ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 20 Март 1980 Апрель № 2

УДК 519.633

ПРИМЕНЕНИЕ ТОЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ К ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ

В. Л. МАКАРОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Киев, Москва)

Рассматривается метод прямых для уравнений в частных производных, основанный на аппроксимации части дифференциального оператора некоторыми конечно-разностными соотношениями. С помощью оператора точных разностных схем установлена скорость сходимости приближенного решения при естественных требованиях на гладкость решения исходной задачи, обеспечивающих его существование.

Введение

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных методу прямых. Обзор их по состоянию на 1965 год см. в [1]. Условно разобьем все схемы метода прямых на два класса. К первому классу отнесем схемы, основанные на аппроксимации части дифференциального оператора с помощью конечно-разностных соотношений, ко второму — схемы, построенные на аппроксимации части дифференциального оператора на основе вариационно-проекционного метода. Относительно второго класса можно сказать, что уже известен целый ряд результатов, в которых в норме L_2 установлены оценки скорости сходимости при естественных требованиях на гладкость решения исходной дифференциальной задачи. Отметим, что эти результаты получены только для уравнений параболического и эллиптического типов (см. [2, 3] и имеющуюся там литературу). Для первого же класса схем метода прямых подобные результаты в литературе отсутствуют. Известный традиционный подход к получению оценок скорости сходимости приводит к тому, что от решения дифференциальной задачи требуется слишком высокая гладкость, которой, как правило, на самом деле нет. Причиной является то, что в соответствующие априорные оценки погрешность аппроксимации входит в форме, содержащей производные высокого порядка от решения исходной задачи. В данной работе предлагается новый подход к оценке сходимости схем метода прямых из первого класса, основанный на использовании точных разностных схем, введенных впервые в [4, 5]. Такой подход позволяет получить оценки скорости сходимости такого же порядка и при тех же предположениях о гладкости решения исходной дифференциальной задачи, как и для схем метода прямых второго класса [2, 3]. Помимо этого здесь возникает ряд новых моментов, на которые следует обратить внимание. Прежде всего, оценки

скорости сходимости получаются в нормах более сильных, чем в L_2. Далее, предложенный в работе подход позволяет (исходя из работ [6, 7]) получить аналогичные результаты для систем дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений высших порядков, а также распространить их на квазилинейные уравнения.

§ 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Предварительно приведем некоторые результаты из теории точных разностных схем.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=-f(x), \qquad x\in(0,1),$$

(1.1)

$$u(0)=a, \qquad u(1)=b, \qquad p(x)=1/k(x).$$

Пусть выполняются

Условия А:

а) $0<\nu\leqslant k(x)\leqslant\mu$, ν, $\mu=\text{const}$ и $k(x)$ — суммируемая функция на отрезке $[0, 1]$;

б) $\|q\|_{L_s(0,\,1)}\leqslant\mu<\infty$, $s\geqslant1$, $q(x)\geqslant0$;

в) $f(x)\in L_t(0,\,1)$, $t\geqslant1$, где $L_p(0,\,1)$ — пространство функций, суммируемых с p-й степенью.

При выполнении этих условий решение задачи (1.1) в обобщенном смысле существует, единственно и принадлежит классу $W_2^1(0,\,1)$. Ниже приведено доказательство этого результата, поскольку он имеет место при более слабых ограничениях и получается, как нам кажется, более просто, чем в [8].

Нетрудно видеть, что при выполнении условий А краевая задача (1.1) эквивалентна следующему интегральному уравнению Фредгольма II рода:

$$u(x)+\int_0^1 K(x,\eta)u(\eta)\,d\eta=F(x), \tag{1.2}$$

где

$$K(x,\eta)=\int_0^{|x,\eta|}\frac{d\xi}{k(\xi)}\int_{(x,\eta)}^1\frac{d\xi}{k(\xi)}q(\eta)\left[\int_0^1\frac{d\xi}{k(\xi)}\right]^{-1},$$

$$|x,\ \eta|=[x+\eta-|x-\eta|]/2, \qquad (x,\ \eta)=[x+\eta+|x-\eta|]/2, \tag{1.3}$$

$$F(x)=-\left[\int_0^1\frac{d\xi}{k(\xi)}\right]^{-1}\left[\int_0^x\frac{1}{k(\xi)}\int_0^1\int_\eta^\xi\frac{f(\zeta)}{k(\eta)}d\zeta\,d\eta\,d\xi-\int_0^x\frac{d\xi}{k(\xi)}(b-a)\right]+a,$$

причем

$$l(x)=\|K(x,\eta)\|_{L_s(0,\,1)}\in C[0,\,1],$$

(1.4)

$$m(\eta)=\|K(x,\eta)\|_{C[0,\,1]}\in L_s(0,\,1)$$

и

$$(1.4') \qquad F(x)\in C[0,1].$$

Из (1.4) и (1.4′), в силу теоремы 1.16 из [9], стр. 109, следует, что линейный интегральный оператор с ядром $K(x,\eta)$ действует из $L_{s/(s-1)}(0,1)$ в $C[0,1]$ и является вполне непрерывным. Поскольку, кроме того, оператор задачи (1.1) является самосопряженным и отрицательно-определенным, то получаем также, что решение интегрального уравнения (1.2) существует, единственно и принадлежит классу $C[0,1]$. Если воспользоваться дополнительно следствием из задачи (1.1)

$$(1.5) \qquad k(x)u'(x)=\left[\int_0^1\frac{d\xi}{k(\xi)}\right]^{-1}\left[\int_0^1\int_\eta^x\frac{f(\xi)}{k(\eta)}d\xi\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{1}{k(\eta)}\int_\eta^x q(\xi)u(\xi)\,d\xi\,d\eta+b-a\right],$$

