Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов,
А.А. Самарский

ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА В РЕЖИМАХ СЖАТИЯ θ– ПИНЧА С ОБОСТРЕНИЕМ

Препринт № 153 за 1980 г.

Москва.

В работе показано, что в режиме сжатия θ-пинча лайнером, схлопывающимся за конечное время по определенному закону, реализуются условия, приводящие к локализации тепла вдоль продольной оси пинча. Приведены значения продольных размеров пинча, соответтствующие термоядерным условиям, при которых потери энергии через торцы за счет электронной теплопроводности отсутствуют. С помощью простых физических оценок рассмотрены вопроон применимости используемой модели для описания плазмы.

§ I. Введение.

Ряд направлений в проблеме управляемого термоядерного синтеза (УТС) использует инерциальное удержание плазмы. В таком подходе остывание плазмы нагретой (и сжатой) быстрым вкладом энергии, определяется ее последующим газодинамическим разлетом, электронной теплопроводностью и, в ряде случаев, объемными потерями на излучение. Типичными представителями этого ряда являются, например, z- и θ-пинчи [1], лазерный термоядерный синтез (ЛТС) [2], и синтез на основе релятивистских электронных пучков [3].

Как известно, в установках типа θ-пинча наиболее существенными потерями энергии являются потери тепла за счет электронной теплопроводности через торцы [4,5]. Рассмотрение энергетического баланса плазмы, находящейся при термоядерных условиях, с учетом потерь тепла за счет продольной теплопроводности приводит к значениям длины пинча порядка сотен и тысяч метров [4,6]

В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности использования в системах инерционного удержания явления локализации тепла. Это явление исключает тепловые потери за счет теплопроводности ("инерция тепла").

Локализация возникает при определенном профилировании вклада энергии во времени, а именно, когда сжатие и нагрев осуществляются в режиме с обострением. Для случая θ-пинча с коэффициентами переноса, соответствующими полностью ионизованной плазме, такой режим описывается автомодельной задачей [7,8]. Подобный режим для θ-пинча без учета диссипативных процессов известен как режим оптимального (безударного) сжатия [8,9]. Аналогичные режимы имеют место и в проблеме ЛТС [8,10–12].

Сжатие и нагрев плазмы в θ-пинче может обеспечить схлопывающаяся цилиндрическая оболочка (лайнер) [13]. Если сжимать пинч лайнером, движущимся в режиме с обострением, то, как показано ниже, реализуются условия, приводящие к локализации тепла. Например, для температур ионов и электронов $T_i = T_e = T = 10^3$ эв плотности $N = 10^{20}$ см$^{-3}$ и критерия Лоусона $N\tau = 10^{14}$ см$^{-3}$ сек в области максимального сжатия и нагрева потерь на теплопроводность через торцы не будет уже при длине пинча 20÷30 метров (подробнее см. ниже § 4). При этом следует допустить наличие достаточно сильного поля, чтобы изолировать лайнер от горячей плазмы.

Условия применимости модели, используемой ниже для описания процесса сжатия плазмы и распространения тепла в пинче, проверены с помощью физических оценок. Влияние газодинамического движения вдоль продольной оси пинча учтено в работе с помощью рассмотрения двух предельных случаев (случай пинча без потерь массы и случай неизменной на концах пинча плотности вследствие больших потерь массы). Однако, для более строгих оценок продольных размеров пинча требуется проведение как минимум двумерных (по радиусу и продольной оси) расчетов динамики плазмы, сжимаемой лайнером.

Все численные значения в приведенных ниже оценках, если не оговорено противное, используют единицы СГСЭ и электронвольт для температуры.

Отметим, что рассмотрение проблемы УТС на основе θ-пинча в общем случае несравненно сложнее и требует изучения многочисленных физических процессов, например, диффузии вещества лайнера в плазму [14], излучения, магнитной изоляции лайнера, устойчивости плазменного столба.

На первых порах от проблемы устойчивости можно отвлечься. В ряде экспериментов с обостренным вкладом энергии сжатие θ-пинча происходит симметричным образом [15]. Наблюдаемое иногда в экспериментах по сильноточным разрядам появление в плазме вещества стенок разрядной камеры объясняется нагревом и испарением этих стенок излучением из плазмы [16, 17] при симметричном, отстоящим от стенок плазменном столбе. С другой стороны, улучшения устойчивости в линейном θ-пинче можно добиться введением дополнительного азимутального магнитного поля [4].

Останавливаясь на более простой модели, мы хотели выяснить возможность ограничения наиболее интенсивных для пинча потерь энергии – потерь за счет диффузии тепла вдоль столба плазмы. Уже в такой постановке задача содержит два аспекта: изучение возможности построения термоядерного реактора на этой основе и возможность обнаружения самого явления локализации тепла в пинче. Последний случай не предполагает выполнения термоядерных условий; должно лишь наблюдаться заметное увеличение электронной температуры (вопреки закону $T_e \sim \sqrt{L}$ [4, 6]) при превышении для продольной длины пинча L некоторого значения диффузионной длины, вычисленной в настоящей работе.

