ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 20 Ноябрь 1980 Декабрь № 6

УДК 519.6:517.958

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

Дается обзор численных методов решения ряда многомерных задач гидродинамики, радиационной газовой динамики, физики плазмы. Обсуждается современное состояние вычислительного эксперимента в этих областях, приводятся примеры расчета некоторых сложных задач механики и физики.

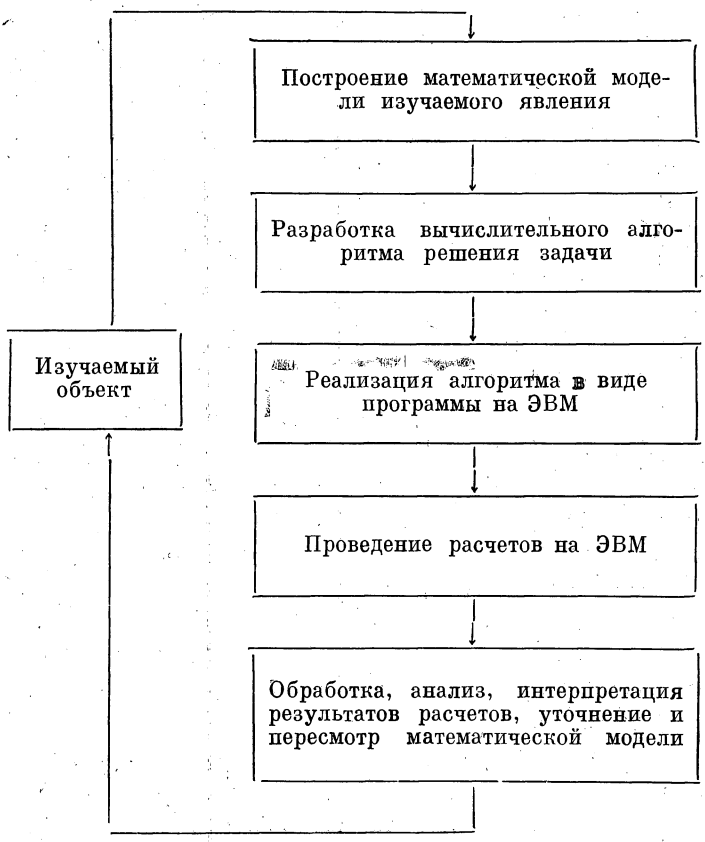
Введение. Математическое моделирование и численные методы

Теоретические исследования в механике и физике всегда базировались на математическом фундаменте, на получении основных количественных характеристик изучаемого объекта. При этом по мере развития науки возрастали как сложность исследуемых явлений, процессов, конструкций, так и требования к точности получаемых результатов. В итоге математическое описание задач усложнилось настолько, что стало невозможным решать их традиционными методами.

Создание быстродействующих электронных вычислительных машин, бурное развитие методов вычислений, прямой численный расчет сложных математических задач ознаменовали собой новый этап в применении математических методов к решению задач науки и техники. Фактически за два последних десятилетия сформировался вычислительный эксперимент (в.э.) — новый мощный метод теоретического исследования, основанный на использовании ЭВМ и играющий важную роль в ускорении научно-технического прогресса [1–4]. Сущность его состоит в том, что на основе математической модели с помощью ЭВМ изучаются процессы и устройства различной природы, проигрывается их поведение в тех или иных условиях, находятся оптимальные параметры и режимы действующих или проектируемых установок. С помощью в.э. проводится математическое прогнозирование сложных явлений и технических устройств, изучение которых другими способами затруднено или невозможно. В.э. эффективно используется в исследовании таких крупных и актуальных проблем, как теория и конструирование ядерных реакторов, управляемый термоядерный синтез, МГД-преобразование энергии, вопросы физики плазмы, физики лазеров, аэродинамики и т. д.

Содержание понятия «вычислительный эксперимент» в какой-то мере разъясняет схема на фиг. 1, изображающая этапы его проведения.