то имеем $u(x)\in W_2^1(0,1)$, что и требовалось доказать. Введем равномерную разностную сетку $\omega_h=\{x_i=ih:\ i=1,2,\ldots,N-1,\ h=1/N\}$. Неравномерность шага приводит лишь к более громоздким выкладкам. В дальнейшем потребуется следующее

Определение. Точной трехточечной разностной схемой для задачи (1.1) назовем разностную схему вида

$$v_i=a_iv_{i+1}+b_iv_{i-1}+w_i,\quad i=1,2,\ldots,N-1,\qquad v_0=a,\qquad v_N=b,$$

коэффициенты которой $a_i=a_i(k(\cdot),\ q(\cdot))$, $b_i=b_i(k(\cdot),\ q(\cdot))$, $w_i=w_i(k(\cdot),\ q(\cdot),\ f(\cdot))$ являются функционалами от $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ на отрезке $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, зависящими от параметра h. При этом должно выполняться условие

$$v_i=u(x_i),\qquad i=1,2,\ldots,N-1.$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* А, *тогда для задачи* (1.1) *существует единственная однородная трехточечная разностная схема*

$$(1.6) \qquad (u_{\bar x}/a)_x-du=-\varphi(x),\quad x\in\omega_h,\qquad u_0=a,\qquad u_N=b,$$

где $a(x)=h^{-1}v_1(x)$, $d(x)=T^x(q(\cdot))$, $\varphi(x)=T^x(f(\cdot))$. *Здесь*

$$T^x(w(\cdot))=\frac{h^{-1}}{v_1(x)}\int_{x-h}^{x}v_1(\xi)w(\xi)\,d\xi+\frac{h^{-1}}{v_2(x)}\int_x^{x+h}v_2(\xi)w(\xi)\,d\xi,$$

$v_1(x)$, $v_2(x)$ — *шаблонные функции.*

Доказательство. Убедимся в том, что шаблонные функции в случае выполнения условий А обладают теми же свойствами, что и в [4, 5, 10],

где предполагалось

$$0<M_1\leqslant\frac{1}{k(x)}\leqslant M_2,\qquad 0\leqslant q(x)\leqslant M_2,\qquad k(x),q(x),f(x)\in Q^0[0,1].$$

Покажем, что шаблонные функции $v_j(x)$, $j=1,2$, являющиеся решениями следующих задач Коши:

$$L^{(p,q)}v_j^i(x)\equiv\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dv_j^i(x)}{dx}\right]-q(x)v_j^i(x)=0,$$

$$x\in(x_{i-1},x_{i+1}),\qquad v_1^i(x_{i-1})=0,\qquad k(x_{i-1})\frac{dv_1^i(x_{i-1})}{dx}=1,$$

$$v_2^i(x_{i+1})=0,\qquad k(x_{i+1})\frac{dv_2^i(x_{i+1})}{dx}=-1,$$

существуют, единственны и принадлежат классу $W_2^1(x_{i-1},x_{i+1})$.

Этот результат получается аналогично тому, как доказывалось выше существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1) из класса $W_2^1(0,1)$. Следует лишь вместо уравнений (1.2), (1.5) воспользоваться, например, в случае функции $v_1^i(x)$ уравнениями

$$v_1^i(x)=F(x)+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}K(x,\xi)v_1^i(\xi)d\xi,$$

(1.7)

$$k(x)\frac{dv_1^i(x)}{dx}=1+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}q(\xi)v_1^i(\xi)d\xi,$$

где

(1.7′) $$K(x,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x}\frac{d\eta}{k(\eta)}q(\xi),\qquad F(x)=\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\frac{d\xi}{k(\xi)}.$$

Повторяя затем рассуждения из [5], убеждаемся в справедливости доказанных там лемм 1, 2, 3. На основании теоремы вложения из [11], стр. 64, любая функция из $W_2^1(0,1)$ принадлежит классу $C[0,1]$ и, следовательно, решение $u(x)$ задачи (1.1) определено в узлах сетки ω_h.

Доказательство единственности точной трехточечной разностной схемы будем проводить от противного. Пусть существуют две точные трехточечные разностные схемы вида

$$u_i=a_i^{(j)}u_{i+1}+b_i^{(j)}u_{i-1}+w_i^{(j)},\qquad i=1,2,\ldots,N-1,,\quad j=1,2,$$

(1.6′)

$$u_0=a,\qquad u_N=b.$$

Зафиксируем произвольное i, $1\leqslant i\leqslant N-1$, и найдем для задачи (1.1) такие постоянные a и b, чтобы $u(x_{i-1})=u(x_{i+1})=0$. Для этого, положив $x=x_{i-1}$ и $x=x_{i+1}$ в (1.2) и (1.3), получим для a и b систему линейных

алгебраических уравнений с определителем

$$\Delta = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\xi}{k(\xi)} \left[\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{k(\xi)} \right]^{-1} \neq 0.$$

Тогда из (1.6′) для такого решения имеем $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$. Для установления равенств $a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$ и $b_i^{(1)} = b_i^{(2)}$ нужно повторить весь ход рассуждений, но выбор a и b осуществить из условий $u(x_{i+1}) = 1$, $u(x_{i-1}) = 0$ либо $u(x_{i+1}) = 0$ и $u(x_{i-1}) = 1$. Определитель системы Δ при этом не меняется. Поскольку i выбиралось произвольным, то схемы (1.6′) полностью совпадают. Таким образом, лемма доказана полностью.