§ 2. Явление локализации тепла.

Ранее А.А.Самарским и И.М.Соболем было указано [18] на наличие у уравнения нелинейной теплопроводности решения, в котором тепло не проникает в холодную среду, занимающую полупространство $z>0$ и нагреваемую со стороны границы $z=0$, при сколь угодно большом со временем t росте температуры $T(0,t)$ на границе. В дальнейшем это явление локализации тепла было подробно изучено в [19,20]. Если коэффициент температуропроводности среды $\chi(T)$ есть степенная функция температуры $\chi(T)=\chi_0 T^{\sigma}$, то соответствующий граничный режим имеет вид [19,20]

$$T(0,t)=T_a(t_f-t)^n, \tag{1}$$

где $-\frac{1}{\sigma}\le n<0$, $T_a=const$. Режим (1), в котором момент фокусировки (обострения) $t_f=const$ – конечная величина, – является так называемым "режимом с обострением" [7,8,19,20]: при $t\to t_f$ температура $T(0,t)\to\infty$. При этом температура среды $T(z,t)$ остается равной нулю для всех $z>z_\varphi$, где величина z_φ не зависит от времени.

Рассматриваемая краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad \chi(T)=\chi_0 T^{\sigma} \tag{2}$$

при $t\ge t_0$ и нулевых начальных данных $T(z,t_0)=0$ является автомодельной, если $t_0=-\infty$. Время t изменяется от $t=t_0=-\infty$ до момента обострения $-\infty<t<t_f$. Без ограничения общности можно положить $t_f=0$ [20].

Случай $n=-\frac{1}{\sigma}$ соответствует S-режиму [19,20]. При этом решение задачи (1),(2) можно выписать в явном виде [18-20]. Тепло занимает область $0\le z\le z_\varphi$, где

$$z_\varphi=\sqrt{\frac{2(2+\sigma)}{\sigma}\chi_0 T_a^{\sigma}}. \tag{3}$$

При стремлении $t\to t_\varphi=0$ количество тепла в этой области, равно как и значение температуры в каждой ее точке, стремится к бесконечности, а для $z>z_\varphi$ температура в точности равна нулю. Если $t_0>-\infty$, $T(z,t_0)=0$, то задача (1),(2) неавтомодельна. Как показывают численные решения [19, 20], в этом случае наблюдается "выход" на автомодельное решение: температура и координата теплового фронта асимптотически стремятся соответственно к автомодельному решению [18-20] и величине (3) при $t \to 0$.

В случае $-\frac{1}{\sigma} < n < 0$ нагрев осуществляется в LS-режиме. При этом решения, реализуемые от конечного момента $t_0 > -\infty$ локализованы. Тепло не проникает в область $z > z_\varphi^{(LS)}$, где

$$z_\varphi^{(LS)} = \sqrt{\frac{2(2+\sigma)}{\sigma} \chi_0 T_a^\sigma (-t_0)^{1+n\sigma}} . \tag{4}$$

При $t \to 0$ температура обращается в бесконечность только в одной центральной точке $z = 0$, в остальных – ограничена до момента обострения предельной кривой $\lim\limits_{t \to 0} T(z,t) = Const\, z^{\frac{2n}{1+n\sigma}}$ с константой, зависящей от n, σ, T_a и χ_0.

При $-\frac{1}{\sigma} < n \leq -\frac{1}{\sigma+2}$ количество тепла в области локализации стремится к бесконечности, при $-\frac{1}{\sigma+2} < n < 0$ остается конечным для $t \to 0$. Условия установления автомодельных S- и LS-режимов для неавтомодельной задачи $(t_0 > -\infty)$ подробно исследованы численными методами в [20].

На основе численных исследований и строгих математических утверждений [21,22] показано, что явление локализации тепла не уничтожается наличием ненулевого фона $T(z, t_0) \neq 0$, нестепенными (но ограничиваемыми таковыми) зависимостями $\chi(T)$ от температуры и $T(0,t)$ от времени [20-22]. Оказалось возможным обобщить явление локализации тепла на случай среды с постоянным коэффициентом температуропроводности $\chi(T) = \chi_0 = const$ [23], если граничная температура меняется существенно более резко, чем по (1).

Явление локализации тепла может быть обязано не только граничному режиму, но и действию объемных источников тепла в безграничной среде. Источники, степенным образом зависящие от температуры и приводящие к локализации тепла рассмотрены в [24-26]. В частности, при определенных условиях, режим с локализацией тепла и горения возникает в плазме с электронной теплопроводностью и источником тепла от реакции слияния ядер дейтерия и трития [27]. С помощью математической теории [21,22] возможно перенесение результатов по локализации тепла и горения на случай объемных источников тепла нестепенного вида. Частные решения, обладающие свойством локализации, для уравнения нелинейной теплопроводности с источником, нестепенным образом зависящим от температуры, могут быть найдены с помощью методов теории групп [28].

