infty ; j=0, \pm 1, \ldots, \pm M, \ldots, \pm\infty ; h_\alpha = 1/(N-1) ; h_\beta = 1/(M-1)$. Обозначим через $\overline{\omega}$ множество индексов (i, j), соответствующих узлам этой сетки, а через $\mathcal{H}_{\overline{\omega}}$ – множество сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$. Скорости и координаты частиц жидкости, а также значения потенциала массовых сил будем относить к узлам сетки $\overline{\omega}_h$ и обозначать $u_{ij} ; v_{ij} ; w_{ij} ; x_{ij} ; y_{ij} ; \varphi_{ij} ; (i,j) \in \overline{\omega}$

Вследствие соглашения (1) для координат $x_{ij} ; y_{ij}$ должны выполняться следующие условия, "окаймления".

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_{iM} ; & y_{ij} &= y_{iM} ; & j &> M \\ x_{ij} &= x_{i1} ; & y_{ij} &= y_{i1} ; & j &< 1 \\ x_{ij} &= x_{Nj} ; & y_{ij} &= y_{Nj} ; & i &> N \\ x_{ij} &= x_{1j} ; & y_{ij} &= y_{1j} ; & i &< 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Дифференцирование (2) по времени приводит к аналогичным условиям окаймления поля скоростей.

Наряду с сеткой $\overline{\omega}_h$ рассмотрим также разностную сетку ω_h узлами которой являются центры ячеек сетки $\overline{\omega}_h$, т.е.

$$\omega_h : \{(i-\tfrac{1}{2})h_\alpha ; (j-\tfrac{1}{2})h_\beta ; i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N, \ldots \pm\infty ; j = 0, \pm 1, \ldots, \pm M, \ldots, \pm\infty\}$$

Все термодинамические величины, характеризующие среду: ρ, P, ε, $\tilde{\rho}$ – отнесем для определенности у к узлам сетки ω_h Обозначая через $\mathcal{H}_\omega$ множество сеточных функций, определенных на ω_h, через ω – множество индексов, (i, j), соответствующих ω_h. Последнее можно записать в виде: $\rho_{ij} ; \varepsilon_{ij} ; P_{ij} ; \tilde{\rho}_{ij} \in \mathcal{H}_\omega, (i,j) \in \omega$

Значения термодинамических величин в узлах сетки ω_h не

принадлежащих области Ω доопределим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&P_{ij} = P^*_{Nj}\,; \quad i>N; \quad P_{ij} = P^*_{0j}\,; \quad i<0; \quad 0\le j\le M\\
&P_{ij} = P^*_{iM}\,; \quad j>M; \quad P_{ij} = P^*_{i0}\,; \quad j<0; \quad -\infty<i<+\infty\\
&\tilde{\rho}_{ij} \equiv 0\,; \quad \rho_{ij} \equiv 0; \quad \varepsilon_{ij} \equiv 0\,; \quad 0>i>N; \quad 0\le j\le M\\
&\tilde{\rho}_{ij} \equiv 0\,; \quad \rho_{ij} \equiv 0\,; \quad \varepsilon_{ij} \equiv 0\,; \quad 0>j>M; \quad -\infty<i<+\infty
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где P^* обозначает внешнее давление, являющееся функцией координат x, y на участке границы g_I. На части границы, g_2 области $\mathcal{D}$ где задано условие непротекания, P^* будем полагать равным давлению в ближайшем внутреннем приграничном узле сетки ω_h.

Для каждого узла сетки $\bar{\omega}_h$, лежащего на границе g_2 определим составляющие вектора единичной нормали n^x_{ij}; n^y_{ij}

§2. Аппроксимация лагранжиана и условий типа ограничений

Аппроксимируем функционал $L_\mathcal{D}$ (I.I'), взятый без учета членов, содержащих граничные условия, разностям по пространственным переменным выражением:

$$
\mathcal{L}_h = \sum_{(i,j)\in\omega} \langle \Lambda \rangle_{ij} h_\alpha h_\beta = \sum_{(i,j)\in\omega} \langle \hat{\rho} \rangle_{ij} \left[\frac{\langle u^2\rangle_{ij} + \langle v^2\rangle_{ij} + \langle w^2\rangle_{ij}}{2} - \langle \varepsilon \rangle_{ij} - \langle \varphi \rangle_{ij} \right] h_\alpha h_\beta \tag{4}
$$

где угловыми скобками обозначены некоторые вообще говоря отличные друг от друга линейные функционалы от соответствующих сеточных функций, т.е.

$$
\langle f \rangle_{ij} = F_f^{ij}[f]\,; \quad (i,j)\in\omega\,; \quad f\in \mathcal{H}_\omega \vee \mathcal{H}_{\bar{\omega}}
$$

$$
F_f^{ij}[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda F_f^{ij}[\varphi] + \mu F_f^{ij}[\psi]\,; \quad \varphi,\psi \in \mathcal{H}_\omega \vee \mathcal{H}_{\bar{\omega}}\,; \quad \lambda,\mu\in R^1
$$

Уравнение неразрывности (I.4) и термодинамическое тождество (I.5) также аппроксимируем функциональными равенствами.

$$
\langle \rho \rangle_{ij} \langle \Delta \rangle_{ij} = \langle \tilde{\rho} \rangle_{ij}\,; \quad (i,j)\in\omega \tag{5}
$$

$$
d\langle \varepsilon \rangle_{ij} = -\frac{\langle P \rangle_{ij}}{\langle \tilde{\rho} \rangle_{ij}} d\langle \Delta \rangle_{ij}\,; \quad (i,j)\in\omega \tag{6}
$$

От линейных функционалов F_f^{ij} потребуем, чтобы они, во-первых, аппроксимировали бы с заданным порядком точности соответствующие величины и, во-вторых, чтобы линейные уравнения $\langle \rho \rangle_{ij} = f_{ij}$

; $\langle \varepsilon \rangle_{ij} = \varphi_{ij}$ могли быть однозначно разрешимы при любых правых частях из множеств $\mathcal{H}_\omega$ и $\mathcal{H}_{\bar\omega}$

Помимо функционалов, входящих в (4)-(6), введем выражения $\left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}; \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \beta} \right\rangle_{ij}; \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}; \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij}; \ (i,j) \in \omega$ такие представляющие собой линейные функционалы от функций $x^\ell_{ij}; y_{ij} \in \mathcal{H}_{\bar\omega}$ аппроксимирующие с заданным порядком заключенные в угловые скобки производные, и потребуем выполнения следующих условий согласованности аппроксимаций:

$$\langle \Delta \rangle_{ij} = \frac{1}{\ell}\left[\left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} - \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}\right]; \ (i,j) \in \omega \tag{7}$$

$$\frac{\partial \langle U^2 \rangle_{ij}}{\partial U^2_{kn}} \equiv \frac{\partial \langle V^2 \rangle_{ij}}{\partial V^2_{kn}} \equiv \frac{\partial \langle W^2 \rangle_{ij}}{\partial W^2_{kn}} \equiv \frac{\partial \langle \varphi \rangle_{ij}}{\partial \varphi_{kn}}; \ (k,n) \in \bar\omega \tag{8}$$

Отметим некоторые, наиболее существенные для дальнейшего изложения, свойства введенных функционалов

$$\sum_{k,n} \frac{\partial}{\partial f_{kn}} \left\{ F^{ij}_f[f] \right\} \psi_{kn} \equiv F^{ij}_f[\psi]; \ (i,j) \in \omega; \ (k,n) \in \omega \vee \bar\omega$$

$$\sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{\partial}{\partial y_{kn}} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \equiv 0; \ \sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{\partial}{\partial y_{kn}} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \equiv 0 \tag{9}$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial X_{kn}} \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} = \ell \sum \frac{\partial}{\partial X^\ell_{kn}} \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} X^{\ell-1}_{kn} = \ell(\ell-1) \left\langle \frac{\partial X^{\ell-1}}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \tag{10}$$

$$(i,j) \in \omega$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial X_{kn}} \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} = \ell \sum \frac{\partial}{\partial X^\ell_{kn}} \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} X^{\ell-1}_{kn} = \ell(\ell-1) \left\langle \frac{\partial X^{\ell-1}}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \tag{11}$$

Тождество (9) является прямым следствием линейности функционалов $F^{ij}_f[f]$, а равенства (10), (11) вытекают из (9) и требования аппроксимации выражениями $\left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}; \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \beta} \right\rangle_{ij}; \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}; \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij}$ соответствующих производных, заключающего в том, что

$$\left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \equiv 0; \ \left\langle \frac{\partial X^\ell}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \equiv 0; \ \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \equiv 0; \ \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \equiv 0; \ (i,j) \in \omega$$

если $\quad X^\ell_{kn} \equiv const, \quad y_{kn} = const; \ (k,n) \in \bar\omega$

Введем обозначения:

$$V_{ij} = \langle \Delta \rangle_{ij} h_\alpha h_\beta; \qquad m_{ij} = \langle \hat\rho \rangle_{ij} h_\alpha h_\beta$$

$$\delta_{ij} = \left[\left\langle \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} - \left\langle \frac{\partial X}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}\right] h_\alpha h_\beta \tag{12}$$

Величина V_{ij} имеет смысл объема лагранжевой ячейки, образованной узлами $(i,j),(i+1,j),(i+1,j+1),(i,j+1)$ сетки $\bar\omega$, в простран-

стве эйлеровых переменных X, Y; величина S_{ij} – смысл площади этой ячейки (при ℓ =I, $S_{ij} \equiv V_{ij}$); Величина m_{ij} может быть интерпретирована как масса среды, заключенной в объеме V_{ij}

Из (7), (I0), (II) следует справедливость тождеств:

$$\sum_{(k,n)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}} \equiv 0 \; ; \; \sum_{(k,n)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}} \equiv (\ell-1)\, S_{ij} \; ; \; (i,j)\in\omega$$

В новых обозначениях разностный лагранжиан $\mathcal{L}_h$ и условия (5), (6) запишутся соответственно в виде:

$$\mathcal{L}_h = \sum_{(i,j)\in\omega} m_{ij}\left[\frac{\langle u^2\rangle_{ij}+\langle v^2\rangle_{ij}+\langle w^2\rangle_{ij}}{2} - \langle\varepsilon\rangle_{ij} - \langle\varphi\rangle_{ij}\right] \qquad (4\,)$$

$$\langle\rho\rangle_{ij} V_{ij} = m_{ij} \qquad (5')$$

$$d\langle\varepsilon\rangle_{ij} = -\frac{\langle P\rangle_{ij}}{m_{ij}}\, dV_{ij} \qquad (6')$$

Выражения (4)–(6) совместно с уравнением состояния P_{ij} = P(ρ_{ij} , ε_{ij}) и кинематическими соотношениями:

$$u_{ij} = \frac{dx_{ij}}{dt} \; ; \; v_{ij} = \frac{dy_{ij}}{dt} \; ; \; w_{ij} = x_{ij}^{\ell-1}\frac{d\xi_{ij}}{dt} \; ; \; (i,j)\in\bar{\omega} \qquad (I4)$$

определяют некоторую, дискретную по пространственным переменным, модель сплошной среды. Задаваясь различными видами функционалов F_f^{ij} мы будем получать различные дискретные модели.