Все этапы тесно связаны и направлены на достижение одной цели — на получение результата с требуемой точностью за возможно меньшее машинное время. Даже такая упрощенная схема отражает замечательное свойство в.э.: он незаменим при междисциплинарных исследованиях, поскольку эффективно работает на стыке различных научных направле-



Фиг. 1

ний. Поэтому в.э. является не только важным, но зачастую и единственным путем к синтезу знаний и опыта ученых различных специальностей.

Применительно к задачам механики и физики речь идет об объединении усилий специалистов, работающих в области математики, численных методов, теоретической и экспериментальной физики, программирования и конструирования ЭВМ. В процессе проведения в.э. происходит взаимное обогащение этих дисциплин. Так, например, в.э. стимулировали развитие разделов математической физики, связанных с исследованием уравнений переноса нейтронов и излучения, уравнений диффузии, систем уравнений гиперболического типа, уравнений с разрывными коэффициентами, нелинейных уравнений, кинетических уравнений, описывающих плазму, и др.

В настоящем обзоре отражены некоторые результаты, полученные автором и его сотрудниками в течение нескольких последних лет в ИПМ АН СССР и связанные с разработкой численных методов решения сложных задач механики и физики. Создание таких алгоритмов является одним из этапов проведения в.э. Накопленный к настоящему времени опыт позволяет сформулировать ряд требований, предъявляемых к вычислительным алгоритмам.

При дискретизации уравнений сплошной среды, т. е. при переходе от дифференциальных уравнений к разностным, естественно требовать, чтобы полученная дискретная модель правильно отражала основные свойства сплошной среды. Выполнение этого требования привело к формулировке и развитию таких важных и конструктивных понятий, как консервативные и полностью консервативные разностные схемы [5]. Ранее эти схемы получались с помощью некоторых полуэвристических приемов. Разработанный под руководством автора и А. П. Фаворского подход к построению разностных схем, основанный на использовании общих вариационных принципов механики, расширяет возможности получения консервативных и полностью консервативных схем (см. § 1). При таком подходе, например, автоматически выписываются схемы с заданными качествами в различных системах координат в многомерном случае. В § 5 рассматриваются полученные И. В. Фрязиновым и Б. Д. Моисеенко так называемые полностью нейтральные разностные схемы для уравнений Навье — Стокса, сохраняющие некоторые важные свойства исходной модели и во многом аналогичные полностью консервативным схемам.

Выбор численного метода решения задачи тесно связан с выбором математической модели изучаемого явления. Как показывает опыт, следует предпочесть ту из них, которая лучше приспособлена для численного решения на ЭВМ, для которой имеются надежные экономичные алгоритмы. В § 3, 4 приведены примеры удачного выбора математической модели в рамках заданного физического приближения, что позволило существенно продвинуться в численном решении некоторых задач физики плазмы. Эти результаты получены Л. М. Дегтярёвым с сотрудниками и связаны с проблемами моделирования турбулентности в плазме и исследования равновесных конфигураций плазмы.

В § 2 обсуждаются вопросы, связанные с методами расчета многомерных задач радиационной газовой динамики, разработанными под руководством Б. Н. Четверушкина. Используемые при изучении этих задач математические модели очень сложны. Например, они включают в качестве составных частей уравнения газовой динамики и кинетические уравнения переноса излучения. Дополнительные трудности создают большая размерность задачи и разномасштабность учитываемых физических процессов. При разработке численной методики был решен ряд сложных теоретических и практических вопросов, связанных с выбором разностных схем, построением метода их решения и с программной реализацией их на ЭВМ.

Кратко осветим ряд вопросов, оставшихся за рамками данного обзора, но имеющих непосредственное отношение к в.э.