Замечание. Из (1.7), (1.7′) и из соответствующих уравнений для $v_2^i(x)$ вытекают при достаточно малом h неравенства

$$\frac{1}{\mu} \leqslant \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\xi}{k(\xi)} < \frac{1}{h} v_1^i(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\xi}{k(\xi)} \left[1 - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(\xi)\, d\xi \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\xi}{k(\xi)} \right]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \nu^{-1} \left[1 - \frac{1}{\nu} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(\xi)\, d\xi \right]^{-1} \leqslant \nu_1^{-1}, \qquad \frac{1}{\mu} \leqslant \frac{1}{h} v_2^i(x) \leqslant \frac{1}{\nu_1},$$

$$\left\| \frac{1}{h} \frac{dv_j^i(x)}{dx} \right\|_{L_2(x_{i-1}, x_{i+1})} \leqslant C, \quad j = 1, 2, \quad q(x) \in L_s(0, 1), \quad s > 1,$$

где постоянные ν_1, C не зависят от h, i.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* А *с* $s > 1$. *Тогда:*

1) *имеет место оценка*

$$\|T^x(u(\cdot)) - u(x)\|_0 \leqslant Ch \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L_2(0,1)} \qquad \forall u(x) \in W_2^1(0, 1);$$

2) *если* $k(x) \in W_2^1(0, 1)$, *то справедлива априорная оценка*

$$\|T^x(u(\cdot)) - u(x)\|_0 \leqslant Ch^2 \left\| \frac{d^2u}{dx^2} \right\|_{L_2(0,1)} \qquad \forall u(x) \in W_2^1(0, 1);$$

3) *если* $k(x) \in C_{0,\,1/s}[0, 1]$, *то справедлива априорная оценка*

$$\|T^x(u(\cdot)) - u(x)\|_0 \leqslant Ch^{1+1/s} \qquad \forall u(x) \in C_{1,\,1/s}[0, 1],$$

где

$$\|w\|_0^2 = \sum_{x_i \in \omega_h} h\omega^2(x_i).$$

Доказательство. Легко убедиться в справедливости соотношений

$$T^x(u(\cdot))-u(x)=\frac{h^{-1}}{v_1}\int\limits_{x-h}^{x}\left(x-\frac{h}{2}-\xi\right)[v_1(\xi)u(\xi)]'\,d\xi+$$

$$+\frac{h^{-1}}{v_2(x)}\int\limits_{x}^{x+h}\left(x+\frac{h}{2}-\xi\right)[v_2(\xi)u(\xi)]'\,d\xi=$$

$$=\frac{h^{-1}}{v_1(x)}\int\limits_{x-h}^{x}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{h}{2}-\xi\right)^2-\frac{h^2}{8}\right][v_1(\xi)u(\xi)]''\,d\xi+$$

$$+\frac{h^{-1}}{v_1(x)}\int\limits_{x}^{x+h}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{h}{2}-\xi\right)^2-\frac{h^2}{8}\right][v_2(\xi)u(\xi)]''\,d\xi.$$

Отсюда с учетом замечания сразу следуют утверждения леммы 2.

§ 2. Сходимость метода прямых для уравнений параболического типа

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t),\qquad t>0,\qquad u(0)=u_0, \tag{2.1}$$

где линейный оператор A: $H\to H$ имеет область определения D, плотную в H, и

$$A=A^*\geqslant\nu E>0. \tag{2.2}$$

Пусть существует такой линейный оператор T: $H\to H$, который обладает следующими двумя свойствами:

1) если u и v — решения уравнений

$$\begin{aligned}&Au=g,\\ &\tilde{A}v=[P(PTA)^{-1}]^{-1}v=PTg=\tilde{g},\qquad v\in X,\end{aligned} \tag{2.2'}$$

где P — оператор из H в гильбертово пространство X, то

$$Pu=v; \tag{2.2''}$$

2) $0<\nu_1E\leqslant\tilde{A}=\tilde{A}^*$.

Вместо задачи (2.1), (2.2) рассмотрим ее «приближение» — задачу Коши вида

$$\frac{dv}{dt}+\tilde{A}(t)v=\tilde{f}(t),\qquad t>0,\qquad v(0)=PT(0)u_0.$$

Тогда погрешность $z=v-Pu$ будет определяться как решение задачи Коши

$$\frac{dz}{dt}+\tilde{A}(t)z=\frac{d\psi(t)}{dt},\qquad t>0,\qquad z(0)=P(T(0)u_0-u_0), \tag{2.3}$$

где

$$\psi(t)=\int_0^t P\left[T(\xi)\frac{du}{d\xi}-\frac{du}{d\xi}\right]d\xi.$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть линейный оператор $A(t)$ в задаче (2.1) имеет область определения D, не зависящую от t и плотную в H, является дифференцируемым и удовлетворяет условиям*

$$0<\nu E\leqslant A(t)=A^*(t),\qquad t\geqslant 0,$$

причем ν не зависит от t. Тогда если существует такой линейный оператор $T(t)\colon H\to H$, который обладает свойствами (2.2′), (2.2″), так что

$$0\leqslant \tilde{A}'(t)+\mu_1\tilde{A}(t),\qquad t\geqslant 0,\qquad |\mu_1|<\infty, \tag{2.4}$$

то для $z=v-Pu$ верна оценка

$$\int_0^t \|z(\xi)\|^2 d\xi+\left\|\int_0^t \tilde{A}(\eta)z(\eta)\,d\eta\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}\leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant \exp[t\max(\mu_1,\ 0)]\int_0^t \|\psi(\xi)+z(0)\|^2 d\xi,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве X.

