В.А. ГАЛАКТИОНОВ, С.П. КУРДЮМОВ, А.П. МИХАЙЛОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$

В работе исследуются некоторые свойства решений задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения

$$(1)\quad Au = u_t - \nabla(u^\sigma \nabla u) - u^\beta = 0, \quad (t, x) \in Q_T = [0, T) \times \mathbf{R}^N,$$

$$(2)\quad u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}^N), \quad \sup_x u_0 < +\infty,$$

где $\nabla(\cdot) = \mathrm{grad}_x(\cdot)$ и $\sigma > 0$, $\beta > 1$ – заданные постоянные.

Уравнение (1) описывает процесс горения в неподвижной среде, коэффициент теплопроводности $k(u) = u^\sigma$ и мощность объемных источников тепла $Q(u) = u^\beta$ которой степенным образом зависят от $u(t, x)$ – температуры среды.

В работах ([1-5]) задача (1), (2) изучалась с помощью построения ее частных аналитических, автомодельных решений, а также методом осреднения, и был установлен целый ряд их необычных свойств: неограниченность, метастабильная локализация и др.

В настоящей работе некоторые из качественных результатов ([1-5]) обосновываются построением оценок решения задачи (1), (2) снизу и сверху, которые позволяют проследить его эволюцию во времени.

Результаты, полученные применительно к уравнению (1), позволяют исследовать свойства решений уравнений типа (1) с нестепенными коэффициентами $k(u)$, $Q(u)$ с помощью методов сравнения решений параболических уравнений ([6-8]).

Мы будем считать, что ограниченная функция $u_0(x)$, тождественно равная нулю вне некоторого круга $\|x\| \leqslant l < +\infty$, удовлетворяет условию $u_0(0) > 0$. В задаче (1), (2) имеет место конечная скорость распространения возмущений и, как известно ([9], [10]), задача может не иметь решения с гладкостью, предписываемой самим уравнением. Следуя ([9], [10]), будем называть неотрицательную и ограниченную функцию u: $Q_T \to \mathbf{R}^1_+$ обобщенным решением задачи (1), (2), если $u(t, x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$ для всех $t \in [0, T)$, при любых $t \in [0, T)$ существует и принадлежит $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N)$ обобщенная производная $\nabla u^{\sigma+1}(t, x)$, для всех финитных по x функций φ: $Q_T \to \mathbf{R}^1$, $\varphi \in C^{1,2}_{t,x}(\bar{Q}_T)$, равных нулю вблизи $t = T$, выполняется тождество

$$\iint_{Q_T} \{u^\sigma \nabla u \nabla \varphi - u\varphi_t - \varphi u^\beta\}\, dt\, dx = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(0, x) u_0(x) dx.$$

Обобщенное решение будем называть неограниченным в Q_T, если $\max_x u(t, x) \to +\infty$ при $t \to T^- < +\infty$. Так же как в ([1-5]), назовем неограниченное решение локализованным (метастабильно), если для некоторого $L < +\infty$ и всех $t \in [0, T)$ выполняется условие: $u(t, x) \equiv 0$ при $\|x\| \geqslant L$. Множество $\mathrm{supp}\, u(T^-, x)$ в этом случае будем называть областью локализации. Если же найдутся для любого $L < +\infty$ такие $x \in \mathbf{R}^N$ и $t \in [0, T)$, что $\|x\| > L$ и $u(t, x) > 0$, то локализация неограниченного решения отсутствует, т.е. при $t \to T^-$ возмущения проникают как угодно далеко от точки $x = 0$.

При доказательстве сформулированных здесь утверждений мы будем предполагать, что обобщенное решение задачи (1), (2) существует и единственно (последнее оправдано выпуклостью функции u^β при $\beta > 1$) ([9], [10]), удовлетворяет уравнению (1) в обычном смысле во всех точках, где $u > 0$, и имеет в Q_T непрерывную производную $\nabla u^{\sigma+1}$ ([9-12]). Основные результаты настоящей работы сформулированы в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть $\beta < 1+\sigma+2/N$. Тогда существует такое $T<+\infty$, что в Q_T решение задачи* (1), (2) *является неограниченным.*

Теорема 2. *Пусть $\beta > 1+\sigma+2/N$. Тогда при достаточно малых $u_0(x)$ задача* (1), (2) *имеет решение, существующее при всех $t>0$ (т.е. в Q_∞), причем $\max\limits_x u(t,x) \leqslant At^{-1/(\beta-1)}$ при $t\to+\infty$, где A – некоторая положительная постоянная.*

Теорема 3. *Пусть $\beta<1+\sigma$. Тогда любое неограниченное в Q_T решение задачи* (1), (2) *не является локализованным.*

Доказательство первых двух теорем опирается на следующую лемму, в которой через D_T обозначена область $[0,T)\times\{x\colon \|x\|<\zeta(t)\}$, где $\zeta(t)\in C([0,T))$ – некоторая неотрицательная функция.