Математические модели многих задач механики и физики, как правило, очень сложны и не поддаются детальному теоретическому исследованию. Однако ряд их важных свойств можно понять, если разбить исходную задачу на более простые блоки (модули). Модульный анализ задачи и предварительное изучение свойств отдельных модулей требуют развития качественных и аналитических методов исследования задач математической физики, например таких, как широко применяемый метод построения автомодельных решений. Численные алгоритмы и технология проведения в.э. должны отражать модульную структуру исходной задачи. Важным направлением развития в.э. является создание пакетов прикладных программ математической физики [6]. Принципы построения таких пакетов программ учитывают модульный характер в.э., а также его многовариантность и многомодельность, т. е. то обстоятельство, что численное исследование изучаемого явления связано с проведением большого количества расчетов по различным моделям, описывающим задачу в том или ином приближении. Пакеты прикладных программ удобны также для стандартизации, накопления и хранения численных алгоритмов и т. д.

Прежде чем широко использовать тот или иной алгоритм на практике, необходимо провести теоретическое исследование его качеств (экономичность, точность, универсальность и т. д.). В теории численных методов можно выделить два основных вопроса: а) построение и исследование разностных схем, априорная и апостериорная оценка их свойств (сходимость, точность, устойчивость); б) решение разностных уравнений. Можно утверждать, что к настоящему времени для линейных задач существует весьма законченная теория разностных схем, одновременно абстрактная и конструктивная [2, 7]. Разностная схема представляет собой систему алгебраических, вообще говоря, нелинейных уравнений. При их решении используются различные итерационные процессы, что приводит к необходимости многократно решать специального вида системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка. Разработка экономичных методов решения таких систем является одной из главных задач теории численных методов [8].

При проведении в.э., моделирующего поведение той или иной среды, необходимо с достаточной точностью знать ее физические характеристики, иначе самые лучшие методы расчета не дадут верного представления о реальном явлении. Разработка «физического оснащения» в.э. — крупная самостоятельная проблема. Например, поскольку непосредственное получение свойств веществ из физического эксперимента не всегда возможно, а упрощенные модели вещества, изучаемые в теоретической физике, оказываются грубыми, то возникает необходимость решать сложные квантовомеханические задачи с помощью численных методов на ЭВМ. В свою очередь, современные физические эксперименты настолько сложны, что невозможно правильно интерпретировать их результаты без использования специальных методов обработки на ЭВМ [9]. Фактически, в обоих случаях речь идет о проведении самостоятельных вычислительных экспериментов, сопутствующих основному.

§ 1. Применение вариационного подхода к построению разностных схем

При численном моделировании разностная схема интерпретируется как дискретный аналог физико-математической модели рассматриваемого явления [2]. Это означает, что качество схемы должно определяться не только каноническими категориями теории численных методов, но и тем, насколько полно соответствующая дискретная модель отражает физические закономерности исследуемого процесса и, следовательно, тесно связанные с ним свойства уравнений. С этой точки зрения естественно строить разностные алгоритмы, отправляясь непосредственно от методов описания процессов, принятых в физике и математике.

Одним из универсальных и фундаментальных способов описания и исследования проблем теоретической и математической физики являются вариационные принципы [10–12]. Благодаря своей конструктивности и относительной простоте они нередко кладутся в основу теоретического рассмотрения многих классических разделов физики. Одновременно вариационный подход широко используется для построения обобщенных решений уравнений математической физики. Последнее обстоятельство позволяет надеяться на успешное применение вариационных принципов и в тех случаях, когда обоснование существования и единственности решения отсутствует. Именно с таким положением часто приходится иметь дело при решении прикладных, в особенности нелинейных задач.

Многие важнейшие свойства физических процессов сопряжены со свойствами варьируемых функционалов. Так, формулировка законов сохранения импульса и энергии основана на отсутствии явной зависимости лагранжиана от пространственных координат и времени. Дополнительное достоинство вариационных принципов, облегчающее их использование, заключается в их инвариантности относительно систем отсчета.