§3. Вариационный формализм и дифференциально-разностные уравнения

Запишем выражение для первой вариации функционала действия

$$S_h = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_h\, dt$$

$$\delta S_h = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{(i,j)\in\omega} m_{ij}\left\{\frac{\delta\langle u^2\rangle_{ij}+\delta\langle v^2\rangle_{ij}+\delta\langle w^2\rangle_{ij}}{2} - \delta\langle\varepsilon\rangle_{ij} - \delta\langle\varphi\rangle_{ij}\right\} \qquad (I5)$$

Вариации функционалов, входящие (I5) могут быть выражены через вариации δx_{ij} ; δy_{ij} ; $\delta\varphi_{ij}$; δu_{ij} ; δv_{ij} ; δw_{ij} ; $(i,j)\in\bar{\omega}$. Действительно, принимая во внимание термодинамическое тождество (6), закон сохранения массы (5) и вводя обозначение $\langle\eta\rangle_{ij} = V_{ij}/m_{ij}$ получаем:

$$m_{ij}\,\delta\langle\varepsilon\rangle_{ij} = m_{ij}\frac{d\langle\varepsilon\rangle_{ij}}{\partial\langle\eta\rangle_{ij}} \sum_{(k,n)\in\omega}\left(\frac{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}{\partial x_{kn}}\delta x_{kn} + \frac{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}{\partial y_{kn}}\delta y_{kn}\right) =$$

$$= -\langle P\rangle_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar{\omega}}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}}\delta x_{kn} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}}\delta y_{kn}\right) ; \quad (i,j)\in\omega \qquad (I6)$$

Вариации из кинетической и потенциальной энергии выражаются

через вариации координат и скоростей следующим образом:

$$\delta\langle\varphi\rangle_{ij} = \sum_{(k,n)\in\bar\omega}\left[\frac{\partial\langle\varphi\rangle_{ij}}{\partial\varphi_{kn}}\frac{\partial\varphi_{kn}}{\partial x_{kn}}\delta x_{kn} + \frac{\partial\langle\varphi\rangle_{ij}}{\partial\varphi_{kn}}\frac{\partial\varphi_{kn}}{\partial y_{kn}}\delta y_{kn}\right] =$$

$$= \sum_{(k,n)\in\bar\omega}\left[\frac{\partial\langle\varphi\rangle_{ij}}{\partial\varphi_{kn}} f^x_{kn}\delta x_{kn} + \frac{\partial\langle\varphi\rangle_{ij}}{\partial\varphi_{kn}} f^y_{kn}\delta y_{kn}\right] = -F^{ij}_{\varphi}(f^x\delta x) - F^{ij}_{\varphi}(f^y\delta y) \qquad (17)$$

$$\delta\langle u^2\rangle_{ij} + \delta\langle v^2\rangle_{ij} + \delta\langle W^2\rangle_{ij} = \sum_{(k,n)\in\bar\omega}\left[\frac{\partial\langle u^2\rangle_{ij}}{\partial u_{kn}} u_{kn}\delta u_{kn} + \frac{\partial\langle v^2\rangle_{ij}}{\partial v_{kn}} v_{kn}\delta v_{kn} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\langle W^2\rangle_{ij}}{\partial W_{kn}} W_{kn}\delta W_{kn}\right]; \quad (i,j)\in\omega \qquad (18)$$

Требование равенства нулю первой вариации функционала действия $\delta S_h = \delta S_h(\delta x_{ij}; \delta y_{ij}; \delta\varphi_{ij}; \delta u_{ij}; \delta v_{ij}, \delta W_{ij})$; $(i,j)\in\bar\omega$ на любых вариациях δx_{ij}; δy_{ij}; $\delta\varphi_{ij}$, обращающихся в нуль при $t = t_0$ и $t = t_I$, приводят к уравнениям Эйлера-Лангранжа [6]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial u_{ij}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial x_{ij}} - \sum_{(k,n)\in\omega}\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}\frac{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}{\partial x_{ij}} = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial v_{ij}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial y_{ij}} - \sum\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}\frac{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}{\partial y_{ij}} = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial\omega_{ij}}\right) = 0 \qquad (21)$$

Справедливым для всех узлов сетки $\bar\omega_h$, не принадлежащих поверхности g_2. Для точек, находящихся на границе g_2, вариационный формализм приводит к уравнениям, аналогичным (I.10)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial u_{ij}}\right)n^y_{ij} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial v_{ij}}\right)n^x_{ij} - \frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial x_{ij}}n^y_{ij} + \frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial y_{ij}}n^y_{ij} -$$

$$- \sum_{(k,n)\in\omega}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}\frac{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}{\partial x_{ij}}\right\}n^y_{ij} + \sum_{(k,n)\in\omega}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_h}{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}\frac{\partial\langle\eta\rangle_{kn}}{\partial y_{ij}}\right\}n^x_{ij} = 0.$$

Раскрывая входящие в (19)-(21) производные с учетом (16), (17), (18), (8), получаем:

$$M_{ij}\frac{du_{ij}}{dt} - (\varrho-1)M_{ij}\frac{W^2_{ij}}{x_{ij}} - \sum_{(k,n)\in\omega}\langle P\rangle_{kn}\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} - M_{ij}f^x_{ij} = 0 \qquad (19')$$

$$M_{ij}\frac{dv_{ij}}{dt} - \sum_{(k,n)\in\omega}\langle P\rangle_{kn}\frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}} - M_{ij}f^y_{ij} = 0 \qquad (20')$$

$$M_{ij}\frac{d}{dt}(x^{\varrho-1}_{ij}W_{ij}) = 0; \quad (i,j)\in\bar\omega \qquad (21')$$

где $M_{ij} = \sum m_{kn}\frac{\partial\langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u^2_{ij}}$;

При сравнении (19)-(21) с (I.9') бросается в глаза отсутствие в дифференциально-разностных уравнениях членов, соответствую-

ющих истокообразной форме задания граничных условий. Однако граничные условия в (I9)-(2I) и (I9')-(2I') все не присутствуют. Их существование обусловлено способом окаймления сеточных функций (2), (3) и особенно наглядно проявляется при рассмотрении интегральных законов сохранения.

§4. Закон сохранения импульса

Без ограничения общности, всюду в дальнейшем будем считать, что вдоль всей границы области $\mathcal{D}$ задано противодавление $P^*(x,y)$

Определим выражения для обобщенных импульсов механической системы, задаваемой лангранжианом $\mathcal{L}_h$ аналогично тому, как это делается в классической механике [7]

$$q^x_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial u_{ij}} = \sum_{(k,n)\in\omega} m_{kn} \frac{\partial \langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u^2_{ij}} u_{ij} = M_{ij} u_{ij} \tag{22}$$

$$q^y_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial v_{ij}} = \sum_{(k,n)\in\omega} m_{kn} \frac{\partial \langle v^2\rangle_{kn}}{\partial v^2_{ij}} v_{ij} = M_{ij} v_{ij} \tag{23}$$

$$q^\tau_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \omega_{ij}} = \sum_{(k,n)\in\omega} m_{kn} \frac{\partial \langle W^2\rangle_{kn}}{\partial W^2_{ij}} x^{\ell}_{ij} \omega_{ij} = M_{ij} \omega_{ij} x^{2(\ell-1)}_{ij} \tag{24}$$

Величины q^x_{ij} и q^y_{ij} могут быть истолкованы как обычные импульсы неких "крупных частиц" с эффективной массовой M_{ij} Величина q^τ_{ij} имеет смысл момента импульса тех же частиц в случае осевой симметрии (ℓ =2) и обычного импульса в случае плоской симметрии (ℓ=I).