Кроме рассмотренного здесь одномерного плоского случая, явление локализации тепла изучалось и в многомерной геометрии [I9, 20,29,30], а также в сферически-симметричном случае с дополнительной зависимостью коэффициентов теплоемкости и теплопроводности и источника тепла от координаты [3I]. Все принципиальные выводы о локализации сохраняются и в этих случаях.

§ 3. Режим сжатия плазмы, обеспечивающий локализацию тепла.

Для локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью необходим рост температуры в режиме с обострением вида (I). Такая зависимость температуры от времени может быть обеспечена определенным законом движения лайнера, сжимающего плазму в θ-пинче. В этом случае одномерное радиальное движение полностью ионизованной плазмы описывается автомодельной задачей [7,8,32].

Существенным для формулировки автомодельной задачи является наличие параметра конечной массы M_0 : масса плазмы, приходящаяся на единицу длины пинча конечна. Это позволяет провести характерные для данной автомодельности разделение временной и массовой (лагранжевой) переменных в системе уравнений магнитной гидродинамики. Любая величина $F_i(x,t)$, описывающая плазму и зависящая от времени t и массовой переменной x, имеет в данной автомодельности вид

$$F_i(x,t) = B_i t^{n_i} f_i(s), \quad s = \frac{x}{M_0}, \tag{5}$$

где B_i и n_i - размерные и безразмерные постоянные, а безразмерные функции f_i (представители размерных величин F_i) зависят от одной безразмерной переменной s. Массовая координата $x = \int_0^r \rho(r',t)\, r' dr'$, где r (и переменная интегрирования r') - эйлерова координата, ρ - плотность плазмы. В результате определяются зависимости от времени радиальной скорости v, давления p, продольного магнитного поля H, плотности ρ, других величин, описывающих плазму, а также закон изменения со временем радиуса r_* границы плазма-лайнер (лагранжева координата граничного радиуса r_* есть $x_* = M_0$).

Указанная автомодельная задача описывает сжатие плазмы до бесконечной плотности без возникновения в ней ударных волн. Автомодельный подход совершенно одинаково решает задачу безударного сжатия как для случая газовой динамики, так и для более сложного случая среды с диссипативными процессами. При этом в первом случае автомодельное решение совпадает о асимптотикой вблизи "коллапса" $(\rho \to \infty)$, полученной другими методами [9,11,33,34, 35] с использованием характеристик уравнений газовой динамики [35].

Для описания плазмы в работе используется следующая физическая модель , подробно описанная в [32]. Цилиндрически симметричный столб плазмы в продольном магнитном поле описывается уравнениями одножидкостной двухтемпературной сплошной среды с уравнениями состояния идеального газа и классическими коэффициентами переноса [36].

Анализ размерностей приводит к автомодельной задаче вида (5) со следующими зависимостями величин от времени.

$$
\begin{gathered}
r_* \sim (-t)^{4/5}, \quad v \sim (-t)^{-1/5}, \quad T_{e,i} \sim (-t)^{-2/5}, \\
H \sim (-t)^{-1}, \quad \rho \sim (-t)^{-8/5}, \quad p \sim (-t)^{-2}, \\
\varkappa_{e,i} \sim (-t)^{-1}, \quad \sigma_e \sim (-t)^{-3/5}, \quad \eta \sim (-t)^{-1}, \qquad (6) \\
\tau_{ei} \sim (-t), \quad j_\varphi \sim (-t)^{-9/5}, \quad W_{e,i} \sim (-t)^{-11/5}.
\end{gathered}
$$

Здесь j_φ – плотность азимутальных электрических токов, $W_{e,i}$ – потоки тепла, за счет электронной и ионной теплопроводностей, τ_{ei} – время релаксации температур. Коэффициенты электронной $\varkappa_e$ и ионной $\varkappa_i$ теплопроводностей, электронной проводимости σ_e и ионной вязкости η растут со временем. Здесь (см.§ 2) время изменяется в диапазоне $-\infty < t < 0$ и, увеличивается, стремится к нулю $(t \to 0)$. Введение "отрицательного времени" в формулы (5) для описания задач сжатия плазмы обосновано в [7,8,32].

Формулы (6) описывают изменение величин со временем в точке с данной лагранжевой координатой. Также изменяются со временем и средние по радиусу пинча температура, плотность и т.д. В соответствии с (6) меняются и граничные режимы. Также, как σ_e и $\varkappa_e$ меняются поперечные коэффициенты $\sigma_{e\perp}$ и $\varkappa_{e\perp}$ (поперек поля H), зависящие от безразмерного параметра $Y = \Omega_e \tau_e$, где Ω_e - ларморова частота, а τ_e - время свободного пробега электронов [36].

Заметим, что в автомодельной задаче (6) $\Omega_e \sim H \sim (-t)^{-1}$, $\tau_e \sim \tau_{ei} \sim (-t)$, так, что $Y = \Omega_e \tau_e \sim const$ и не зависит от времени.

Распределение величин по радиусу пинча определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений для f_i из (5) [7,8,32]. В дальнейшем мы не будем интересоваться распределением величин по радиусу и использовать в оценках средние по сечению пинча $<T_e>$, $<\rho>$ или $<N>$ и т.д.