В [13–16] было предложено использовать вариационный подход для построения конечно-разностных моделей гидродинамики, магнитогидродинамики и диффузионных процессов. Далее этот подход развивался в [17–22].

1. Вариационный принцип Гамильтона—Остроградского и уравнения гидродинамики. Лагранжев способ описания основан на глубокой аналогии сплошной среды с континуальной системой частиц [23, 24]. Эту связь механики континуума с механикой конечного числа материальных точек целесообразно использовать при построении дискретной модели.

Рассмотрим сначала адиабатическое движение произвольного конечного объема V, ограниченного поверхностью F и состоящего из одних и тех же континуальных частиц. Следуя принятой аналогии, лагранжиан L такой системы можно представить в виде

$$L(t)=\int\limits_{M(V)}\left(\frac{|W|^2}{2}-\varepsilon\right)dm.$$

Обозначения: t — время, $\mathbf{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{W}(u, v, w)$ — вектор скорости частицы, V — объем, dV — элемент объема, M — масса, dm — элемент массы, ρ — плотность, ε — удельная массовая внутренняя энергия, P — давление, d/dt — субстанциональная производная по времени.

В соответствии с принципом наименьшего действия Гамильтона — Остроградского, движение среды как механической системы доставляет стационарное значение $\delta S=0$ функционалу действия

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Варьирование функционала (1.1) должно проводиться с учетом связей: закона сохранения массы

$$\delta(dm)=\delta(\rho dV)=0, \tag{1.2}$$

первого начала термодинамики

$$\delta\varepsilon=(P/\rho^2)\,\delta\rho, \tag{1.3}$$

кинематической связи

$$d\mathbf{r}/dt=\mathbf{W}. \tag{1.4}$$

Варьирование (1.1) с учетом (1.2)—(1.4) показывает, что условие стационарности (1.1) выполняется, если справедливо уравнение, выражающее собой закон сохранения импульса:

$$\rho\frac{d\mathbf{W}}{dt}+\operatorname{grad}P=0. \tag{1.5}$$

Соотношение (1.2) переходит в уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{W}=0, \tag{1.6}$$

а (1.3) — в уравнение изменения энергии

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+P\operatorname{div}\mathbf{W}=0. \tag{1.7}$$

В процессе варьирования используется также закон сохранения объема

$$\frac{d}{dt}(dV)=dV\operatorname{div}\mathbf{W}. \tag{1.8}$$

Систему уравнений гидродинамики (1.4)—(1.7) замыкает уравнение состояния

$$R(P, \rho, \varepsilon)=0. \tag{1.9}$$

Существование законов сохранения для уравнений гидродинамики связано с возможностью их вариационного представления. Отсутствие явной

зависимости лагранжиана от координат и времени приводит к закону сохранения импульса

$$(1.10)\qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{M(V)} \mathbf{W}\,dm+\oint\limits_{F(V)} P\cdot\mathbf{n}_F\,dF=0$$

и энергии

$$(1.11)\qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{M(V)}\left(\varepsilon+\frac{|\mathbf{W}^2|}{2}\right)dm+\oint\limits_{F(V)} P(\mathbf{W},\mathbf{n}_F)\,dF=0.$$

Напомним, что закон сохранения массы и условие адиабатичности процесса вводятся в качестве связей.

Вариационный принцип Гамильтона — Остроградского без изменений обобщается на случай учета объемных диссипативных процессов с «вязким давлением» q:

$$\delta\varepsilon=\frac{P+q}{\rho^2}\delta\rho.$$

Уравнения (1.5), (1.6) для такого неадиабатического движения среды принимают вид

$$\rho\frac{d\mathbf{W}}{dt}+\operatorname{grad}(P+q)=0,\qquad \rho\frac{d\varepsilon}{dt}+(P+q)\operatorname{div}\mathbf{W}=0.$$

2. Построение уравнений дискретной среды на основе вариационного подхода. Предполагая движение среды плоским и зависящим только от двух пространственных декартовых координат x и y, зафиксируем в качестве независимых пространственных переменных лагранжевы координаты α и β. Используя известный произвол в выборе α, β, можно считать, что исходному объему V, ограниченному поверхностью F, на плоскости α, β соответствует единичный квадрат G, ограниченный контуром Γ (см. фиг. 2).