Если оператор A постоянный, то справедлива оценка вида

$$\left\{\int_0^t \|v-Pu\|^2 d\xi+\frac{1}{2}\left\|\int_0^t [v-Pu]\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}}\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\int_0^t \|P(Tu-u)\|^2 d\xi\right\}^{1/2}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Проинтегрируем обе части (2.3) от 0 до t, а затем умножим скалярно на $z(t)$; тогда после некоторых преобразований получим

$$\|z(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}= \tag{2.7}$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{[\tilde{A}^{-1}(t)]'}+(\psi(t)+z(0),\ z(t)).$$

Интегрируя обе части (2.7) от 0 до t и используя неравенство (2.4), будем иметь

$$\int_0^t \|z(\xi)\|^2 d\xi+\frac{1}{2}\left\|\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\max(\mu_1,0)\int_0^t\left\|\int_0^\xi \tilde{A}(\eta)z(\xi)\,d\eta\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(\xi)}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \|z(\xi)\|^2 d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t \|\psi(\xi)+z(0)\|^2 d\xi.$$

Применяя к последнему неравенству обобщенную лемму Гронуолла, сразу приходим к (2.5). Если A — постоянный оператор, то (2.7) принимает вид

$$\|z(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}}=(P(Tu-u),z(t)).$$

Интегрируя обе части этого равенства от 0 до t и применяя к правой части неравенство Коши — Буняковского, получаем (2.6). Этим теорема полностью доказана.

В качестве примера использования теоремы 1 рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+q(x)u=f(x,t),\qquad x\in(0,1),\qquad t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad u(x,0)=u_0(x).\end{gathered}\tag{2.8}$$

Пусть коэффициенты уравнения (2.8) удовлетворяют условиям А, тогда в качестве оператора T можно взять оператор T^x из § 1. Оператор P будет оператором взятия следа функции на сетке ω_h, а оператор $\tilde{A}$ будет определяться формулой

$$\tilde{A}v=-(v_{\bar{x}}/a)_x+dv,$$

и очевидно, что будут выполняться условия (2.2′), (2.2″).

Следовательно, для схемы метода прямых

$$\begin{gathered}\frac{dv}{dt}-\left(\frac{1}{a}v_{\bar{x}}\right)_x+dv=PT^x(f(\cdot,T)),\qquad x\in\omega_h,\qquad t>0,\\ v(0,t)=v(1,t)=0,\qquad v(x,0)=PT^x(u_0(\cdot)),\end{gathered}\tag{2.9}$$

соответствующей задаче (2.8), справедливы все условия теоремы 1 и из (2.6) следует априорная оценка

$$\left\{\int_0^t\|v-Pu\|_0^2\,d\xi+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a},\left[\int_0^t(v-Pu)\,d\xi\right]^2_{\bar{x}}\right]\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_0^t\|PT^x(u(\cdot,\xi))-u(x,\xi)\|_0^2\,d\xi\right\}^{1/2}.$$

Эта оценка вместе с леммой 2 доказывает, что справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А *с* $s>1$. *Тогда:*

1) *при* $\|f\|_{q_1,r_1,Q_T}\leqslant\mu_2$, *где* $1/r_1+1/2q_1={}^5/_4$, $q_1\in[1,2]$, $r_1\in[1,{}^4/_3]$, $u_0(x)\in L_2(0,1)$, *для погрешности схемы метода прямых* (2.9) *верна оценка*

$$\left\{\int_0^t\|v-Pu\|_0^2\,d\xi+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a},\left[\int_0^t(v-Pu)\,d\xi\right]^2_{\bar{x}}\right]\right\}^{1/2}\leqslant Ch\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{2,Q'_t};$$

2) *при* $\|f\|_{2,Q_t}\leqslant\mu_2$, $k(x)\in W_2^1(0,1)$, $u_0(x)\in \mathring{W}_2^1(0,1)$ *для погрешности схемы метода прямых* (2.9) *верна оценка*

$$\left\{\int_0^t \|v-Pu\|_0^2\,d\xi+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a},\left[\int_0^t (v-Pu)\,d\xi\right]_{\bar x}^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant Ch^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{2,Q_t},$$

где

$$\|u\|_{q,r,Q_t}=\left\{\int_0^t\left[\int_0^1|u(x,t)|^q\,dx\right]^{r/q}dt\right\}^{1/r},\qquad \|u\|_{2,2,Q_t}=\|u\|_{2,Q_t}.$$

При доказательстве данной теоремы необходимо воспользоваться результатами о гладкости обобщенных решений уравнений параболического типа (см. [12]).