Построение изложенной выше автомодельной задачи основывалось на определенной физической модели, имеющей конкретные условия применимости. Пусть начальное состояние плазмы удовлетворяет этим условиям. В работе [32] проверено сохраняются или нарушаются эти условия по мере развития автомодельного процесса сжатия. Приведем некоторые результаты.

Для гидродинамического описания плазмы существенны условия $\ell_e << r_*$ и $\tau_e << -t$, где $\ell_e \approx \bar{v}_e \tau_e$ ($\bar{v}_e \sim \sqrt{T_e}$ - средняя тепловая скорость электронов), причем $\ell_e \sim T_e^2/\rho$, $\tau_e \sim T_e^{3/2}/\rho$ [36,37]. Подставляя для T_e и ρ зависимости (6), получим, что $\ell_e/r_* \sim const$ и $\tau_e/(-t) \sim const$ не зависят от времени. Тем самым условие сплошности, будучи выполненным в начальный момент, не нарушается при сжатии (6).

Здесь и далее будем рассматривать только полностью ионизованную дейтериевую плазму (кратность ионизации $Z = 1$, атомный вес $A = 2$). Для любой смеси изотопов водорода ($Z=1$, атомный вес меняется от $A = 1$ до $A = 3$) оценки будут близкими. В этом случае плотности ионов и электронов равны: $N_i = N_e = N = \rho/m_i$, где m_i - масса иона.

При формулировке автомодельной задачи мы считали, что кулоновский логарифм $\Lambda = const$. Для начального состояния $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ и $T_0 = 10$ эв (или $T_0 = 100$ эв) значение Λ равно 8 (или 12), Анализ [32] показывает, что в этом случае величина Λ падает вследствие сжатия по законам (6) вдвое лишь при $<N>/N \sim 10^8$ (или 10^{11}). При этом плазма остается идеальной и невырожденной. Для указанных начальных данных при больших сжатиях электронная компонента плазмы становится вырожденным идеальным газом [32]. Плазма при автомодельном сжатии становится неидеальной, если при $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ в начальном состоянии $T_0 \lesssim 1$ эв (подробнее см.[32]).

Установим, насколько существенны потери на объемное излучение, неучтенные при формулировке автомодельных законов (6).

Длина пробега света (планковокая) $\ell_\gamma \sim T_e^{7/2} N^{-2} \sim (-t)^{9/5}$, если зависимости T_e и N от времени взять из (6). Отсюда находим, что отношение $\ell_\gamma/z_* \sim (-t)$ уменьшается со временем. Взяв числовые данные из [37], получим для $N_0 = 10^{16}$см$^{-3}$ и $T_0 = 10$ эв (или $T_0 = 100$ эв), что $\ell_\gamma \approx 10^9$ см (или 10^{13} см). Пусть начальный радиус пинча z_0 составляет $10 \div 10^2$ см. Тогда $\ell_\gamma/z_* \approx 10^8 \div 10^7$ (или $10^{12} \div 10^{11}$) в начальный момент $t = -t_0$ и плазма становится непрозрачной в момент времени $t = -t_\gamma$, когда $t_0/t_\gamma \approx 10^8 \div 10^7$ (или $10^{12} \div 10^{11}$). Это соответствует сжатиям $\langle N\rangle/N_0 = \left(\frac{t_0}{t_\gamma}\right)^{8/5} \gtrsim$ $\gtrsim 10^{11}$(или 10^{17}). Поэтому в процессе сжатия (6) плазму разумно считать прозрачной.

Оценим долю энергии, уносимой объемным тормозным излучением. Для этого сравним потери на объемное высвечивание $Q_R \approx 10^{22} \rho^2 \sqrt{T_e}$ $\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3\text{сек}}$ [37] с джоулевым нагревом. Величина последнего

$$Q_J = \frac{j_\varphi^2}{\sigma_{e\perp}} = \frac{c^2}{16\pi^2} \cdot \frac{(\mathrm{rot}\,\vec{H})^2}{\sigma_{e\perp}} \approx \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma_{e\perp}} \cdot \frac{H^2}{\ell_H^2} \approx \frac{H^2}{4\pi(-t)},$$

где характерная скиновая длина $\ell_H^2 = \nu_m(-t)$, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma_{e\perp}$

Для начального момента $t = -t_0 = 10^{-5}$ сек, если $N_0 = 10^{16}$см$^{-3}$, $T_0 = 10$ эв (или 100эв) и $H_0 = 500$ э , то отношение $Q_J/Q_R \approx 35$ (или 11). При осуществлении сжатия (6), отношение $Q_J/Q_R \sim (-t)^{2/5} \sim$ $\sim \sqrt{z_*} \sim 1/\langle T_e\rangle$ уменьшается со временем и потери на излучение сравниваются с джоулевым нагревом при сжатиях $\frac{\langle N\rangle}{N_0} \approx 10^6$ (или 10^4). Для тех же начальных данных и начальном моменте $t = -t_0 = 10^{-6}$ сек сток Q_R начинает превышать источник Q_J при сжатиях $\langle N\rangle/N_0 \gtrsim 10^{10}$ (или 10^8).