Введем в G прямоугольную разностную сетку $\bar\omega_h$, равномерную по каждому направлению и состоящую из узлов ω_{ij}:

$$\bar\omega_h=\{\omega_{ij}=(\alpha_i,\beta_j);\quad \alpha_i=i\Delta\alpha,\quad i=0,1,\ldots,N;\quad \beta_j=j\Delta\beta,$$
$$j=0,1,\ldots,M\}.$$

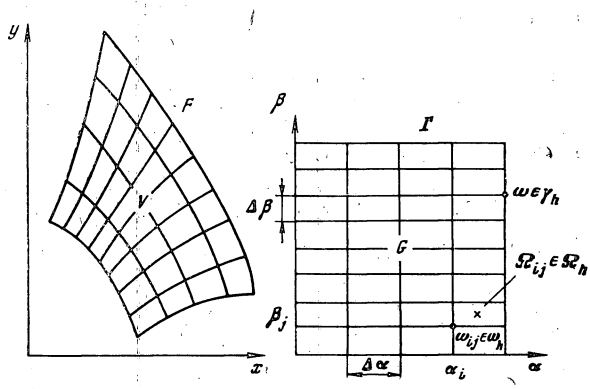
Совокупность узлов, лежащих на Γ, обозначим γ_h, остальные узлы будем называть внутренними и обозначать их множество символом ω_h:

$$\omega_h=\{\omega_{ij}\in G\setminus\Gamma\},\qquad \bar\omega_h=\omega_h+\gamma_h,\qquad \gamma_h=\{\omega_{ij}\in\Gamma\}.$$

Введем также в рассмотрение множество четырехугольных ячеек $\Omega_h=\{\Omega_{ij},\ i=0,1,\ldots,N-1,\ j=0,1,\ldots,M-1\}$, каждая из которых имеет своими вершинами четыре узла ω_{kl}, составляющих шаблон $Ш_\omega(\Omega)$ ячейки Ω_{ij}:

$$Ш_\omega(\Omega_{ij})=\{\omega_{ij},\ \omega_{i+1,j},\ \omega_{i+1,j+1},\ \omega_{i,j+1}\}.$$

Узлы в шаблоне $Ш_\omega(\Omega_{ij})$ всегда упорядочены так, чтобы при их последовательном переборе ячейка Ω_{ij} обходилась против часовой стрелки. Любая ячейка взаимно-однозначно определяется своим центром, который будем поэтому обозначать тем же символом: $\Omega_{ij}=\{\alpha_{i+0.5}=(i+0.5)\Delta\alpha,\ \beta_{j+0.5}=(j+0.5)\Delta\beta\}$. Такая система обозначений позволит в дальнейшем избежать недоразумений.



Фиг. 2

Будем использовать также шаблон $Ш_\Omega(\omega)$, составленный из ячеек Ω_{kl}, имеющих своей вершиной узел ω_{ij}:

$$Ш_\Omega(\omega_{ij})=\{\Omega_{i,j},\ \Omega_{i-1,j},\ \Omega_{i-1,j-1},\ \Omega_{i,j-1}\};$$

здесь также соблюдается правило обхода.