Лемма. *Пусть $u(t,x)$ – обобщенное решение задачи* (1), (2), *а функция $z\colon D_T\to\mathbf{R}^1_+$, $z\in C^{1,2}_{t,x}(D_T)\cap C(\bar D_T)$, $z\equiv0$ всюду в $Q_T\setminus D_T$, удовлетворяет в D_T неравенству $\mathrm{A}z\leqslant0$ ($\mathrm{A}z\geqslant0$). Пусть, кроме того, в Q_T непрерывна производная $\nabla z^{\sigma+1}$ и $z(0,x)\leqslant u_0(x)$ ($z(0,x)\geqslant u_0(x)$) в $\mathbf{R}^N$. Тогда $u\geqslant z$ (соответственно $u\leqslant z$) всюду в Q_T.*

Эта лемма доказывается методами, изложенными, например, в ([10]). Следуя ([13]), функцию z назовем обобщенным нижним (соответственно верхним) решением задачи (1), (2).

Доказательство теоремы 1. Определим в области D_{T_0}, для которой положим $\zeta(t)=a(T_0-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}$, функцию

$$z(t,x)=(T_0-t)^{-1/(\beta-1)}A\left[1-\|x\|^2\zeta^{-2}(t)\right]^{1/\sigma}, \tag{3}$$

где T_0, A, a – положительные константы, причем

$$\frac{4A^\sigma}{\sigma a^2}>\frac{(\sigma+1)-\beta}{\beta-1};\quad A^{\beta-1}\geqslant\frac{1}{\sigma}\left\{1+\frac{2A^\sigma}{a^2}\left(N+\frac{2}{\sigma}\right)\right\}^{(\beta+\sigma-1)/\sigma}\left\{\frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{4A^\sigma}{a^2}\right\}^{(1-\beta)/\sigma}, \tag{4}$$

и положим $z\equiv0$ в $Q_{T_0}\setminus D_{T_0}$. Система неравенств (4) имеет решение при всех $\sigma>0$ и $\beta>1$. Тогда z является нижним решением задачи в Q_{T_0}, и, как следует из леммы, $u\geqslant z$ в Q_{T_0}, если $u_0(x)\geqslant z(0,x)$ в $\mathbf{R}^N$. Отсюда будет следовать и неограниченность $u(t,x)$ в Q_T для некоторого $T\leqslant T_0$, поскольку $\max\limits_x z(t,x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-$. Покажем, что при $\beta<1+\sigma+2/N$ любое решение задачи (1), (2) по истечении конечного времени будет мажорировать функцию $z(0,x)$ при некотором $T_0<+\infty$. Для этого рассмотрим аналитическое решение ([14]) уравнения

$$v_t=\nabla(v^\sigma\nabla v),$$

которое в N-мерном случае имеет вид

$$v(t,x)=(T_1+t)^{-N/(N\sigma+2)}\theta(\xi),\quad \xi=\|x\|(T_1+t)^{-1/(N\sigma+2)} \tag{5}$$

где

$$\theta(\xi)=\left\{\left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}\right](\xi_0^2-\xi^2)\right\}^{1/\sigma}$$

при $|\xi|<\xi_0$ и $\theta(\xi)\equiv0$ для $|\xi|\geqslant\xi_0$. Здесь T_1 и ξ_0 – произвольные положительные постоянные. Выберем T_1 и ξ_0 такими, чтобы $u_0(x)\geqslant v(0,x)$ в $\mathbf{R}^N$. Тогда $u(t,x)\geqslant v(t,x)$ в Q_{T_0}. Из характера зависимости функции (5) от t следует, что при $\beta<1+\sigma+2/N$ всегда найдутся такие $T_2\geqslant T_1$ и $T_0<+\infty$, что