В [32] проанализированы условия развития возмущений несимметрии столба плазмы по азимутальному углу. Показано, что в режиме (6) возмущения не будут развиваться (произойдет их "размазывание" ионной вязкостью) при достаточно большом значении начального момента t_0 . Для $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ и $T_0 = 10$ эв (или 100 эв) и

r_0= 10 см возмущений не будет для $t_0 \lesssim 10^{-4}$ сек (или $4\cdot10^{-4}$сек) Отметим,что в случае более резкого, чем (6) роста температуры, возмущения несимметрии всегда буду затухать с некоторого момента времени сжатия [32].

§ 4. Локализация тепла вдоль продольной оси пинча при автомодельном режиме сжатия.

В θ-пинче с открытыми концами происходит выброс существенной доли массы через торцы. Также имеются потери энергии за счет теплопроводности вдоль продольной оси z пинча.

Пусть в центральной части пинча осуществляется автомодельный режим (6), а в торцевых участках плотность постоянна по оси z Распространение тепла от горячей центральной части в торцевом участке описывается уравнениями (2), где

$$T = T_e\,, \quad \chi(T) = \chi_0\, T_e^{5/2} \tag{7}$$

Для электронной теплопроводности $\chi_0 \approx 10^{20} N_1^{-1}$ см/сек эв$^{5/2}$, где N_1- плотность частиц в торцевом участке (Λ = 10). Пусть плоскость z = 0 разграничивает горячую центральную часть (где осуществляется режим (6)) и торцевой участок ($z > 0$), где профиль температуры определяется (2),(7). При $z = 0$ задано граничное условие (1), где $T_q = T_0(+t_0)^{-n}$ и, в соответствии с (6), n = - 2/5. В момент времени $t = -t_0$ значение температуры равно начальному T_0 . В данном случае в (2) σ = 5/2, поэтому режим (1) с $n = -\frac{2}{5}$ является S -режимом для задачи (1),(2),(7) и профиль T_e будет локализованным. Вычисление глубины локализации (3) с учетом значения χ_0 из (7) дает:

$$z_{q0} = L_1 \approx 2\cdot10^{10}\sqrt{T_0^{5/2}\, t_0\, N_1^{-1}}\,. \qquad \text{см.} \tag{8}$$

При длине торцевого участка L_1 на конце пинча температура и тепловой поток обращаются в нуль, как бы велика ни стала температура горячей центральной части. Если длина последней L_0 , то полная длина пинча, в котором потери тепла с торцов отсутствуют, есть $L = L_0 + 2L_1$. К моменту $t = -\tau$ в центральной части будет достигнута температура $\langle T_e \rangle = T_0(\tau/t_0)^{-2/5}$.Если к этому моменту сжатие и нагрев (6) прекращаются, то, как показано в [19,20] , указанная температура удержится в системе не менее времени τ.

Проведем некоторые численные оценки. Будем считать сначала, что плотность N_1 в торцевых участках за счет стока массы не меняется со временем: $N_1 = N_0$, где N_0 – начальная (на момент $t=-t_0$) плотность. Поскольку в силу (6) справедливо $T_0 t_0^{2/5} = \langle T_e \rangle \tau^{2/5}$, то (8) можно переписать в эквивалентном виде

$$L_1 = 2\cdot 10^{10}\sqrt{\langle T_e \rangle^{5/2}\,\tau N_0^{-1}}\ \text{см}. \tag{9}$$

Пусть теперь мы располагаем начальными значениями T_0 и N_0 и в процессе сжатия хотим достигнуть заданных значений $\langle T_e \rangle$ и критерия Лоусона $\varphi = \langle N \rangle \tau$. Определим, каковы будут при этом параметры режима с обострением (6) и значение L_1 . Используя (8),(9) и следующее из (6) выражение для сжатия $\frac{\langle N \rangle}{N_0} = \left(\frac{\langle T_e \rangle}{T_0}\right)^4$, получим систему для определения величин t_0 , τ и L_1:

$$t_0 = \varphi_1 \frac{T_0^{3/2}}{N_0}, \qquad \tau = \varphi_1 \frac{T_0^4}{N_0}\langle T_e \rangle^{-5/2},$$

$$L_1^2 = 4\cdot 10^{20}\varphi_1 \frac{T_0^4}{N_0^2}, \quad \varphi_1 \equiv \varphi \langle T_e \rangle^{-3/2}. \tag{10}$$

Вычисления по формулам (10) сведены в таблицу для начальных данных T_0 = 100 эв, $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ и τ_0 =10см:

	10^{13}	10^{14}	10^{15}	φ / $\langle T_e \rangle$	
$L_1 =$	$3{,}56\cdot 10^2$	$1{,}13\cdot 10^3$	$3{,}56\cdot 10^3$		$\frac{\langle N \rangle}{N_0} = 10^4$,
$t_0 =$	$3{,}16\cdot 10^{-5}$	$3{,}16\cdot 10^{-4}$	$3{,}16\cdot 10^{-3}$	1кэв	
$\tau =$	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}		$\tau_* = 0{,}1$
$L_1 =$	$6{,}3\cdot 10^1$	$2\cdot 10^2$	$6{,}3\cdot 10^2$		$\frac{\langle N \rangle}{N_0} = 10^8$,
$t_0 =$	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10 кэв	
$\tau =$	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}		$\tau_* = 10^{-3}$

Как видно, достижение больших сжатий $\langle N \rangle / N_0$ (при фиксированных начальных условиях) уменьшает L_1 .