Обобщенные импульсы (22)-(24) относятся к узлам сетки , в то время как все линейные функционалы, входящие в выражения (4)-(6) определены в центрах ячеек этой сетки, т.е. относятся к узлам сетки ω . Поэтому имеет смысл определить обощенные импульсы также и на множестве ω_h

$$Q^x_{ij} = m_{ij} F^{ij}_{u^2}(u) = m_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{\partial \langle u^2\rangle_{ij}}{\partial u^2_{kn}} u_{kn} \tag{22'}$$

$$Q^y_{ij} = m_{ij} F^{ij}_{v^2}(v) = m_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{\partial \langle v^2\rangle_{ij}}{\partial v^2_{kn}} v_{kn} \tag{23'}$$

$$Q^\tau_{ij} = m_{ij} F^{ij}_{W^2}(\omega x^{2(\ell-1)}) = m_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{\partial \langle W^2\rangle_{ij}}{\partial W^2_{kn}} \omega_{kn} x^{2(\ell-1)}_{kn} \tag{24'}$$

Пусть $\tilde\Omega_\omega$ - какая либо ступенчатая область ($\tilde\Omega_\omega \in \Omega$) составленная из ячеек разностной сетки $\bar\omega$, Обозначим через $\bar\omega(\tilde\Omega)$ множество узлов этой сетки, лежащих внутри и на границе области

$\tilde{\Omega}_\omega$. Все внутренние по отношению к $\tilde{\Omega}_\omega$ узлы сетки ω обозначим через $\breve{\omega}(\Omega)$

В соответствии с (22')-(24') суммарные составляющие импульса среды, заключенной в ячейках области $\tilde{\Omega}_\omega$ будут определяться выражениями:

$$\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}} = \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} Q^x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{ij}}{\partial u^2_{kn}} u_{kn} \tag{25}$$

$$\mathcal{P}^y_{\tilde{\Omega}} = \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} Q^y_{ij} = \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{ij}}{\partial u^2_{kn}} v_{kn} \tag{26}$$

$$\mathcal{P}^\tau_{\tilde{\Omega}} = \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} Q^\tau_{ij} = \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle W^2\rangle_{ij}}{\partial W^2_{kn}} \omega_{kn} X^{2(\ell-1)}_{kn} \tag{27}$$

Найдем закон изменения величины $\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}}$ со временем:

$$\frac{d\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}}}{dt} = \sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u^2_{ij}} \frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{(k,n)\in\omega} m_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u^2_{ij}} \frac{du_{ij}}{dt} -$$
$$- \sum_{(k,n)\in\omega/\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u^2_{ij}} \frac{du_{ij}}{dt}; \tag{28}$$

Принимая во внимание уравнение (19'), получаем:

$$\frac{d\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}}}{dt} = \sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u_{ij}} \left\{(\ell-1)\frac{W^2_{kn}}{X_{kn}} + f^x_{kn}\right\} + \sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} \langle P\rangle_{kn} *$$
$$* \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} + \sum_{(k,n)\in\omega/\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} \langle P\rangle_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} - \sum_{(k,n)\in\omega} \langle P\rangle_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} \frac{\tilde{M}_{ij}}{M_{ij}} \tag{28'}$$

где:

$$\tilde{M}_{ij} = \sum_{(k,n)\in\omega/\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{kn} \frac{\partial\langle u^2\rangle_{kn}}{\partial u^2_{ij}} \tag{29}$$

Пусть функционал $\langle u^2\rangle_{ij}$ определен на конечном наблоне $Ш(u^2)$ т.е.

$$\langle u^2\rangle_{ij} = \sum_{(k,n)\in Ш(u^2)} c_{\mu+k,\xi+n}\, u^2_{\mu+k,\xi+n} \qquad (i,j)\in\omega;\ (\mu,\xi)\in\bar{\omega} \tag{30}$$

где $c_{\mu+k,\xi+n}$ – контакты, определяемые из условия аппроксимации. Нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} \tilde{M}_{ij} \equiv M_{ij}; & \text{если } (i,j)\in\bar{\omega}/(\breve{\omega}(\tilde{\Omega}) + Ш(u^2)) \\ \tilde{M}_{ij} \equiv 0; & \text{если } (i,j)\in\bar{\omega}/(\breve{\omega}(\tilde{\Omega}) - Ш(u^2)) \end{cases}$$

Учитывая (13), (9) перепишем (28) в виде:

$$\frac{d\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}}}{dt} = (\ell-1)\sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\ell)} m_{kn} F^{kn}_{u^2}\left(\frac{W^2}{X}\right) + \sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} m_{kn} F^{kn}_{u^2}(f^x) +$$
$$+ (\ell-1)\sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\ell)} \langle P\rangle_{kn} S_{kn} + \sum_{(k,n)\in\omega/\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} \langle P\rangle_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}}\left(1 - \frac{\tilde{M}_{ij}}{M_{ij}}\right) -$$
$$- \sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\tilde{\Omega})} \langle P\rangle_{kn} \sum_{(i,j)\in\bar{\omega}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} \frac{\tilde{M}_{ij}}{M_{ij}}; \tag{28''}$$

и сравним его с первой формулой из (I.15). Первые три суммы, входящие в (28'') соответствуют интегралам по объему, обусловленным наличием центростремительных и потенциальных сил, а также цилиндрической симметрии. Члены предпоследней и последней сумм отличны от нуля только в некоторой окрестности границы области $\tilde{\Omega}_\omega$ ширина которой определяется величиной шаблона $Ш(u^2)$. Эти суммы являются аналогом контурного интеграла по границе области и определяют суммарный импульс сил давления.

Аналогичным образом можно получить законы изменения его временем величин $\mathcal{P}^y_{\tilde{\Omega}}$ и $\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}}$

$$\frac{d\mathcal{P}^y_{\tilde{\Omega}}}{dt} = \sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\hat{\Omega})} m_{kn} F^{kn}_{\vartheta^2}[f^y] + \sum_{(k,n)\in\omega/\breve{\omega}(\hat{\Omega})} \langle P\rangle_{kn} \sum_{(i,j)\in\breve{\omega}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}\left(1-\frac{\tilde{M}_{ij}}{M_{ij}}\right) - \tag{32}$$

$$-\sum_{(k,n)\in\breve{\omega}(\hat{\Omega})} \langle P\rangle_{kn} \sum_{(i,j)\in\omega} \frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}} \frac{\tilde{M}_{ij}}{M_{ij}}; \quad \frac{d\mathcal{P}^x_{\tilde{\Omega}}}{dt} \equiv 0; \tag{33}$$

Таким образом при любом выборе функционалов $F^{ij}_f[f]$, подчиняющихся условиям (7)-(8), дифференциально-разностные уравнения (I9)-(2I') оказываются консервативными, т.е. не содержат и фиктивных источников и стоков обощенных импульсов, обусловленных разностной аппроксимацией.

§5. Закон сохранения энергии. Свойство сбалансированности дискретных моделей

Рассмотрим полную производную по времени от кинетического потенциала $L\tilde{\Omega}$ области $\tilde{\Omega}_\omega$

$$\frac{dL\tilde{\Omega}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\hat{\Omega})} m_{ij}\left[\frac{\langle u^2\rangle_{ij}+\langle v^2\rangle_{ij}+\langle w^2\rangle_{ij}}{2} - \langle\mathcal{E}\rangle_{ij} - \langle\varphi\rangle_{ij}\right] =$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\hat{\Omega})} m_{ij}\left[\frac{\langle u^2\rangle_{ij}+\langle v^2\rangle_{ij}+\langle w^2\rangle_{ij}}{2}\right] - \sum_{(i,j)\in\omega} m_{ij}\frac{\partial\langle\mathcal{E}\rangle_{ij}}{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}\sum_{(k,n)\in\breve{\omega}}\left[\frac{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}{\partial x_{kn}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{dx_{kn}}{dt} + \frac{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}{\partial y_{kn}}\frac{dy_{kn}}{dt}\right] + \sum_{(i,j)\in\omega/\breve{\omega}(\hat{\Omega})} m_{ij}\frac{\partial\langle\mathcal{E}\rangle_{ij}}{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}\sum_{(k,n)\in\omega}\left[\frac{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}{\partial x_{kn}}\frac{dx_{kn}}{dt} + \frac{\partial\langle\eta\rangle_{ij}}{\partial y_{kn}}\frac{dy_{kn}}{dt}\right] + \tag{34}$$

$$+\sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\hat{\Omega})} m_{ij}\left[F^{ij}_\varphi[f^x u] + F^{ij}_\varphi[f^y v]\right]$$

Изменяя во второй сумме правой части (34) порядок суммирования и используя уравнения (I9')-(2I'), получаем:

$$\frac{dL\tilde{\Omega}}{dt} = 2\frac{d}{dt}\sum_{(i,j)\in\breve{\omega}(\hat{\Omega})} m_{ij}\left[\frac{\langle u^2\rangle_{ij}+\langle v^2\rangle_{ij}+\langle w^2\rangle_{ij}}{2}\right] - \sum_{(i,j)\in\omega/\breve{\omega}(\hat{\Omega})}\langle P\rangle_{ij}\sum_{(k,n)\in\breve{\omega}}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}}\right.$$

$$\left.\times u_{kn} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}} v_{kn}\right) + \sum_{(i,j)\in\omega}\langle P\rangle_{ij}\sum_{(k,n)\in\breve{\omega}}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}}\frac{\tilde{M}_{kn}}{M_{kn}}u_{kn} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}}\frac{\tilde{M}_{kn}}{M_{kn}}v_{kn}\right) \tag{34'}$$

Перенося производную по времени в левую часть, находим:

$$\frac{d\mathcal{H}_{\tilde{\Omega}}}{dt} = -\Big\{\sum_{(i,j)\in\omega/\tilde{\omega}(\tilde{\Omega})}\langle P\rangle_{ij}\sum_{(k,n)\in\tilde{\omega}}\Big[\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}}\Big(1-\frac{\tilde{M}_{kn}}{M_{kn}}\Big)u_{kn}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}}\Big(1-\frac{\tilde{M}_{kn}}{M_{kn}}\Big)v_{kn}\Big]-$$

$$-\sum_{(i,j)\in\tilde{\omega}(\tilde{\Omega})}\langle P\rangle_{ij}\sum_{(k,n)\in\tilde{\omega}}\Big(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}}\frac{\tilde{M}_{kn}}{M_{kn}}u_{kn}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}}\frac{\tilde{M}_{kn}}{M_{kn}}v_{kn}\Big)\Big\}; \qquad (35)$$

где $\mathcal{H}_{\tilde{\Omega}} = \sum_{i,j} m_{ij}\Big[\frac{\langle u^2\rangle_{ij}+\langle v^2\rangle_{ij}+\langle w^2\rangle_{ij}}{2}+\langle\varepsilon\rangle_{ij}+\langle\varphi\rangle_{ij}\Big]; (i,j)\in\tilde{\omega}$

Гамильтониан области $\tilde{\Omega}_{\tilde{\omega}}$, представляющий собой ее полную энергию. Как было показано выше, члены сумм, стоящих в правой части равенства (35) отличны от нуля только в некоторой окрестности границы области $\tilde{\Omega}(\tilde{\omega})$. Сравнение (35) с (I,I9), (28'') с (I.I5) показывает, что эти суммы определяют работу сил давления. Из (35) следует, что в любых дискретных моделях среды, определяемых выражениями (4)-(6) при выполненных ограничениях (7)-(8) отсутствуют фиктивные источники и стоки энергии, имеющие разностное происхождение.