§ 3. Сходимость метода прямых для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+A(t)u=f(t),\quad t>0,\qquad u(0)=u_0,\qquad u'(0)=u_0', \tag{3.1}$$

где $A(t)\colon H\to H$ — линейный оператор с не зависящей от t областью определения D, плотной в H, причем $A(t)=A^*(t)\geqslant\nu E>0$.

Пусть существует такой линейный оператор $T(t)\colon H\to H$, который обладает свойствами (2.2′), (2.2″). Введем в рассмотрение вместо задачи (3.1) задачу вида

$$\begin{gathered}\frac{d^2v}{dt^2}+\tilde A(t)v=\tilde f(t),\qquad t>0,\\ v(0)=PT(0)u_0,\qquad v'(0)=[PT(t)u(t)]'_{t=0},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $v\in X$ и P — оператор из H в X. Для погрешности $z=v-Pu$ из (3.2), (3.1) получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered}\frac{d^2z}{dt^2}+\tilde A(t)z=\frac{d^2\psi(t)}{dt^2},\qquad t>0,\\ z(0)=P(T(0)u_0-u_0),\qquad z'(0)=[P(T(t)u-u)]'_{t=0},\end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\psi(t)=\int_0^t P[T(\xi)u''(\xi)-u''(\xi)](t-\xi)\,d\xi.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и оператор* $\tilde A(t)$ *удовлетворяет операторному неравенству* $[\tilde A^{-2}(t)]'\leqslant 2\mu_1\tilde A^{-2}(t)$ *или* $[\tilde A^2(t)]'+2\mu_1\tilde A^2(t)\geqslant 0$. *Тогда для разности* $z=v-Pu$ *справедлива оценка*

$$(3.4)\qquad \left[\left\|\tilde{A}^{-1}(t)\int_0^t \tilde{A}(\eta)z(\eta)\,d\eta\right\|^2+\left\|\int_0^t (t-\eta)\,\tilde{A}(\eta)z(\eta)\,d\eta\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\exp\left\{\left[2\max(\mu_1,0)+\frac{1}{2\varepsilon}\right]t\right\}\int_0^t \|\tilde{\psi}(\xi)\|^2\,d\xi,$$

где $\tilde{\psi}(\xi)=\psi(\xi)+\xi z'(0)+z(0)$, $\varepsilon>0$.

Если A — постоянный оператор, то вместо (3.4) *имеем*

$$(3.4')\qquad \left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T_1}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|^2+\left\|\tilde{A}^{1/2}\int_0^t (t-\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2T_1^{1/2}\left[\int_0^{T_1}\|P(Tu-u)\|^2\,d\xi\right]^{1/2}.$$

Доказательство. Проинтегрируем обе части уравнения (3.3) дважды по t, а затем скалярно умножим на

$$\tilde{A}^{-1}(t)\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi$$

и тогда получим

$$(3.5)\qquad \frac{d}{dt}\left\|\tilde{A}^{-1}(t)\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2+\frac{d}{dt}\left\|\int_0^t (t-\xi)\,\tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}=$$

$$=\left\|\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|_{[\tilde{A}^{-2}(t)]'}+\left\|\int_0^t (t-\xi)\,\tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{[\tilde{A}^{-1}(t)]'}+$$

$$+2\left(\tilde{\psi}(t),\ \tilde{A}^{-1}(t)\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right).$$

Если проинтегрировать обе части (3.5) от 0 до t, воспользоваться условиями теоремы и применить ε-неравенство, то в результате получим

$$(3.6)\qquad \left\|\tilde{A}^{-1}(t)\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2+\left\|\int_0^t (t-\xi)\,\tilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}\leqslant$$

$$\leqslant\left[2\max(\mu_1,0)+\frac{1}{2\varepsilon}\right]\int_0^t\left[\left\|\tilde{A}^{-1}(\xi)\int_0^\xi \tilde{A}(\eta)z(\eta)\,d\eta\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|\int_0^\xi (\xi-\eta)\,\tilde{A}(\eta)z(\eta)\,d\eta\right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(\xi)}\right]d\xi+2\varepsilon\int_0^t\|\tilde{\psi}(\xi)\|^2\,d\xi.$$

Наконец, интегрируя (3.6) по t и применяя обобщенную лемму Гронуолла, приходим к априорной оценке (3.4).

Если A — постоянный оператор, то (3.5) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|^2+\frac{d}{dt}\left\|\int_0^t (t-\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2_{\tilde{A}}=2\left(\tilde{\psi}(t),\ \int_0^t z(\xi)\,d\xi\right),$$

откуда следует

$$\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|^2+\left\|\int_0^t (t-\xi)\,z(\xi)\,d\xi\right\|_{\tilde{A}}^2\leqslant 2\left[\int_0^t \|\tilde{\psi}(\xi)\|^2\,d\xi\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[\int_0^t\left\|\int_0^\xi z(\eta)\,d\eta\right\|^2 d\xi\right]^{1/2}\leqslant 2T_1^{1/2}\left[\int_0^{T_1}\|\tilde{\psi}(\xi)\|^2\,d\xi\right]^{1/2}\times$$

$$\times\max_{0\leqslant t\leqslant T_1}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|^2+\left\|\int_0^t (t-\xi)\,z(\xi)\,d\xi\right\|_{\tilde{A}}^2\right]^{1/2},$$

что и приводит к (3.4′). Лемма доказана полностью.