При $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ и T_0 = 100 эв время выравнивания $\tau_{ei} \approx$

$\approx$ $3\cdot10^{-6}$сек. Поэтому практически для всех оценок (кроме соответствующей $\langle T_e\rangle$ =10 кэв и φ = 10^{13}) можно считать $T_e \simeq T_i$. Длина пробега ℓ_e для данных T_0 и N_0 составляет 2,5 см. Значение Λ в оценках близко к Λ =10. Для верхней части таблицы (t_0/τ = 316) поле возрастает от H_0 =500э до $H \approx$ 160 кэ. При этом замагниченность $Y \approx 35$ ($\varkappa_\parallel/\varkappa_\perp \approx 800$).

Если задаться длиной торцевого участка L_1, то из (10) определяются временные характеристики сжатия:

$$t_0=\frac{L_1^2}{a T_0^{5/2}}, \qquad \tau=\frac{L_1^2}{a\langle T_e\rangle^{5/2}}, \qquad a=4\cdot10^{20}. \tag{11}$$

Для $L_1 = 10^3$ см и $\langle T_e\rangle = 10^4$ эв получаем $\tau \approx 2{,}5\cdot10^{-9}$ сек. Если при этом T_0 = 100 эв ($\langle N\rangle/N_0=10^8$), то $t_0 \approx 2{,}5\cdot10^{-4}$ сек, если же $T_0 = 10^3$ эв ($\langle N\rangle/N_0 = 10^4$), то $t_0 \approx 7{,}9\cdot10^{-7}$ сек.

В обсуждаемой здесь модели локализации тепла к концу сжатия $(t=-\tau)$ на границе $(z=0)$ между горячей центральной и торцевой частями создается скачок плотности $\langle N\rangle/N_0 \gg 1$. Распад этого разрыва приведет к движению волны разрежения внутрь сжатой части и к ударной волне, двигающейся к торцу пинча. Как показывает анализ этой газодинамической задачи, волна разрежения движется со скоростью звука $v_з$ в горячей части, а скорость ударной волны $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}_\infty = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v_s$ ($\mathcal{D}_\infty$ соответствует $N_0/\langle N\rangle = 0$). Остановимся на той оценке таблицы, в которой $\langle T_e\rangle = 10^3$ эв, $\varphi = 10^{14}$. При этом, как было показано, $T_e = T_i$. Тогда $v_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{kT_i}{m_i}} \approx 1{,}8\cdot10^7$ см/сек, а $\mathcal{D}_\infty \approx 1{,}1\cdot10^8$ см/сек. Для значения $L_1 = 1{,}1\cdot10^3$ см, соответствующего этой оценке, получим, что ударная волна проходит по торцевому участку L_1 за время $t_{ув} \approx 10^{-5}$сек = 10 τ. Волны разрежения, двигаясь с обеих концов центральной части, сойдутся за время $t_{вр} > 10^{-5}$ сек, если $L_0 > 6\cdot10^2$ см.

В изложенной модели отношение L_0/L и полная длина пинча L определяются долей выброшенной массы ψ_1. Легко видеть, что доля оставшейся массы $\psi_0 = \frac{L_0}{L} + \frac{2L_1 N_0}{L\langle N\rangle}$, при $\langle N\rangle \gg N_0$, $\psi_0 \approx \frac{L_0}{L}$. Тогда $\psi_1 = 1-\psi_0 \approx 2L_1/L = \frac{2L_1/L_0}{1+2L_1/L_0}$, откуда $L_0 \approx 2L_1\frac{1-\psi_1}{\psi_1}$ и $L = L+2L_1 \approx 2L_1\psi_1^{-1}$

При $\psi_1 = \frac{2}{3}$ имеем $L_0 \approx L_1$. Для больших ψ_1 будет $L_0 < L_1$

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда потерь массы нет вообще. Тогда по всей длине пинча наблюдается рост плотности по закону (6): $\langle N\rangle = N_0\left(-\frac{t_0}{t}\right)^{8/5}$. Теперь в (7) $N_1 = \langle N\rangle$ и уравнение (2) приобретает вид

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\chi}_0 T_e^{5/2}(-t)^{8/5}\frac{\partial T_e}{\partial z}\right), \tag{I2}$$

где $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 t_0^{-8/5}$, $\chi_0 = 10^{20} N_0^{-1}\,\text{см}^2\text{сек}^{-1}\text{эв}^{-5/2}$ (по- прежнему считаем $\langle N\rangle$ не зависящей от z).