При получении выражения (35) мы использовали термодинамическое тождество (6), которое может быть представлено также и в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\langle\varepsilon\rangle_{ij}}{dt} = -\frac{\langle P\rangle_{ij}}{m_{ij}}\frac{dV_{ij}}{dt} = \frac{\langle P\rangle_{ij}}{\langle\rho\rangle_{ij}^2}\frac{d\langle\rho\rangle_{ij}}{dt}; \quad (i,j)\in\omega \qquad (36)$$

Сравнение этого уравнения с (I.20') показывает, что оно представляет собой дискретный аналог закона сохранения энтропии.

Последнее обстоятельство, наряду с консервативностью динамичеоких уравнений (I9')-(2I') и уравнения для изменения полной энергии среды (35), фактически являющегося алгебраическим следствием из (I9')-(2I') и (36) позволяет говорить о некой самосогласованности аппроксимаций различных уравнений, образующих сиотему уравнений газовой динамики. Разностные системы уравнений, т.е. системы уравнений, дискретных как по пространству, так и по времени) обладающие свойством самосогласованности аппроксимаций в указанном выше смысле, получили наименование полностью консервативных разностных схем. В отличие от дифференциально-разностных уравнений, разностные должны иметь согласованные аппрокоимации также и по времени.

Дискретные по пространственным переменным модели сплошной среды, описываемые самосогласованными системами дифференциально-разностных уравнений, будем называть "сбалансированными".

Далеко не всякая дискретная модель обладает подобным свойством. Получение сбалансированных моделей на основе интегроинтерполяционного подхода [I,2] в случае двух и более пространственных переменных представляет собой далеко не простую математическую задачу. Использование же вариационного принципа позволяет строить сбалансированные дискретные модели сплошной среды по существу автоматически.

Замечание

Может показаться, что причина сбалансированности получаемых из вариационного принципа дискретных моделей кроется в условиях согласованности аппроксимаций (7), (8). На самом деле это не так. Если, например, отказаться от (8), то это приведет только к тому, что в каждом из уравнений (I9')-(2I') будет стоять своя величина M_{ij} (т.е. "крупные частицы" будут иметь анизотропную массу), да в выражениях (28''), (32) и (35) появятся некоторые дополнительные слены, отличные от нуля лишь в окрестности границы области. К появлению каких либо объемных исчтоников или стоков отказ от 8) не приводит. Дискретные модэли с такими свойствами также можно причислить к сбалансированным.

Требование (7) нужно только для обоснования условий (I3) и может быть просто заменено последними.

§6. Различные формы представления дискретных моделей

Как показано выше, эволюция дискретных по пространственным переменным моделей сплошных сред, определяемых выражениями (4) (6), полностью описывается следующей замкнутой системой дифференциально-разностных уравнений:

$$M_{ij}\frac{du_{ij}}{dt}-(\ell-1)M_{ij}\frac{W_{ij}^2}{x_{ij}}-M_{ij}f_{ij}^x-\sum_{(k,n)\in\omega}\langle P\rangle_{kn}\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}}=0. \tag{37}$$

$$M_{ij}\frac{dv_{ij}}{dt}-M_{ij}f_{ij}^y-\sum_{(k,n)\in\omega}\langle P\rangle_{kn}\frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}=0. \tag{38}$$

$$M_{ij}\frac{d}{dt}\left(x_{ij}^{\ell-1}W_{ij}\right)=0. \tag{39}$$

$$\langle\rho\rangle_{kn}V_{kn}=m_{kn} \tag{40}$$

$$m_{kn}\frac{d\langle\varepsilon\rangle_{kn}}{dt}=-\langle P\rangle_{kn}\sum_{(i,j)\in\bar\omega}\left(\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}}u_{ij}+\frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}v_{ij}\right) \tag{41}$$

$$\frac{dX_{ij}}{dt} = u_{ij} \; ; \; \frac{dY_{ij}}{dt} = v_{ij} \tag{42}$$

$$P_{kn} = P(\rho_{kn}, \varepsilon_{kn}) \tag{43}$$

$$M_{ij} = \sum_{(k,n)\in\omega} m_{kn} \frac{\partial \langle u^2 \rangle_{kn}}{\partial u_{ij}^2} \tag{44}$$

Система (37)-(44) – единственная форма описания поведения дискретных моделей. Так заменяя уравнение (41) на выражение (35) записанное для каждой отдельной ячейки сетки ω_h, получим другую систему уравнений, описывающую ту же самую модель.

Уравнение (41) и уравнение состояния можно также заменить соответственно на эволюционное уравнение относительно давления

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{V_{ij}^2}{m_{ij}} \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} \right\rangle_{ij}\right\} = -\mathcal{A}_h^{ij}\langle P\rangle_{ij} - 2\ell S_{ij}(X^{\ell-1}u, v) - \ell(\ell-1) S_{ij}(u^2, y) -$$
$$-(\ell-1)\ell S_{ij}(W^2, y) - \ell S_{ij}(X^{\ell-1}f^x, y) - S_{ij}(X^\ell, f^y); \; \langle P\rangle \in \mathcal{H}_\omega; \; (i,j)\in\omega \tag{45}$$

и выражение для адиабатической скорости звука:

$$C_A = C(\rho, P)$$

Здесь:

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} \right\rangle_{ij} = \mathcal{F}_\rho^{ij}\left[\frac{1}{C_A^2}\frac{dP}{dt}\right] = \sum_{(k,n)\in\omega} \frac{\partial \langle \rho\rangle_{ij}}{\partial \rho_{kn}} \left(\frac{1}{C_A^2}\frac{dP}{dt}\right)_{kn}$$

$$S_{ij}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\left\{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right\rangle_{ij}\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right\rangle_{ij} - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right\rangle_{ij}\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right\rangle_{ij}\right\}; \; \varphi, \psi \in \mathcal{H}_{\bar\omega}$$

причем в соответствии с (7)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_{kn}}\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right\rangle_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial X_{kn}^e}\left\langle \frac{\partial X^e}{\partial \alpha}\right\rangle_{ij}; \; \frac{\partial}{\partial \varphi_{kn}}\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right\rangle_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial X_{kn}^e}\left\langle \frac{\partial X^e}{\partial \beta}\right\rangle_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{kn}}\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right\rangle_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial Y_{kn}}\left\langle \frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right\rangle_{ij}; \; \frac{\partial}{\partial \psi_{kn}}\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right\rangle_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial Y_{kn}}\left\langle \frac{\partial Y}{\partial \beta}\right\rangle_{ij}$$

$\mathcal{A}_h^{ij}$ – линейный оператор такой, что

$$\mathcal{A}_h^{ij} f = \sum_{(k,n)\in\bar\omega}\left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial X_{kn}} \frac{1}{M_{kn}} \sum_{(\mu,\tau)\in\omega} f_{\mu\tau} \frac{\partial V_{\mu\tau}}{\partial X_{kn}} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial Y_{kn}} \frac{1}{M_{kn}} \sum_{(\mu,\tau)\in\omega} f_{\mu\tau} \frac{\partial V_{\mu\tau}}{\partial Y_{kn}}\right]$$
$$\vec f \in \mathcal{H}_\omega \tag{46}$$

Выражение (45) является дискретным аналогом уравнения (I.23).

Нетрудно видеть, что оператор $\mathcal{A}_h^{ij}$ самосопряжен и неотрицательно определен. Действительно, по определению оператора $\mathcal{A}_h^{ij}$ имеем:

$$(\varphi, \mathcal{A}_h^{ij}\psi) = \sum_{(i,j)\in\omega} \varphi_{ij} \sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{\partial V_{ij}}{\partial X_{kn}} \frac{1}{M_{kn}} \sum_{(\mu,\tau)\in\omega} \psi_{\mu\tau} \frac{\partial V_{\mu\tau}}{\partial X_{kn}} = \sum_{(k,n)\in\bar\omega} \frac{1}{M_{kn}}\left\{\sum_{(i,j)\in\omega} \varphi_{ij} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{\partial V_{ij}}{\partial X_{kn}}\right\}\left\{\sum_{(\mu,\tau)\in\omega} \psi_{\mu\tau} \frac{\partial V_{\mu\tau}}{\partial X_{kn}}\right\} = (\mathcal{A}_h^{ij}\varphi, \psi) \tag{47}$$

Поскольку $M_{kn} > 0;\ n,k \in \bar{\omega}$, то из (47) также следует, что

$$(\varphi, A_h^{ij}\varphi) \geq 0$$

Система уравнений (37)-(44) может быть использована для моделирования течений несжимаемой жидкости, если в качестве уравнения состояния взять: $P_{kn} = c^2(\rho_{kn} - \hat{\rho})$ и устремить константу C^2 к бесконечности. Поскольку в этом случае $C_A = C$, то при переходе к пределу левая часть (44) обратится в нуль, и мы получим

$$A_h^{ij}\langle P\rangle_{ij} + 2e\, S_{ij}(x^{e-1}u, v) - e(e-1)S_{ij}(u^2, y) - e(e-1)S_{ij}(w^2, y) -$$
$$- e\, S_{ij}(x^{e-1}f^x, y) - S_{ij}(x^e, f^y) = 0; \quad (i,j) \in \omega \qquad (48)$$

Выражение (48) представляет собой разностное уравнение эллиптического типа относительно давления, аналогичное последнему уравнению из (I.25).