$v(T_2, x) \geqslant z(0,x)$ в $\mathbf{R}^N$. Тогда $u(T_2, x) \geqslant z(0,x)$ и, следовательно, по истечении конечного времени $T \leqslant T_0 + T_2$ решение задачи (1), (2) станет неограниченным.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим в области D_∞, для которой $\xi(t) = a(T_0 + t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}$, функцию

$$(6) \qquad z(t,x) = (T_0+t)^{-1/(\beta-1)} A(1 - \|x\|^2 \xi^{-2}(t))^{1/\sigma},$$

где T_0, A, a — положительные константы, причем

$$(7) \qquad \frac{4A^\sigma}{\sigma a^2} \leqslant \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\beta-1)}; \quad A^{\beta-1} \leqslant \frac{2A^\sigma N}{\sigma a^2} - \frac{1}{(\beta-1)},$$

и положим $z \equiv 0$ в $Q_\infty \setminus D_\infty$. Система неравенств (7) при $\beta > 1 + \sigma + 2/N$ всегда имеет решение. Функция (6) является верхним решением задачи (1), (2) в Q_∞, если $u_0(x) \leqslant z(0,x)$ в $\mathbf{R}^N$, и $u \leqslant z$ всюду в Q_∞. Выполнение последнего неравенства обеспечивает существование обобщенного решения задачи (1), (2) всюду в Q_∞, причем $\max\limits_x u(t, \cdot) \leqslant A(T_0+t)^{-1/(\beta-1)}$ при всех $t > 0$.

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $U(r)$ решение краевой задачи

$$(8) \qquad r^{1-N}(r^{N-1}U^\sigma U')' + U^\beta = 0, \quad U(0) = U_0, \quad U'(0) = 0,$$

где $U_0 > 0$ — заданная постоянная. Эта задача определяет стационарные решения уравнения (1), зависящие только от $r = \|x\|$. Задача (8) при любом U_0 имеет неотрицательное решение, существующее для всех $r \in [0, R]$, где

$$R = R(U_0) < \infty, \quad R(U_0) \geqslant [2U_0^{(\sigma+1)-\beta} N/(\sigma+1)]^{1/2} \to +\infty$$

при $U_0 \to +\infty$ и $\beta < 1 + \sigma$. Выберем теперв U_0 таким, чтобы $R(U_0) > l$ и $u_0(x) \leqslant U(\|x\|)$ для всех $\|x\| < R(U_0)$. Тогда в силу неограниченности $u(t,x)$ существуют такие $t_0 \in (0, T)$ и $\|x_0\| > R(U_0)$, что $u(t_0, x_0) > 0$. Устремляя теперь величину U_0 к бесконечности, получаем, что возмущения при $t \to T^-$ проникают как угодно далеко от точки $x = 0$.

В заключение отметим, что условия существования неограниченных решений полулинейного уравнения (1), соответствующего $\sigma = 0$, изучались в ([8], [15]). В ([8]), кроме того, рассматривались вопросы, связанные с локализацией его неограниченных решений.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
18 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов и др.*, Препринт Инст.прикл. матем. АН СССР, № 74 (1976). [2] *А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др.*, ДАН, т. 227, № 2, 321 (1976). [3] *А.А. Самарский, Г.Г. Еленин и др.*, ДАН, т. 237, № 6, 1330 (1977). [4] *Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов*, Журн. прикл.мех. и техн.физ., № 1, 3 (1977). [5] *С.П. Курдюмов*, Препринт инст. прикл. матем. АН СССР, № 29 (1979). [6] *В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов и др.*, Журн.вычисл.матем. и матем.физ., т. 19, № 6, 1451 (1979). [7] *В.А. Галактионов*, Препринт Инст. прикл. матем. АН СССР, № 151 (1979). [8] *В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов и др.*, там же, № 21, № 28, № 161 (1979). [9] *О.А. Олейник, А.С. Калашников, Чжоу Юй Линь*, Изв. АН СССР, сер.матем., т. 22, № 5, 667 (1958). [10] *А.С. Калашников*, Журн.вычисл.матем. и матем.физ., т. 14, № 4, 891 (1974). [11] *D.G. Aronson*, SIAM J. Appl.Math., v. 12, 461 (1969). [12] *А.С. Калашников*, Вестн. МГУ, сер. матем. и мех., № 1, 62 (1974). [13] *D.H. Sattinger*, Indiana Univ.Math.J., v. 21, 979 (1972). [14] *Я.Б. Зельдович, А.С. Компанеец*, Сб.: посвящ. семидесятилетию акад. А.Ф. Иоффе, М., Изд. АН СССР, 1950. [15] *H. Fujita*, J. Faculty Science U.Tokyo, v. 13, 109 (1966).