Образами ячеек $\Omega_{ij}\in\Omega_h$ на плоскости x, y оказываются некоторые плоские четырехугольные объемы V_{ij} с криволинейными границами. Вершинами каждого V_{ij} являются образы узлов $\omega_{kl}\in Ш_\omega(\Omega_{ij})$ на плоскости x, y, для которых нет смысла вводить новые обозначения, как и для образов центров ячеек Ω_{ij}. Множество $V_h=\{v_{ij}:\ i=0,\ 1,\ldots,\ N-1;\ j=0,\ 1,\ldots,\ M-1\}$ образует разбиение исходного объема V, которому таким способом поставлена в соответствие система конечного числа частиц с конечной массой, формально отождествляемая с «лагранжевым» множеством ячеек Ω_h.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать безындексные обозначения $\Omega=\Omega_{ij}$, $\omega=\omega_{ij}$, $f=f_{ij}$, $\Delta_\alpha f=f_{i+1,j}-f_{ij}$, $\Delta_\beta f=f_{i,j+1}-f_{ij}$, $f_\alpha=\Delta_\alpha f/\Delta\alpha$, $f_\beta=\Delta_\beta f/\Delta\beta$. Удобно будет также использовать символы усреднения по шаблонам:

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\Omega=0.25\sum_{\omega_{kl}\in Ш(\Omega)} f_{kl},\qquad f_{kl}\leftrightarrow\omega_{kl},$$

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\omega=0.25\sum_{\Omega_{kl}\in Ш_\Omega(\omega)} f_{kl},\qquad f_{kl}\leftrightarrow\Omega_{kl}.$$

Будем также прибегать к сокращенной записи:

$$\langle\Omega,\ f_\alpha\rangle=0.5[(f_\alpha)_{ij}+(f_\alpha)_{i,j+1}],\quad \langle\Omega,\ f_\beta\rangle=0.5[(f_\beta)_{ij}+(f_\beta)_{i+1,j}].$$

Лагранжиан L_h дискретной системы частиц, моделирующих сплошную среду, естественно записать в виде

$$L_h(t)=\sum_{\Omega_h} m\left(\frac{\langle\langle u^2+v^2\rangle\rangle_\Omega}{2}-\varepsilon\right).$$

Функционал действия

$$S_h=\int_{t_0}^{t_1} L_h(t)\,dt.$$

Закон сохранения массы

$$\rho V=m. \tag{1.12}$$

Первое начало термодинамики с учетом объемных вязких сил применительно к элементу объема

$$m\,d\varepsilon=-(P+q)\,dV. \tag{1.13}$$

Кинематические соотношения, отнесенные к узлам,

$$\frac{dx}{dt}=u,\qquad \frac{dy}{dt}=v. \tag{1.14}$$

Закон сохранения объема V удобно представить в «якобианной» форме:

$$V=(\langle\Omega,\, x_\alpha\rangle\langle\Omega,\, y_\beta\rangle-\langle\Omega,\, x_\beta\rangle\langle\Omega,\, y_\alpha\rangle)\,\Delta\alpha\Delta\beta.$$

В этом случае величина V в точности равна площади фигуры на плоскости $(x,\, y)$, получаемой спрямлением криволинейных сторон образа Ω.

Громоздкий процесс варьирования в дискретном случае можно заменить, используя непосредственно условия экстремальности Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_n}{\partial u}\right)=\frac{\partial L_h}{\partial x},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_h}{\partial v}\right)=\frac{\partial L_h}{\partial y},$$

которые с учетом уравнений связи (1.12)—(1.14) принимают вид

$$\begin{aligned}\langle\langle m\rangle\rangle_\omega\frac{du}{dt}&=\sum_{\Omega_{kl}\in Ш_\Omega(\omega)}(P_{kl}+q_{kl})\frac{\partial V_{kl}}{\partial x},\\ \langle\langle m\rangle\rangle_\omega\frac{dv}{dt}&=\sum_{\Omega_{kl}\in Ш_\Omega(\omega)}(P_{kl}+q_{kl})\frac{\partial V_{kl}}{\partial y}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Дифференцируя объем V по времени, получаем дифференциально-разностное уравнение закона сохранения объема ячейки