§7. Аппроксимация и искусственная вязкость

Теорема. Если линейные функционалы $\langle u^2\rangle_{ij}; \langle v^2\rangle_{ij}; \langle \frac{\partial x}{\partial \alpha}\rangle_{ij}; \langle \frac{\partial x}{\partial \beta}\rangle_{ij}$ $\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha}\rangle_{ij}; \langle \rho\rangle_{ij}; \langle P\rangle_{ij}\ \langle \varepsilon\rangle_{ij}$ аппроксимируют соответствующие величины на множестве ω с точностью до $o(h_\alpha^n, h_\beta^n)$ и не зависят от (i,j), то все уравнения системы (37)-(44); (45), а также все вытекающие из этой системы уравнений интегральные законы сохранения (28''), (32), (33), (35) аппроксимируют соответствующие им дифференциальные и интегральные выражения также с точностью до $o(h_\alpha^n, h_\beta^n)$

Не имея возможности привести здесь развернутое доказательство этой теоремы, отметим лишь, что ее условия (условие независимости для достаточно удаленных от границы, внутренних точек области. Вопросы аппроксимации уравнений в приграничной полосе области, ширина которой определяется величиной используемых шаблонов, требует специального рассмотрения.

Дифференциально-разностные уравнения (37)-(44) описывают только адиабатические течения, и, поэтому, не пригодны для моделирования течений с ударными волнами, сопровождающихся увеличением энтропии среды. Чтобы устранить это ограничение, в уравнения (37), (38), (4I) следует ввести искусственную вязкость ("псевдовязкость").

Один из возможных подходов к построению искусственной вязкости для дифференциально-разностных уравнений, получаемых из вавариационного принципа, предложен в работе [I7].

Не вдаваясь в подробности, отметим, что согласно [17] псевдовязкость q_{ij} в (37),(38),(41) следует вводить как добавку к давлению $\langle P\rangle_{ij}$; $(i,j)\in\omega$, а сам вид псевдовязкости выбирать из условия его согласования со спектральными свойствами линейной системы уравнений, получаемой из (37)-(44) линеаризацией на постоянном фоне.

Можно показать, что условие спектрального согласования приводит к следующему выражению для

$$q_{ij} = \varkappa \frac{dV_{ij}}{dt} \tag{49}$$

где коэффициент $\varkappa$ определяется из условия наибыстрейшего затухания высокочастотной части спектра упомянутого выше линейного уравнения.

§8. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы

Из простейшей дискретной модели среды, заменой временных производных разностями, получено одиннадцатипараметрическое семейство двухслойных разностных схем, аппроксимирующее систему уравнений газовой динамики с точностью $O(h_\alpha^2, h_\beta^2, \tau)$ Найдена область значений параметров, при которых схемы из данного семейства будут обладать свойством полной консервативности. Показана также возможность моделирования неявными полностью консервативными схемами течений несжимаемой жидкости.

П.1. Простейшая дискретная модель

Выберем простейшие выражения для функционалов F_f^{ij}, обеспечивающие второй порядок аппроксимации соответствующих величин. Пусть

$$\begin{aligned}
&\langle\rho\rangle_{ij} = \rho_{ij}\,; \quad \langle p\rangle_{ij} = p_{ij}\,; \quad \langle\varepsilon\rangle_{ij} = \varepsilon_{ij}\,; \langle\tilde\rho\rangle_{ij} = \tilde\rho_{ij}\\
&\langle u^2\rangle_{ij} = \frac{1}{4}\left[u^2_{i+1,j} + u^2_{i+1,j+1} + u^2_{i,j+1} + u^2_{ij}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\\
&\langle v^2\rangle_{ij} = \frac{1}{4}\left[v^2_{i+1,j} + v^2_{i+1,j+1} + v^2_{i,j+1} + v^2_{ij}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\\
&\langle w^2\rangle_{ij} = \frac{1}{4}\left[w^2_{i+1,j} + w^2_{i+1,j+1} + w^2_{i,j+1} + w^2_{ij}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\\
&\langle\varphi\rangle_{ij} = \frac{1}{4}\left[\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{ij}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\\
&\left\langle\frac{\partial x^e}{\partial\alpha}\right\rangle_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^e_{i+1,j} - x^e_{ij}}{h_\alpha} + \frac{x^e_{i+1,j+1} - x^e_{i,j+1}}{h_\alpha}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\\
&\left\langle\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right\rangle_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{y_{i+1,j} - y_{ij}}{h_\alpha} + \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}}{h_\alpha}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\\
&\left\langle\frac{\partial x^e}{\partial\beta}\right\rangle_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^e_{i+1,j+1} - x^e_{i+1,j}}{h_\beta} + \frac{x^e_{i,j+1} - x^e_{ij}}{h_\beta}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}}{h_\beta} + \frac{y_{i+1,j} - y_{ij}}{h_\beta} \right] + o(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

$$F_f^{ij};\ P_{ij};\ \rho_{ij};\ \varepsilon_{ij};\ \tilde{\rho}_{ij} \in \mathcal{H}_\omega;\ u_{ij};\ v_{ij};\ w_{ij};\ x_{ij},\ y_{ij},\ \varphi_{ij} \in \mathcal{H}_{\bar\omega}$$

Нетрудно убедиться, что принятые выражения для функционалов удовлетворяют условию согласованности аппроксимаций (8). Из (7) и (I2) следует выражение для объема лагранжевой ячейки

$$V_{ij} = \frac{1}{2e}\left[(x^e_{i+1,j+1} - x^e_{ij})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) - (x^e_{i,j+1} - x^e_{i+1,j})(y_{i+1,j+1} - y_{ij}) \right] \tag{5I}$$

Система дифференциально-разностных уравнений (37)-(44) с учетом искусственной вязкости (49) и конкретного вида функционалов F_f^{ij} примет вид:

$$M_{ij}\frac{du_{ij}}{dt} - (e-1)M_{ij}\frac{W^2_{ij}}{x_{ij}} - M_{ij}f^x_{ij} - \sum_{(k,n)\in \omega_1(i,j)} P^*_{kn}\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} = 0 \tag{52}$$

$$M_{ij}\frac{dv_{ij}}{dt} - M_{ij}f^y_{ij} - \sum_{(k,n)\in \omega_1(i,j)} P^*_{kn}\frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}} = 0 \tag{53}$$

$$M_{ij}\frac{d}{dt}(x^e_{ij}W_{ij}) = 0 \tag{54}$$

$$\rho_{ij}V_{ij} = m_{ij} \tag{55}$$

$$m_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -P^*_{ij}\sum_{(k,n)\in \omega_2(i,j)}\left(\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}}u_{ij} + \frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}v_{ij}\right) \tag{56}$$

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = u_{ij};\quad \frac{dy_{ij}}{dt} = v_{ij} \tag{57}$$

$$P_{ij} = P(\rho_{ij}, \varepsilon_{ij}) \tag{58}$$

где

$$\omega_1 = \{(i,j),(i-1,j),(i-1,j-1),(i,j-1)\};\ (i,j)\in\bar\omega$$

$$\omega_2 = \{(i,j),(i+1,j),(i+1,j+1),(i,j+1)\};\ (i,j)\in\bar\omega$$

$$M_{ij} = 0.25\sum_{\omega_1} m_{kn}$$

$$P^*_{kn} = P_{kn} + \varkappa_{kn}\frac{dP}{dt} = P_{kn} - \varkappa_{kn}\frac{c^2_{kn}\rho_{kn}}{V_{kn}}\sum_{\omega_2}\left(\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}}u_{ij} + \frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}v_{ij}\right)$$

c^2_{kn} – квадрат местной адиабатической скорости звука.

Величину коэффициента искусственной вязкости $\varkappa_{kn}$ согласно [I7], [I8], определим следующим образом:

$$\varkappa_{kn} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{\omega_2} \omega^2_{ij}}} \tag{59}$$

Здесь:

$$\omega^2_{ij} = \frac{\alpha^{ij}_{xx} + \alpha^{ij}_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^{ij}_{xx} + \alpha^{ij}_{yy})^2 - 4\alpha^{ij}_{xy}}$$

$$\alpha^{ij}_{xx} = \frac{1}{M_{ij}}\sum_{\omega_1}\frac{c^2_{kn}\rho_{kn}}{V_{kn}}\left(\frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}}\right)^2 \tag{60}$$

$$a_{yy}^{ij} = \frac{1}{M_{ij}} \sum_{(k,n)\in\omega_1} \frac{C_{kn}^2 \rho_{kn}}{V_{kn}} \left(\frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}\right)^2$$

$$a_{xy}^{ij} = \frac{1}{M_{ij}} \sum_{(k,n)\in\omega_1} \frac{C_{kn}^2 \rho_{kn}}{V_{kn}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}}$$

Из предыдущего параграфа следует, что дискретная модель среды, описываемая уравнениями (52)-(58), обладает свойством сбалансированности.

Уравнения (56), (58) могут быть заменены на эволюционное уравнение относительно давления, принимающее вид:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{V_{ij}^2}{m_{ij}} \frac{1}{\tilde{C}_{ij}^2} \frac{dP}{dt}\right\} = -\mathcal{A}_h^{ij} P^* - 2\ell V_{ij}(x^{\ell-1}u, v) - \ell(\ell-1)[V_{ij}(u^2, v) + V_{ij}(w^2, y)] - \ell V_{ij}(x^{\ell-1} f^x, y) - V_{ij}(x^\ell, f^y) \tag{61}$$

и выражение для квадрата "эффективной" (с учетом псевдовязкости) скорости звука:

$$\tilde{C}_{ij}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_{ij} \frac{P_{ij}^*}{\rho_{ij}^2} \tag{62}$$

Линейный оператор $\mathcal{A}_h^{ij}$, входящий в (61) определен на девятиточечном шаблоне $\omega_3(i,j) = \{(i+k, j+n);\ k=0,\pm1;\ n=0,\pm1;\ (i,j)\in\omega\}$

$$\mathcal{A}_h^{ij} P^* = \sum_{(\mu,\xi)\in\omega_3} \sum_{(k,n)\in\omega_2} \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{kn}} \frac{1}{M_{kn}} \frac{\partial V_{\mu\xi}}{\partial x_{kn}} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{kn}} \frac{1}{M_{kn}} \frac{\partial V_{\mu\xi}}{\partial y_{kn}}\right) P_{\mu\xi}^*$$

При уравнении состояния $P = C^2(\rho_{ij} - \hat{\rho})$ и $C^2 \to \infty$ дифференциально-разностные уравнения (61) переходит в разностное уравнение эллиптического типа:

$$\mathcal{A}_h^{ij} P + 2\ell S_{ij}(x^\ell u, v) - \ell(\ell-1)[S_{ij}(u^2, y) + S_{ij}(w^2, y)] - \ell S(x^{\ell-1} f^x, y) - S_{ij}(x^\ell, f^y) = 0 \tag{63}$$

Поскольку при $C^2 \to \infty;\ \chi_{kn} \to 0$, то член искусственной вязкости в этом случае исчезает.