Аналогично (2) рассмотрим формально уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\chi}_0 T^{\sigma}(-t)^{\beta}\frac{\partial T}{\partial z}\right), \sigma>0, \beta>0. \tag{I3}$$

Можно показать, что S -режимом для (I3) будет (I) с $n = n_0 = -\frac{1+\beta}{\sigma}$. Решение соотвеpствующей автомодельной задачи дает значение $z_\varphi = \left[\frac{2(\sigma+2)}{\sigma(1+\beta)}\tilde{\chi}_0 T_a^{\sigma}\right]^{1/2}$. Выражая T_a через начальную температуру $T_0 = T_a t_0^{n_0}$ и $\tilde{\chi}_0$ через $\chi_0 = \tilde{\chi}_0 \cdot t_0^{\beta}$, находим

$$z_\varphi = \sqrt{\frac{2(\sigma+2)}{\sigma(1+\beta)}\chi_0 T_0^{\sigma} t_0}\,. \tag{I4}$$

Режим (I) с $n = -\frac{1}{\sigma}$ теперь для (I3) является LS -режимом. Формула (I4) полностью аналогична глубине проникновения тепла в LS-режиме (4), если в (4) произвести замену $T_0 = T_a(-t_0)^{n}$. Сравнивая (I4) с (4) видим, что явная зависимость $\chi \sim (-t)^{\beta}$, $\beta > 0$, привела к сокращению глубины прогрева в $\sqrt{1+\beta}$ раз.

Вводя этот множитель $\sqrt{1+\beta} \approx 1{,}61$ (для $\beta = 8/5$) в (8) или (9), получим, что

$$L_1 \approx 1{,}3\cdot 10^{10}\sqrt{\langle T_e\rangle^{5/2}\tau N_0^{-1}}\ \text{см} \tag{I5}$$

в модели с растущей по (6) плотностью в торцевых участках. Для $\langle T_e\rangle = 10^3$ эв, $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ и $\tau = 10^{-6}$сек , получим $L_1 \approx 7\cdot 10^2$ см. Поскольку потерь массы в рассматриваемой модели нет, то минимальная полная длина пинча без потерь тепла с торцов $L = 2L_1$.

§ 5. Модельный учет потерь на электронную теплопроводность через торцы при автомодельном режиме сжатия.

Даже при автомодельном режиме сжатия (6) в случае длины торцевого участка, меньшей L_1 будут наблюдаться потери тепла через торцы. Эти потери иногда моделируются в одномерной модели (не рассматривается зависимость величин от z) стоком Q_z, добавляемым в правую часть уравнения для энергии электронов [5]. Предполагая профиль температуры линейно падающим от максимального значения в центре пинча до нуля на торцах, получим

$$Q_z = -\frac{\varkappa_e T_e}{\ell^2} = -\frac{\varkappa_0}{\ell^2} T_e^{7/2}, \qquad (16)$$

где $\varkappa_0 \approx 3{,}1 \cdot 10^8$ эрг см$^{-1}$сек$^{-1}$эв$^{-7/2}$ для $\Lambda \approx 10$, $\ell = \frac{L}{\sqrt{8}} \approx 0{,}35 L$ – приведенная длина пинча, а T_e – средняя по пинчу вдоль оси z электронная температура.

При изменении T_e по (6) сток $Q_z \sim (-t)^{-7/5}$. Так как в силу (6) джоулев нагрев $Q_J \sim (-t)^{-3}$ (см. § 3), находим, что отношение $\mathcal{E} = Q_z/Q_J \sim (-t)^{8/5} \sim N_0/\langle N \rangle$ уменьшается обратно пропорционально степени сжатия.

На начальный момент $t_0 = 3{,}16 \cdot 10^{-4}$ сек для $T_0 = 100$ эв, $N_0 = 10^{16}$ см$^{-3}$ и $H_0 = 500$ э (см. таблицу в § 4) получаем

$$\mathcal{E}_0 = \frac{4\pi \varkappa_0 T_0^{7/2} t_0}{\ell^2 H_0^2} \approx \frac{4{,}9 \cdot 10^7}{\ell^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_0 < 1$$

при $\ell > 7 \cdot 10^3$ см ($L > 190$ метров). При этих начальных данных (см. § 4) $L_1 \approx 11$ метров и $L > 22$ метров. Из требования $\mathcal{E}_0 < 1$ и формул (6) следует, что при дальнейшем сжатии всегда будет $Q_J > Q_z$.

Начиная с некоторого значения длины пинча профиль T_e вдоль оси z определяется самими процессами диффузии. Если при этом осуществляется локализующий тепло режим (6), то при $\ell > \ell_T$ потерь тепла с торцов не будет. Здесь характерная глубина диффузии тепла ℓ_T по порядку величины равна $\sim \sqrt{\chi \cdot (-t)} \sim L_1$.