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{\omega_{lk}\in Ш_\omega(\Omega)}\left(u_{kl}\frac{\partial V}{\partial x_{kl}}+v_k\frac{\partial V}{\partial y_{kl}}\right). \tag{1.16}$$

Сопоставляя это соотношение с (1.8), выводим разностный аналог выражения для дивергенции:

$$D=\frac{1}{V}\sum_{\omega_{kl}\in Ш_\omega(\Omega)}\left(u_{kl}\frac{\partial V}{\partial x_{kl}}+v_{kl}\frac{\partial V}{\partial y_{kl}}\right). \tag{1.17}$$

Уравнение энергии в «энтропийной» форме следует из (1.13):

$$m\frac{d\varepsilon}{dt}=-(P+q)\frac{dV}{dt}.$$

После подстановки в него (1.16) оно принимает обычный вид:

$$m\frac{d\varepsilon}{dt}=-(P+q)\sum_{\omega_{kl}\in Ш_\omega(\Omega)}\left(u_{kl}\frac{\partial V}{\partial x_{kl}}+v_{kl}\frac{\partial V}{\partial y_{kl}}\right).$$

Замыкает систему дифференциально-разностных уравнений уравнение состояния (1.9).

Не останавливаясь на подробном выводе, отметим, что непосредственной проверкой можно установить справедливость разностных аналогов законов сохранения импульса и энергии (1.10), (1.11) для дифференциально-разностных уравнений, что является прямым следствием вариационного способа их получения.

Выражение (1.17) фактически определяет собой некоторый оператор DIV на множестве сеточных функций $W_h=\{u_h, v_h\}$, заданных в $\bar\omega_h$:

$$\underset{\bar\omega_h\to\Omega_h+\gamma_h}{\mathrm{DIV}}\ W_h= \tag{1.18}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{V}\displaystyle\sum_{\omega_{kl}\in Ш_\omega(\Omega)}\left(u_{kl}\frac{\partial V}{\partial x_{kl}}+v_{kl}\frac{\partial V}{\partial y_{kl}}\right) \text{ на } \Omega_h,\\[2ex] \dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\sum_{\omega_{kl}}\left(u_{kl}\frac{\partial V^*}{\partial x_{kl}}+v_{kl}\frac{\partial V^*}{\partial y_{kl}}\right) \text{ на } \gamma_h.\end{cases}$$

Здесь $Ш_\gamma$ — шаблон, составленный из пары граничных узлов $\omega_{kl}\in\gamma_h$, упорядоченных в направлении обхода Γ против часовой стрелки; V^* — нулевой объем прилегающей к $Ш_\gamma$ фиктивной ячейки $\Omega^*\in\Omega_h^*$; σ — элемент «разностной» длины дуги, отвечающий $Ш_\gamma$.

Тогда сопряженным к DIV оказывается оператор $(\mathrm{DIV})^*=-\mathrm{GRAD}$, где

$$\mathrm{GRAD}\,g_h=\left(-\frac{1}{\langle\langle V\rangle\rangle_\omega}\sum_{\Omega_{kl}\in Ш_\Omega(\omega)}g_{kl}\frac{\partial V_{kl}}{\partial x},\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\langle\langle V\rangle\rangle_\omega}\sum_{\Omega_{kl}\in Ш_\Omega(\omega)}g_{kl}\frac{\partial V_{kl}}{\partial x}\right) \text{ на } \bar\omega_h.$$

Оператор GRAD действует, очевидно, на множестве сеточных функций g_h, задаваемых на $\Omega_h+\gamma_h$.