II.2. Дискретизация по времени

Заменяя в уравнениях (52)-(58) производные по времени соответствующими разностями, приходим в II-и параметрическому семейству разностных уравнений:

$$M_{ij} \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} - (\ell-1) M_{ij} \left(\frac{W^{(\sigma_1)}}{x^{\sigma_2}}\right)^2 - M_{ij}(f_{ij}^x)^{\sigma_3} - \sum_{(\xi,\mu)\in\omega_1} \left(P_{\xi,\mu}^{(\sigma_4)} + q_{\xi,\mu}^{(\sigma_5)}\right) \frac{\partial V_{\xi,\mu}^{(\sigma_6)}}{\partial x_{ij}} = 0 \tag{64}$$

$$M_{ij} \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n}{\tau} - M_{ij}(f_{ij}^y)^{\sigma_3} - \sum_{(\xi,\mu)\in\omega_1} \left(P_{\xi,\mu}^{(\sigma_4)} + q_{\xi,\mu}^{\sigma_5}\right) \frac{\partial V_{\xi,\mu}}{\partial y_{ij}} = 0 \tag{65}$$

$$(x_{ij}^\ell W_{ij})^{n+1} = (x_{ij}^\ell W_{ij})^n \tag{66}$$

$$\rho_{ij}^n V_{ij}^n = m_{ij} \tag{67}$$

$$m_{ij}\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau^{n}}=-(P_{ij}^{\sigma_7}+g_{ij}^{\sigma_8})\sum_{(\xi,\mu)\in\Omega_2}\left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{\xi\mu}}^{*\,\sigma_3}u_{\xi\mu}^{\sigma_{10}}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{\xi\mu}}^{*\,\sigma_3}v_{\xi\mu}^{\sigma_{10}}\right] \tag{68}$$

$$\frac{x_{ij}^{n+1}-x_{ij}^{n}}{\tau}=u_{ij}^{\sigma_{11}};\quad \frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n}}{\tau}=v_{ij}^{\sigma_{11}} \tag{69}$$

$$P_{ij}^{n}=P(\rho_{ij}^{n};\varepsilon_{ij}^{n}) \tag{70}$$

$$g_{ij}^{n}=-\varkappa_{ij}^{n}\sum\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{\xi\mu}}u_{\xi\mu}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{\xi\mu}}v_{\xi\mu}\right) \tag{71}$$

где $\Psi^{\sigma}=\sigma\Psi^{n+1}+(1-\sigma)\Psi^{n}$ причем, если Ψ состоит из нескольких сомножителей, то запись $\Psi^{*\,\sigma}$ означает, что каждый из сомнотелей берется с весом σ .

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что система (64)-(70) будет полностью консервативной [I8] при $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_6=\sigma_9=\sigma_{10}=\sigma_{11}=0.5$; $\sigma_4=\sigma_7$; $\sigma_5=\sigma_8$. Веса $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ могут быть произвольными и выбираются из соображений устойчивости и алгоритмичности схемы.

Линейный анализ устойчивости схемы (64)-(70), проведенный в [I7], [I8] показал, что при $\sigma_4\geq 0.5$; $\sigma_5\geq 0.5$ схема безусловно устойчива. При $0\leq\sigma_4<0.5$; $\sigma_5\geq 0.5$ устойчивость имеет место при ограничении на шаг по времени, аналогичный условию Куранта. При $0\leq\sigma_4<0.5$; $0\leq\sigma_5<0.5$ величина допустимого шага определяется сразу же из двух неравенств - условия Куранта для гиперболических уравнений и условия типа Куранта для уравнений параболических.

Разностные уравнений (64)-(70) аппроксимируют уравнения газовой динамики с точностью до $O(h_\alpha^2+h_\beta^2+\tau)$. В случае же, когда все веса равны 0.5($\sigma_i=0.5$; $i=1,\dots,11$) достигается второй порядок аппроксимации также и по времени.

Если в качестве уравнения состояния взять $P_{ij}=c^2(\rho_{ij}-\tilde{\rho})$ и устремить c^2 к бесконечности, то полностью консервативные схемы из семейства (64)-(70) при $\sigma_4\geq 0.5$ и $\sigma_5\geq 0.5$ будут моделировать несжимаемую среду. Действительно, при названных значениях σ_4 и σ_5 схемы безусловно устойчивы, а уравнения (67), (68), (70), как нетрудно показать, при $c^2\to\infty$ эквивалентны разностному эллиптическому уравнению, совпадающему с (63) с точностью до $O(\tau)$ при $\sigma_4=0.5$ и $O(\tau^2)$ - при $\sigma_4=0,5$.

Для решения нелинейной системы разностных уравнений (64)-(70) может быть использован метод Ньютона [2],[I9] или какие-либо его модификации [I9].

§9 Примеры численных расчетов

Приведем некоторые примеры раочетов, выполненных по полностью консервативным разностным схемам (64)-(70), полученным из простейшей дискретной сбалансированной модели сплошной среды.

а) одномерные ударные волны в идеальном газе

На рис.2 и рис.3 приведены распределения величин: P – давления, ρ – плотности, ε – удельной внутренней энергии, u – скорости, полученные на различные моменты времени в расчетах соответственно плоской (ℓ =I) и цилиндрической (ℓ =2) ударных волн. Уравнение состояния бралось в виде: $P=(\gamma-I)\rho\varepsilon$, γ =2; искусственная вязкость задавалась выражениями (59), (7I). Количество расчетных точек N =50.

Из приведенных графиков видно, что ширина размазывания фронта волны не превышает 3–4 ячеек. По мере приближения фронта цилиндрической ударной волны к оси r =0, плотность за фронтом стремится к предельному значению $(\gamma+I)(\gamma-I)=3$

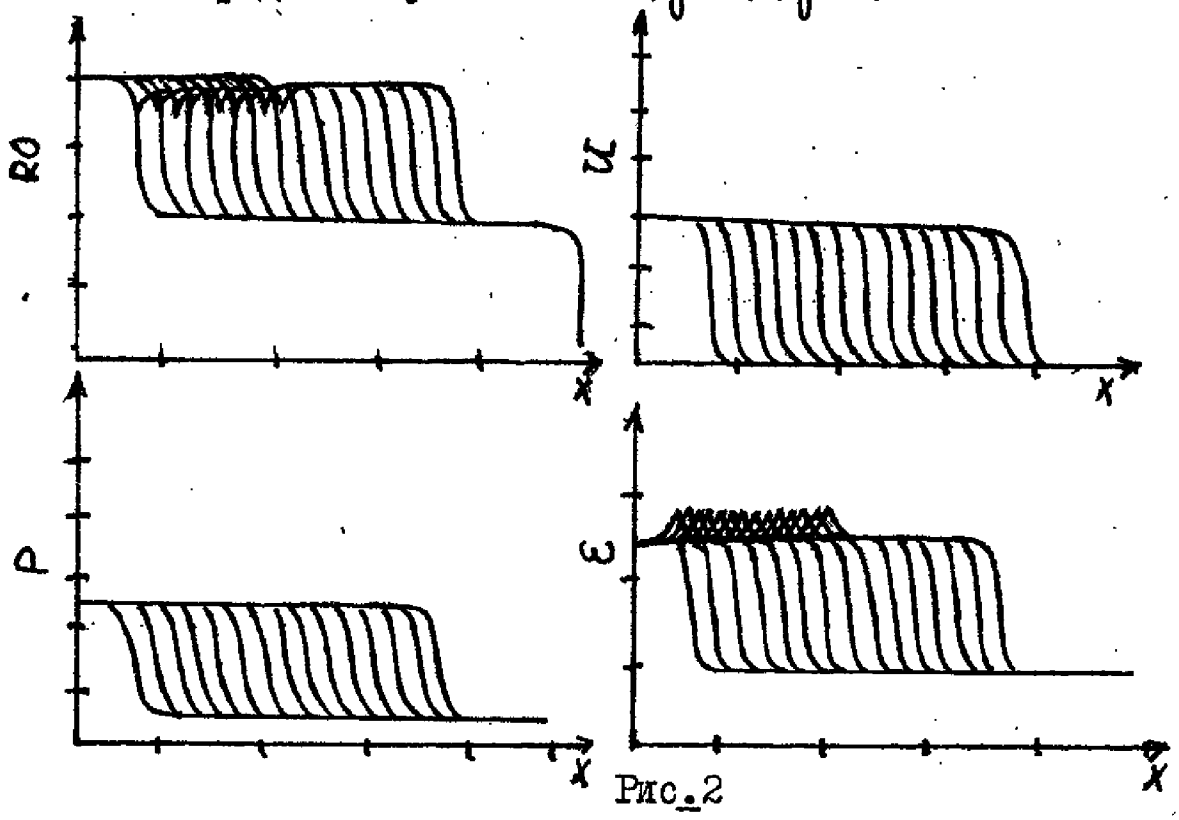

Рис.2

б) задача с транспортировке плазменного сгустка в магнитопроводе

В качестве примера раочета двумерных газодинамических задач рассмотрим задачу о динамике плазменного сгустка во внешнем магнитном поле плазмопровода [20]. Не касаясь физической стороны