Из выражения (16) легко видеть, что $\mathcal{E} = \frac{Q_z}{Q_J} \approx \frac{\ell_T^2}{\ell^2} \beta$, где $\beta = \frac{8\pi p}{H^2}$, если считать $p_e = N_k T_e \approx p$

в силу $T_e \approx T_i$.Для $\ell_T > \ell$ (что по порядку величины соот ветствует $L < 2L_1$) величина отношения ε убывает с ростом ℓ стремясь к величине, порядка β . Для $\ell > \ell_T$ (т.е. когда длина пинча L превосходит минимальную диффузионную длину $2L_1$) потер тепла на теплопроводность через торцы нет. В случае наличия пс терь $\left(\frac{\ell_T}{\ell} \sim \frac{2L_1}{L} > 1 \right)$ джоулев нагрев может быть сделан больше величины потерь за счет выбора значения $\beta < 1$.

Литература

1. Тамм И.Е., Сахаров А.Д. Теория магнитного термоядерного реактора. В сб."Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.I, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр.3.
2. Басов Н.Г., Крохин О.Н. ЖЭТФ, т.46, № I, I7I(I964).
3. Winterberg F. Phys.Rev., v.174, no.1, 212 (1968).
4. Зукакишвили Г.Г. Экспериментальное исследование плазмы в пинчевых разрядах. Кандидатская диссертация. Тбилиси, Ин-т физики АН ГССР, 1979(I60 стр.).
5. Волосевич П.П., Зукакишвили Г.Г., Лацабидзе Г.С. и др. Численные эксперименты по тета-пинчу. Препринт Ин-т прик. матем.АН СССР, 1979, № 47.
6. Green T.S., Fisher D.L., Gabriel A.H. et al. Phys. of Fluids, v.10, no.8, 1663 (1967).
7. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы в задачах и -пинча. Препринт Ин.прикл.матем.АН СССР, 1974, № I9. Деп. в ВИНИТИ, № 3398-75 Деп.
8. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. ПМТФ, № I, 3(I977).
9. Жданов С.К., Трубников Б.А. Письма в ЖЭТФ, т.2I, № 6,37I (I975).
10. Nuckolls J., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G. Nature, v.239, nö.5368, 139 (1972).
11. Kidder R.E. Nuclear Fusion, v.14, no.1, 53 (1974)
12. Clarke J.S., Fisher H.N., Mason R.J. Phys. Rev. Letters, v.30, no.3, 89 (1973).
13. Alikhanov S.G., Konkashbaev I.K., Chebotaev P.Z. Nuclear Fusion, v.10, no.1, 13 (1970).
14. Вехштейн Г.Е., Рютов Д.Д., Чеботаев П.З. Физика плазмы, т.I, № 3, 40I (I975).
15. Buftzev V.A., Berezin A.B., Zhukov A.P. et al. Nuclear Fusion, v.17, no.5, 887 (1977).
16. Kvartskhava I.Fi, Matveev Yu.V. Nuclear Fusion, v.11, no.4, 385 (1971).
17. Данилова Г.В., Курдюмов С.П., Попов Ю.П. и др. Расчет сильноточных разрядов с учетом эффекта вторичного пробоя. Препринт Ин.прикл.матем.АН СССР, 1974, № 6.

18. Самарский А.А., Соболь И.М. ЖВММФ, т.3, № 4, 702(1963).
19. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Докл.АН СССР, т.223, № 6, 1344 (1975).
20. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте. Препринт Ин.прикл.матем.АН СССР, 1977, № 103.
21. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А., ЖВММФ, т.19, № 6, 1451(1979).
22. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности. Препринт Ин.прикл.матем. АН СССР, 1979, № 181.
23. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Докл.АН СССР, т.247, № 2, 349 (1979).
24. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Докл.АН СССР, т.227, № 2, 321(1976).
25. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В. и др. Докл.Ан СССР, т.237, № 6, 1330(1977).
26. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А., Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения. Препринт Ин.прикл.матем. АН СССР, 1976, № 74.
27. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Письма в ЖЭТФ, т.26, № 9, 620 (1977).
28. Дородницын В.А., Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком. Препринт Ин.прикл.матем,АН СССР, 1979, № 57.
29. Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Плохотников К.Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Препринт Ин.прикл.матем. АН СССР, 1977, № 22.
30. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А. и др. Взаимодействие тепловых структур. Препринт Ин.прикл.матем. АН СССР, 1978, № 77.
31. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Диссипативные структуры в среде с распределенными параметрами. Препринт Ин.прикл.матем.АН СССР, 1979, № 16.
32. Змитренко Н.В. Автомодельные режимы сжатия конечной массы плазмы. Кандидатская диссертация. Москва, ИПМ АН СССР, 1978(157 стр.).

33. Анисимов С.И. Письма в ЖЭТФ, т.16, № 10, 570(1972).
34. Каждан Я.М. ПМТФ, № 1, 23(1977).
35. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., "Наука", 1971, стр.229.
36. Брагинский С.И. ЖЭТФ, т.33, № 2, 459(1957).
37. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П."Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений", М., "Наука", 1966.