Применим теорему 3 к установлению скорости сходимости метода прямых для первой краевой задачи в случае уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q(x)u=f(x,t),\qquad x\in(0,1),\qquad t>0,$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad u(x,0)=u_0(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x).$$

С помощью операторов T^x и P из § 2 построим схему метода прямых вида

$$\frac{d^2v}{dt^2}-\left(\frac{1}{a}v_{\bar{x}}\right)_x+dv=PT^x(f(\cdot,t)),\qquad x\in\omega_h,\qquad t>0,$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \tag{3.7}$$

$$v(x,0)=PT^x(u_0(\cdot)),\qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=PT^x(u_1(\cdot)).$$

Согласно неравенству (3.4′), для погрешности $z=v-Pu$ будет верна априорная оценка

$$\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T_1}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|_0^2+\left(\frac{1}{a},\left[\int_0^t (t-\xi)\,z(\xi)\,d\xi\right]_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant \tag{3.8}$$

$$\leqslant 2T_1^{1/2}\left[\int_0^{T_1}\|PT^x(u(\cdot,\xi))-u(x,\xi)\|_0^2\,d\xi\right]^{1/2}.$$

Неравенство (3.8) вместе с леммой 2 приводят к справедливости следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A. *Тогда*:

1) *при* $\max|q(x)|\leqslant\mu_1$, $f(x,t)\in L_{2,1}(Q_{T_1})$, $u_0(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $u_1(x)\in L_2(0,1)$ *для погрешности схемы метода прямых* (3.7) *справедлива оценка*

$$\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T_1}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|_0^2+\left(\frac{1}{a},\left[\int_0^t (t-\xi)\,z(\xi)\,d\xi\right]_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant Ch\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{2,Q_{T_1}}.$$

2) *если выполнены условия* п. 1) *и условия* $|k'(x)|<\mu_2$, $f_t'(x, t)\in L_{2,1}(Q_{T_1})$, $u_0(x)\in W_2^2(0, 1)\cap \mathring{W}_2^1(0, 1)$, $u_1(x)\in \mathring{W}_2^1(0, 1)$, *то для погрешности схемы* (3.7) *справедлива оценка*

$$\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T_1}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)\,d\xi\right\|_0^2+\left(\frac{1}{a},\left[\int_0^t (t-\xi)z(\xi)\,d\xi\right]_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant Ch^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{2,Q_{T_1}}.$$

При доказательстве данной теоремы использовались результаты о гладкости обобщенных решений уравнений гиперболического типа из [12], гл. 4, § 3, 4.

§ 4. Сходимость метода прямых для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим первую краевую задачу для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u}{dx^2}-A(x)u=f(x),\quad x\in(0,1),\quad u(0)=u_0,\quad u(1)=u_1. \tag{4.1}$$

Здесь $A(x)$: $H\to H$ — линейный оператор с не зависящей от x областью определения D, плотной в H, удовлетворяющий условию $A(x)=A^*(x)\geqslant \nu E>0$.

Предположим, как и раньше, что существует такой линейный оператор $T(x)$: $H\to H$, который обладает свойствами (2.2′), (2.2″). Вместо краевой задачи (4.1) рассмотрим ее «приближение» в гильбертовом пространстве X (более «простом» по сравнению с H):

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\tilde{A}(x)v=\tilde{f}(x),\quad x\in(0,1),\quad v(0)=PT(0)u_0,\quad v(1)=PT(1)u_1,$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и ранее. Тогда для погрешности $z=v-Pu$ будем иметь задачу

$$\begin{gathered}\frac{d^2z}{dx^2}-\tilde{A}(x)z=\frac{d^2\psi(x)}{dx^2},\quad x\in(0,1),\\ z(0)=P[T(0)u_0-u_0],\qquad z(1)=P[T(1)u_1-u_1],\end{gathered} \tag{4.2}$$

где

$$\psi(x)=\int_0^1 G(x,\xi)P[T(\xi)u''(\xi)-u''(\xi)]\,d\xi,$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1-x)\xi, & x\geqslant\xi,\\ (1-\xi)x, & x<\xi.\end{cases}$$

Заменим в уравнении (4.2) переменную x на ξ, умножим обе части на функцию $G(x,\xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до 1:

$$z(x)-\tilde{A}(x)\int_0^1 G(x,\xi)z(\xi)\,d\xi=-\int_0^1 G(x,\xi)[\tilde{A}(x)-\tilde{A}(\xi)]z(\xi)\,d\xi+\psi(x).$$

Здесь $\tilde{\psi}(x)=\psi(x)+xz(1)+(1-x)z(0)$. Из последнего соотношения следует оценка

$$(4.3)\qquad \|z(x)\|_*^2=\left\|\left[\frac{d^2}{dx^2}-\tilde{A}(x)\right]\int_0^1 G(x,\xi)z(\xi)\,d\xi\right\|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\|\tilde{\psi}(x)\|^2+\mu_1\int_0^1\|z(\xi)\|^2\,d\xi,$$

где предполагается, что

$$(4.4)\qquad \mu_1=2\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 G^2(x,\xi)\|\tilde{A}(x)-\tilde{A}(\xi)\|^2\,d\xi<1.$$

Неравенство (4.3) с учетом (4.4) и неравенства $\|z(x)\|_*\geqslant\|z(x)\|$ приводит к оценке

$$(4.5)\qquad \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|z(x)\|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|z(x)\|_*\leqslant\left(\frac{2}{1-\mu_1}\right)^{1/2}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|\tilde{\psi}(x)\|.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Пусть линейный оператор $A(x)$ в задаче* (4.1) *имеет область определения D, не зависящую от x и плотную в H, и удовлетворяет условию*

$$(4.6)\qquad 0<\nu E\leqslant A(x)=A^*(x),\qquad x\in[0,1],$$

причем ν не зависит от x. Тогда если существует такой линейный оператор $T(x)$: $H\to H$, который удовлетворяет условиям (2.2′), (2.2″), *и выполнено* (4.4), *то для $z(x)$ справедлива оценка* (4.5).