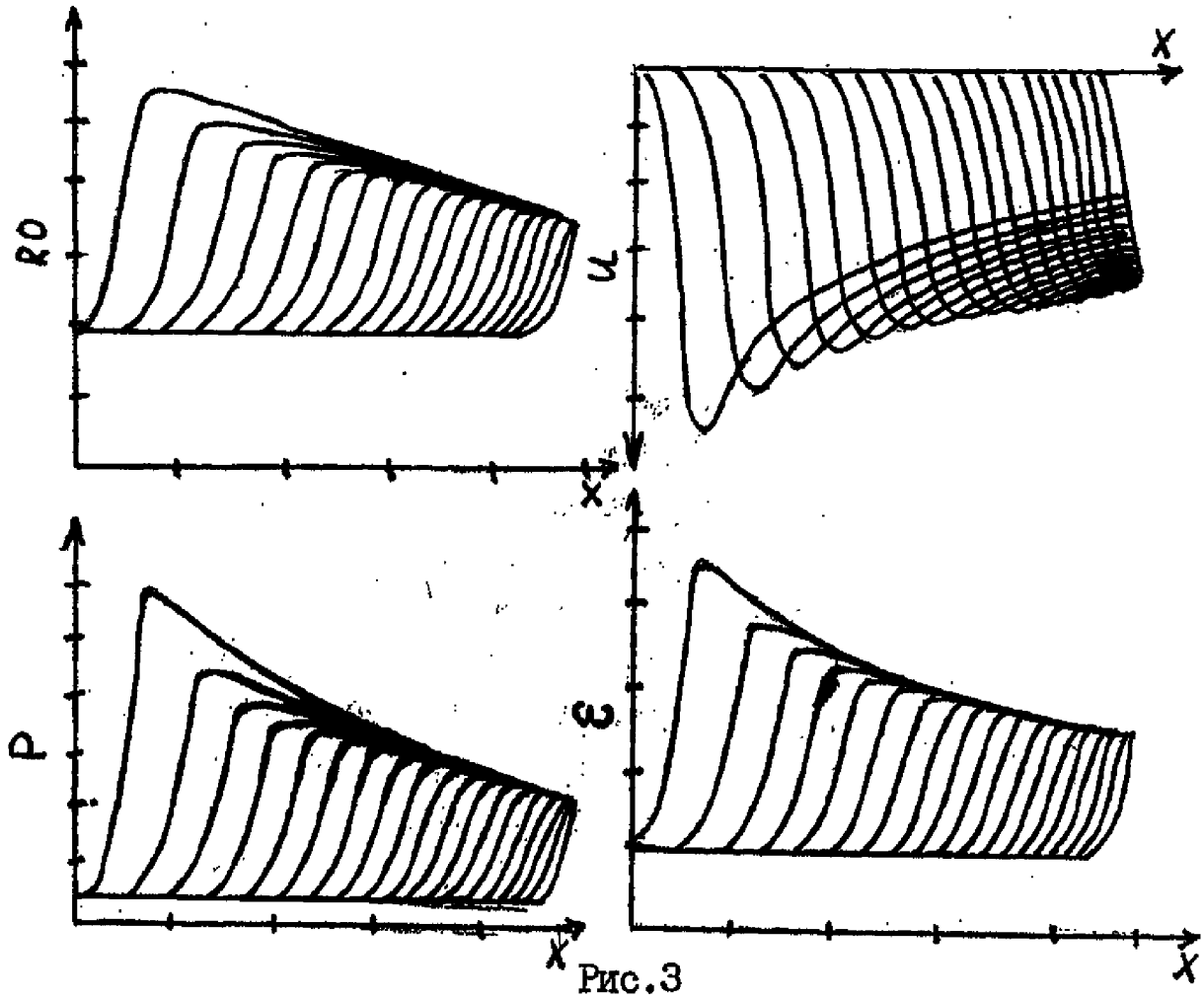

Рис.3

вопроса, кратко остановимся на математической постановке задачи.

Сгусток плазмы в начальный момент имеет форму сферы единичного радиуса. Вмороженное магнитное поле в плазме, считающейся бесконечноэлектропроводной, отсутствует. Магнитное поле вне сгустка находится из решения внешней магнитостатической задачи; на границе плазма – поле и на поверхности плазмопровода, представляющую собой сверхпроводящую цилиндрическую трубу радиуса R =I.65 (рис.4) нормальная компонента магнитного поля равна нулю; на большом расстоянии от сгустка магнитное поле считается однородным.

Со стороны магнитного поля на плазменный сгусток действует магнитное давление $P=H^2/8$ начальные значения термодинамических величин плазмы задаются однородными: ρ =I, ε =I.

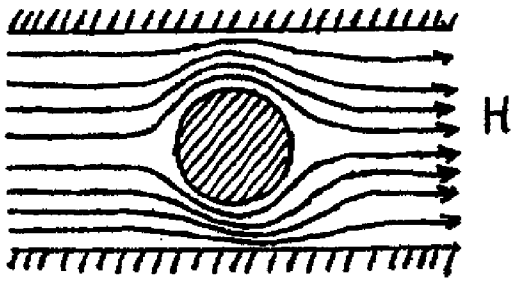

Рис.4

Уравнение состояния берется в виде: $P=(\gamma-I)$, γ =5/3. Величи-

на магнитного потока в трубе определяется заданием безразмерного параметра β , равного отношению газодинамического давления плазмы к давлению магнитного поля на экваторе сгустка.

Задача решалась в системе координат, связанной с центром масс сгустка.

На рис.5,6 приведены поля корости сгустка на моменты времени t_1 =I.2 и t_2 =I.8 при различных параметрах β . Вследствие симметрии определенной выше задачи относительно осей r и z рассматривался только первый квадрант плоскости (r, z). На рис.7 представлены поле скоростей и расчетная сетка на момент t =2.925 при β =I. Расчеты проводились на сетке с числом ячеек 30 x 35

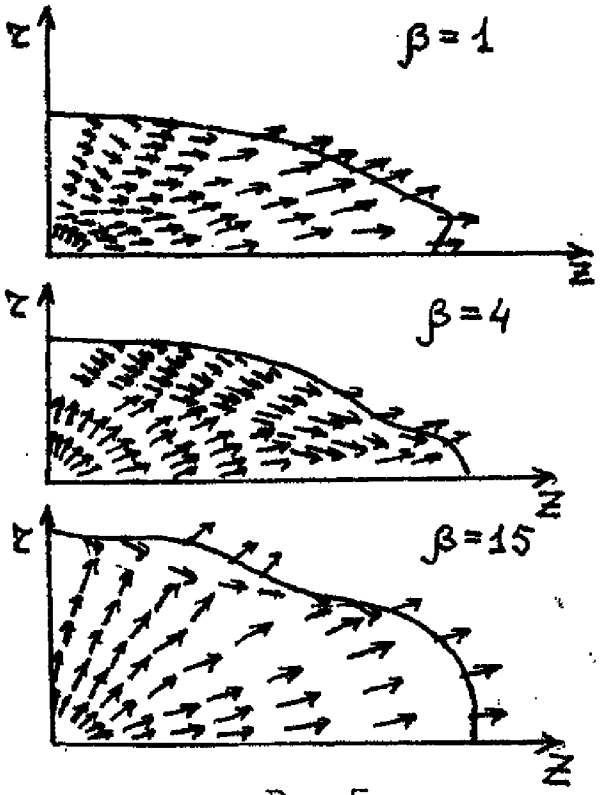

Рис.5

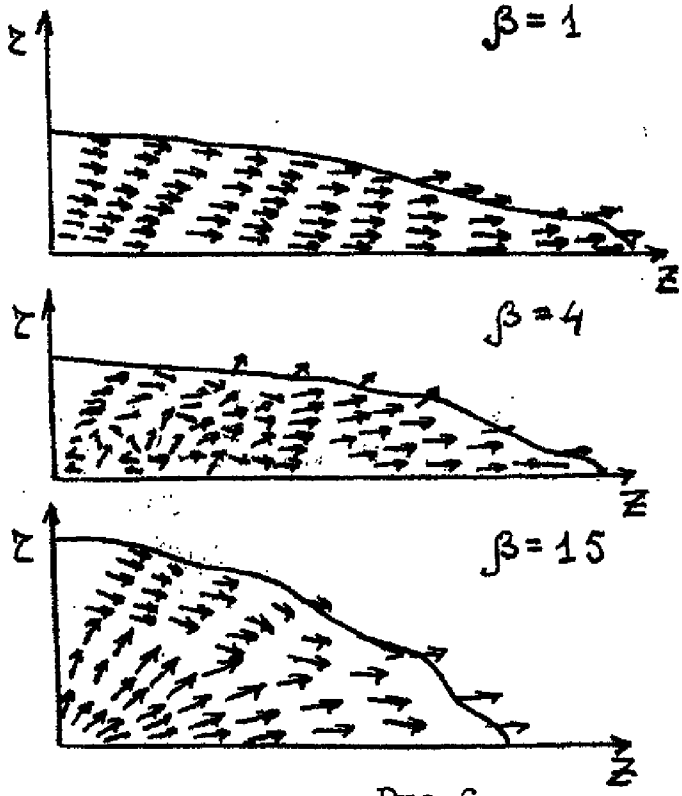

Рис.6

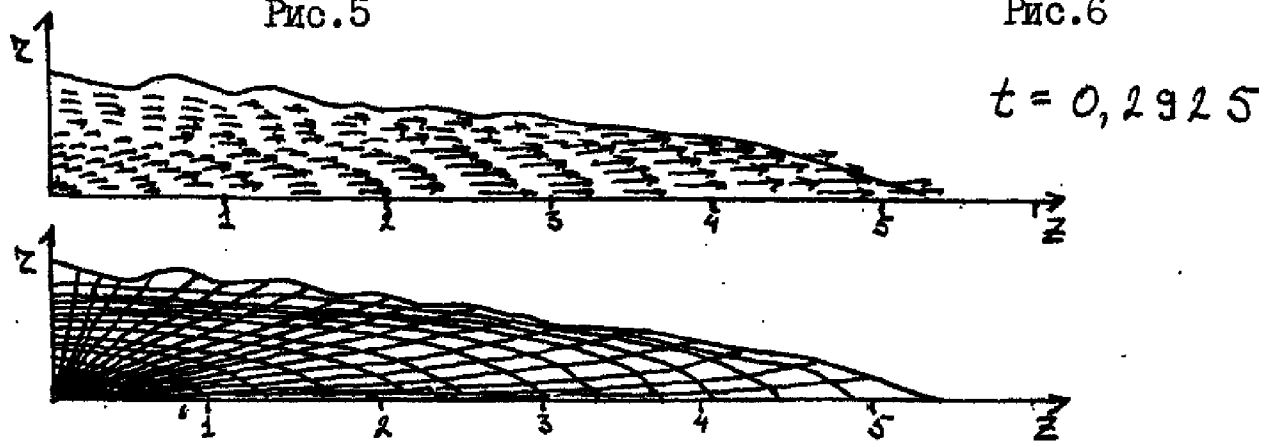

Рис.7

Из рис.5,6 видно, что в процессе обжатия плазмы внешним магнитным полем на границе плазмы формируются волны сжатия, которые распространяются к центру и вдоль границ. На больших временах сгусток расширяется в продольном направлении с постоянной скоростью, и движение приобретает по существу квазиодномерный характер.