Рассмотрим применение теоремы 5 к оценке скорости сходимости метода прямых для задачи Дирихле в случае уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[k(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]-q(y)u=f(x,y),\qquad (x,y)\in G,$$

$$u(x,y)=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in\Gamma,$$

где Γ — граница квадрата $G=\{(x,y)\colon x\in(0,1),\ y\in(0,1)\}$.

Используя операторы T^y и P из § 2, строим схему метода прямых вида

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{1}{a}v_{\bar{y}}\right)_y-dv=PT^y(f(x,\cdot)),\qquad x\in(0,1),\qquad y\in\omega_h,$$

$$(4.7)\qquad v(x,0)=\varphi(x,0),\qquad v(x,1)=\varphi(x,1),$$

$$v(0,y)=PT^y(\varphi(0,\cdot)),\qquad v(1,y)=PT^y(\varphi(1,\cdot)).$$

Согласно неравенству (4.6), имеет место оценка

$$(4.8)\qquad \left\{ \int_0^1 \|z(\xi)\|_0^2\, d\xi + \int_0^1 \left(\frac{1}{a},\ \left[\int_0^1 G(x,\xi)z(\xi)\,d\xi\right]_{\bar y}^2\right] dx \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1/2}\left\{ \int_0^1 \|P[T^y(u(\xi,\cdot))-u(\xi,y)]\|_0^2\, d\xi \right\}^{1/2}.$$

Неравенство (4.8) вместе с леммой 2 приводит к справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* А. *Тогда*:

1) *при* $\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}|q(y)|\leqslant\mu$, $f(x,y)\in L_2(G)$, $\varphi(x,y)\in W_2^1(G)$ *для погрешности схемы метода прямых* (4.7) *справедлива оценка*

$$\left\{ \int_0^1 \|z(\xi)\|_0^2\, d\xi + \int_0^1 \left(\frac{1}{a},\ \left[\int_0^1 G(x,\xi)z(\xi)\,d\xi\right]_{\bar y}^2\right] dx \right\}^{1/2} \leqslant Ch\left\|\frac{\partial u}{\partial y^2}\right\|_{2,G};$$

2) *если выполнены условия* п. 1) *и условия* $|k'(y)|<\mu_2$, $\varphi(x,y)\in W_2^2(G)$, *то для погрешности схемы метода прямых* (4.7) *справедлива оценка*

$$\left\{ \int_0^1 \|z(\xi)\|_0^2\, d\xi + \int_0^1 \left(\frac{1}{a},\ \left[\int_0^1 G(x,\xi)z(\xi)\,d\xi\right]_{\bar y}^2\right] dx \right\}^{1/2} \leqslant Ch^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_{2,G}.$$

При доказательстве теоремы 6 необходимо воспользоваться результатами о гладкости обобщенных решений уравнений эллиптического типа (см. [8], гл. 3, § 5, 10).

§ 5. Заключение

Изложенные выше результаты могут быть распространены на системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, на дифференциальные уравнения в частных производных высшего порядка, на многомерный случай, на квазилинейный случай, а также на метод сеток. При этом используются результаты по точным разностным схемам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [6] и для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков [7]. Не останавливаясь на всех перечисленных выше возможностях обобщений, которым будут посвящены последующие работы, изложим кратко идею доказательства сходимости метода прямых при минимальных требованиях на гладкость решения исходной дифференциальной задачи для квазилинейного случая. Для определенности рассмотрим метод прямых в применении к квазилинейным уравнениям параболического типа.

Отправным моментом будет следующая абстрактная задача Коши:

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t,u),\qquad t>0,\qquad u(0)=u_0,$$

где A: $H\to H$ — самосопряженный, положительно-определенный оператор, область определения $D(A)$ которого плотна в H. Ради простоты предполагаем, что оператор A не зависит от t. Пусть функция $f(t,u)$ удовлетворяет

условию Липшица

$$\|f(t, u_1)-f(t, u_2)\|_H \leqslant L\|u_1-u_2\|_H$$

с постоянной L, не зависящей от t.