в) <u>задача о релей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя жидкости</u>

Для иллюстрации расчетов двумерных течений несжимаемой жидкости рассмотрим задачу о поведении бесконечного слоя невязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести [21].

Пусть ускорение силы тяжести направлено вверх (рис.8), внешнее давление на верхней границе равно нулю, на нижней границе, которая является жесткой стенкой, задано условие непротекания.

Если верхняя граница строго параллельна нижней стенке, совпадающей с осью X, и все начальные скорости равны нулю, то жидкость будет находиться в состоянии покоя: сила тяжести, действующая на каждую жидкую частицу будет уравновешиваться градиентом давлении. Однако такое состояние равновесия будет неустойчивым.

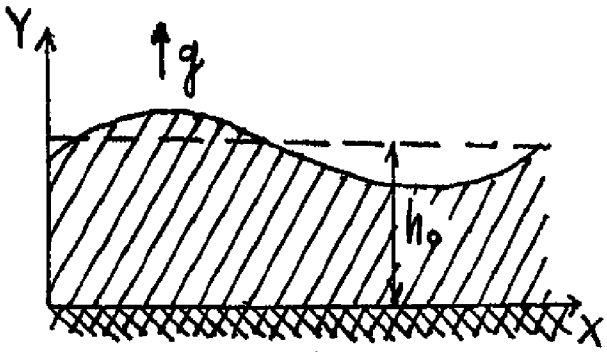

Рис.8

Внесем в форму верхней границы и начальные значения скоростей возмущения в виде:

$$h = h_0(1 + A\cos kx)\ ;\quad u = -A\sqrt{\frac{g}{h_0}}\sin kx$$

$$v = Ak h_0 y\sqrt{\frac{g}{h_0}}\cos kx$$

где h – толщина слоя жидкости, h_0 – толщина невозмущенного слоя, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны возмущения, A – амплитуда начадьного возмущения. Будем считать, что $h_0/\lambda = 5.10^{-2}$, $A/\ = 10^{-2}$; при X=0 и X= зададим условия периодичности

Численные моделирования развития неустойчивости при начальных возмущениях (4.I) проводилось по разностным схемам (64)-(70) с уравнением состояния:

$$P = 10^7(\rho - \rho_0) \qquad (73)$$

Расчетная сетка содержала 100 точек (10 точек по каждой ко-

Результаты численных расчетов сравнились с результатами линейной теории с учетом поправок второго и третьего порядка, а также с численным решением уравнений гидродинамики в приближении "мелкой воды".

Расчеты показывают, что на линейной стадии развития неустойчивости численные результаты с точностью до десятых долей процента совпадают с результатами линейной теории. На сильно нелинейной стадии наблюдается выход на режим, подобный описанному в [22]; "пики" возмущения двигаются с ускорением, близким к ускорению свободного падения (рис.9), а разделяющие их области "всплывают" с приблизительно постоянной скоростью. На рис.9 приведена форма жидкости на момент времени, в который амплитуда возмущения составляет 100% от толщины невозмущенного слоя.

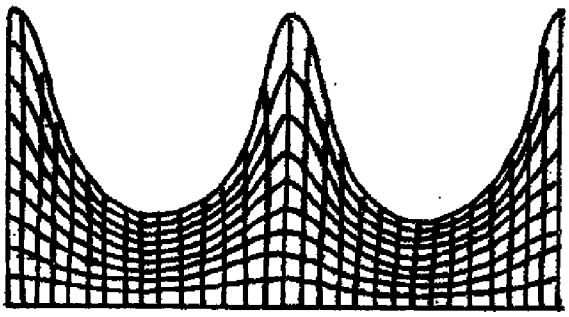

Рис.9

г) <u>задача об обжатии магнитного поля цилиндрическим коллапсирующим лайнером</u>

Условия развития релей-тейлоровской неустойчивости возникают также и в задаче об обжатии магнитного поля жидкометаллическим лайнером [23].

В начальный момент t_0 неожимаемый, сверхпроводящий жидкометаллический лайнер представляет собой цилиндрическую трубу со слегка искаженной формой внутренней границы.

В начальный момент времени t_0 задано поле скоростей лайнера, такое, что скорости всех точек внешней границы равны по величине и направлены к центру. Внутри трубы заключен магнитный поток, остающийся постоянным во все моменты времени.

Численно изучалось развитие начального возмущения внутренней границы лайнера в процессе торможения лайнера магнитным полем (на внутреннюю границу лайнера действует сила магнитного давления $P_H=H^2/8$, где H – напряженность магнитного поля). Уравнение состояния бралось в виде (73), а начальное возмущение внутренней границы задавалось выражением:

$$r(\varphi)=r_0+A_1\cos(k_1\varphi)+A_2\cos(k_2\varphi)$$

$$A_1/r_0=A_2/r_0=10^{-2}$$

$$k1=2;\quad k2=24$$

Расчеты показали, что в результате развития релей-тейлоровской неустойчивости на нелинейной стадии образуются ярко выраженные кумулятивные струи (рис.10,11), вбирающие в себя значительную часть первоначальной кинетической энергии лайнера.

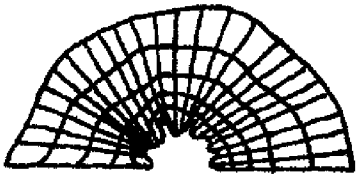

Рис.10

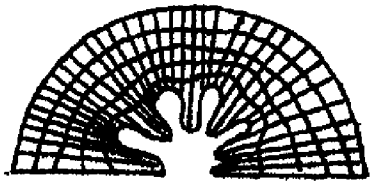

Рис.11

Для увеличения точности расчетов, по мере приближения лайнера к центру, вводится механизм дробления ячеек, непосредственно прилегающих к внутренней границе, дополнительными азимутальными лагранжевыми линиями.

Авторы благодарны Р.А.Волковой, В.А.Гасилову, Т.К.Коршия и В.Ф.Тишкину за полезные обсуждения и помощь в проведении расчетов.

Литература

I. А.А.Самарский, "Теория разноотных схем". Москва, "Наука", 1977 г.

2. А.А.Самарский, Ю.П.Попов. Разностные схемы газовой динамики. Мооква, "Наука", 1975 г.

3. Годунов С.Н. "Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики", Математ.сб., 1959, 47, вып.3, 271-306.

4. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. "Нестационарный метод "крупных частиц" для газодинамичеоких расчетов", ЖВМ и МФ, 1971, II, №I, 182-207.

5. Яненко Н.Н. "Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики", Новосибирск, "Наука", 1967.

6. Ф.М.Море, Г.Фешбах. "Методы теоретической физики". Москва, ГТТИ, 1951.

7. Л.Парс. "Аналитическая динамика", Москва, "Наука", 1971.

8. Л.Д.Ландау, Л.М.Лифшиц. "Теория поля", Москва, "Физматгиз", 1962.

9. М.Био. "Вариационные принципы в теории теплообмена", Москва, "Энергия", 1975.

10. Selenger R.L., Whitham C.B., "Variational principles in continuum mechanics", Proc. Roy. Sos., A305, 1-25, 1968

II. Э.Нетер. "Инвариантные вариационные задачи". Сборник "Вариационные принципы механики", Москва, "Физматгиз", 1959, стр.6II-630.

I2. В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. "Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике". ДАН СССР, 1977, т.235, № 6.

I3. В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. "Вариационный метод получения разностных охем для уравнений магнитной гидродинамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1976 г.

I4. Ф.Хартман. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", "Мир", 1970 г.

I5. C.W. Gear, "Numerical initial value problems in ordinary differential equations" Prentice Hall Englewood CRIFFS, N.-Y., 1971.

16. В.С.Владимиров. "Обобщенные функции в математической физике". М., "Наука", 1976 г.
17. В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. "Об искусственной вязкости и устойчивости дифференциально-разностных и разностных уравнений газовой динамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 70, 1976.
18. В.М.Головизнин, Т.К.Коршия, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. "О некоторых свойствах вариационно-разностных уравнений МГД и искусственных диссипативных процессах типа "псевдовязкости". Препринт ИПМ АН СССР, № 25, 1978.
19. В.А.Гасилов, В.М.Головизнин, М.Д.Таран, В.Ф.Тишкин и др. "Применение метода Ньютона для решения разностных уравнений гидродинамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 100, 1978.
20. В.М.Головизнин, Т.К.Коршия, Б.Я.Любимов, А.П.Фаворский. "Численное исследование разлета плазмы в магнитное поле". Препринт ИПМ АН СССР, № 61, 1978.
21. В.А.Гасилов, В.М.Головизнин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. "Численное решение одной модельной задачи о релей-тейлоровской неустойчивости". Препринт ИПМ АН СССР, № 119, 1977.
22. D.L. Book, E. Ott, A.L. Sutch. Phys. Fluids, 19, 676, (1974)
23. Р.Л.Волкова, В.М.Головизнин, Ф.Р.Уменич, А.П.Фаворский. "Численное моделирование обжатия магнитного поля кумулирующим лайнером". Препринт ИПМ АН СССР, № 111, 1976 г.
24. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. "Вариационный принцип для систем с распространенными параметрами гидродинамического типа". Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР № , 1980 г.