Используя обозначения из § 2, рассмотрим более «простую» задачу Коши вида

$$\frac{dv}{dt}+\tilde{A}v=PTf(t, \Lambda v), \quad t>0, \quad v(0)=PTu_0, \tag{5.1}$$

где Λ: $X \to H$ — некоторый линейный оператор с ограниченной нормой: $\|\Lambda\| \leqslant c_1$. Вводя для погрешности решения задачи (5.1) обозначения $z(t)=v(t)-Pu(t)$, приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{dz}{dt}+\tilde{A}z=\frac{d}{dt}P(Tu-u)+PT[f(t, \Lambda v)-f(t, u)],$$

$$z(0)=P(Tu_0-u_0).$$

Проделывая выкладки, аналогичные § 2, приходим к априорной оценке

$$\left\{\int_0^t \|z(\xi)\|^2 d\xi\right\}^{1/2} \leqslant 2^{1/2}\exp[Tc_1^2L^2t]\left\{\left[\int_0^t \|P(Tu-u)\|^2 d\xi\right]^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^t \eta\int_0^\eta \|PT(f(\xi, \Lambda Pu)-f(\xi, u))\|^2 d\xi\, d\eta\right]^{1/2}\right\}, \quad 0\leqslant t\leqslant T_1. \tag{5.2}$$

Применение оценки (5.2) к доказательству сходимости метода прямых для квазилинейных уравнений параболического типа фактически совпадает с линейным случаем, исключение составляет лишь операция со вторым слагаемым в правой части (5.2). Поэтому приведем только результат, подобный лемме 2 для этого слагаемого. Пусть скалярная функция $f(x, y)$ по второму аргументу удовлетворяет условию Липшица $|f(x, u_1)-f(x, u_2)| \leqslant L|u_1-u_2|$ с константой L, не зависящей от x. Тогда при условии, что $\Lambda=E$, и с использованием оператора T^x из § 1 будем иметь

$$|PT^x[f(\cdot, u(\cdot))-f(\cdot, u(x))]| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Lh^{-1}}{v_1(x)}\int_{x-h}^{x} v_1(\xi)\left|\int_x^\xi u'(\eta)\,d\eta\right| d\xi+\frac{Lh^{-1}}{v_2(x)}\int_x^{x+h} v_2(\xi)\left|\int_x^\xi u'(\eta)\,d\eta\right| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{3}Lh^{1/2}\left\{\int_{x-h}^{x+h}[u'(\eta)]^2 d\eta\right\}^{1/2}, \quad x\in\omega_h, \tag{5.3}$$

что приводит к оценке

$$\|PT^x[f(\cdot, u(\cdot))-f(\cdot, u(x))]\|^2 \leqslant \frac{8}{9}L^2h^2\int_0^1 [u'(x)]^2 dx. \tag{5.4}$$

Оценка (5.4) вместе с леммой 2 дает возможность доказать сходимость со скоростью $O(h)$ метода прямых для квазилинейного параболического уравнения, если его решение при каждом фиксированном t принадлежит по x классу W_2^1.

Пусть теперь решение квазилинейного параболического уравнения при каждом фиксированном t принадлежит по x классу W_2^2. Выберем в качестве оператора Λ линейную интерполяцию

$$\Lambda u=\frac{x-x_{i-1}}{2h}u(x_{i+1})+\frac{x_{i+1}-x}{2h}u(x_{i-1}),\qquad x\in[x_{i-1},x_{i+1}].$$

Тогда справедливо соотношение

$$u(x)-\Lambda u=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}K(x,t)u''(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left[|x-t|_+-\frac{1}{2h}(x-x_{i-1})(x_{i+1}-t)\right]u''(t)\,dt,$$

где $|\xi|_+=\xi$ при $\xi>0$, $|\xi|_+=0$ при $\xi<0$. Отсюда с учетом (5.3) получаем

$$|PT^x[f(\cdot,u(\cdot))-f(\cdot,\Lambda Pu)]|\leqslant\frac{Lh^{-1}}{v_1(x)}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}v_1(\xi)\left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}K(\xi,t)u''(t)\,dt\right|d\xi+$$

$$+\frac{Lh^{-1}}{v_2(x)}\int\limits_{x_i}^{x_i+h}v_2(\xi)\left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}K(\xi,t)u''(t)\,dt\right|d\xi\leqslant Lh^{3/2}\left\{\int\limits_{x_i-h}^{x_i+h}[u''(\eta)]^2\,d\eta\right\}^{1/2},$$

что приводит к оценке

$$\|PT^x[f(\cdot,u(\cdot))-f(\cdot,\Lambda u(x))]\|\leqslant 2^{1/2}Lh^2\left\{\int\limits_0^1[u''(\eta)]^2\,d\eta\right\}^{1/2},$$

которая вместе с леммой 2 позволяет доказать сходимость со скоростью $O(h^2)$ метода прямых для квазилинейного параболического уравнения.

Поступила в редакцию 18.09.1979

Цитированная литература

1. *О. А. Лисковец.* Метод прямых (обзор). Дифференц. ур-ния, 1965, 1, № 12, 1662–1678.
2. *Ю. Р. Акопян, Л. А. Оганесян.* Скорость сходимости вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений. В сб. «Вариационно-разностные методы решения задач матем. физ.». Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, 27–36.
3. *А. А. Злотник.* Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, 18, № 6, 1454–1465.

4. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Об однородных разностных схемах высокого порядка точности. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 3, 514–517.
5. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 425–440.
6. *В. Л. Макаров, И. Л. Макаров, В. Г. Приказчиков.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка. Докл. АН УССР, 1978, сер. «А», № 4, 302–305.
7. *Ш. А. Бурханов и др.* О точных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Докл. АН УССР, 1978, сер. «А», № 9, 778–781.
8. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.
9. *П. П. Забрейко и др.* Интегральные уравнения. СИБ. М., «Наука», 1968.
10. *А. А. Самарский.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
11. *С. Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
12. *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.