Можно показать, что

$$(g_h,\ \mathrm{DIV}\,\mathbf{W}_h)=-((\mathrm{GRAD}\,g_h,\ \mathbf{W}_h)),$$

где скалярные произведения $(\,,\,)$ и $((\,,\,))$ определяются следующим образом:

$$((\mathbf{W}_h^{(1)},\mathbf{W}_h^{(2)}))=\sum_{\bar\omega_h}(u^{(1)}u^{(2)}+v^{(1)}v^{(2)})\langle\langle V\rangle\rangle_\omega,$$

$$(g_h^{(1)},g_h^{(2)})=\sum_{\Omega_h}g^{(1)}g^{(2)}V+\sum_{\gamma_h}g^{(1)}g^{(2)}\sigma.$$

С помощью операторов GRAD и DIV систему дифференциально-разностных уравнений гидродинамики можно представить в виде

$$\rho_hV_h=m_h,\quad V_h=V_h(\mathbf{r}_h),\quad \mathbf{r}_h=\{x_h,y_h\},\quad \frac{d\mathbf{r}_h}{dt}=\mathbf{W}_h,\quad \mathbf{W}_h=\{u_h,v_h\},$$

$$(\rho_\omega)_h\frac{d\mathbf{W}_h}{dt}=-\mathrm{GRAD}(P_h+g_h),\qquad (\rho_\omega)_h=\frac{\langle\langle m_h\rangle\rangle_\omega}{\langle\langle V_h\rangle\rangle_\omega},$$

$$\rho_h\frac{d\varepsilon_h}{dt}=-(P_h+q_h)\mathrm{DIV}\mathbf{W}_h,\qquad R(p_h,\rho_h,\varepsilon_h)=0,$$

$$\rho_h,\ \varepsilon_h\in\Omega_h,\quad m_h,\ V_h,\ P_h,\ q_h\in\Omega_h+\gamma_h,$$

$$\langle\langle V_h\rangle\rangle_\omega,\ (\rho_\omega)_h,\ \langle\langle m_h\rangle\rangle_\omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{W}_h\in\bar\omega_h.$$

Следствиями здесь являются уравнения сохранения объема и неразрывности:

$$\frac{dV_h}{dt}=V_h\,\mathrm{DIV}\,\mathbf{W}_h,\qquad \frac{d\rho_h}{dt}+\rho_h\,\mathrm{DIV}\,\mathbf{W}_h=0.$$

Проводя замену производных по времени конечными разностями $df/dt\approx f_t=(\hat f-f)/\Delta t$, $f=f^n$, $\hat f=f^{n+1}$, где n — номер временнóго слоя, $\Delta t=t^{n+1}-t^n$, получаем семейство разностных схем гидродинамики, которые при соответствующем выборе весов являются полностью консервативными:

$$\rho_h\mathbf{W}_h=m_h,\qquad V_h=V(\mathbf{r}_h),\qquad (\mathbf{r}_h)_t=\mathbf{W}_h^{(0.5)},$$

$$(\tilde\rho_\omega)_h(\mathbf{W}_h)_t+\mathrm{GRAD}^{(0.5)}(P_h^{(\sigma_P)}+q_h^{(\sigma_q)})=0,\ (\tilde\rho_\omega)_h=\frac{\langle\langle m_h\rangle\rangle_\omega}{\langle\langle V_h\rangle\rangle_\omega^{(0.5)}}$$

(1.19)

$$(\tilde\rho_\omega)_h(\mathbf{W}_h)_t+\mathrm{GRAD}^{(0.5)}(P_h^{(\sigma_P)}+q_h^{(\sigma_q)})=0,\qquad (\tilde\rho_\omega)_h=\frac{\langle\langle m_h\rangle\rangle_\omega}{\langle\langle V_h\rangle\rangle_\omega^{(0.5)}},$$

$$(V_h)_t=V_h^{(0.5)}\mathrm{DIV}^{(0.5)}\mathbf{W}_h^{(0.5)}.$$

Операторы $\mathrm{DIV}^{(0.5)}$ и $\mathrm{GRAD}^{(0.5)}$ получаются из (1.18) заменой каждого множителя операторных коэффициентов соответствующей полусуммой по временным слоям. Параметры σ_p, σ_q остаются произвольными.

Можно показать, что построенная полностью консервативная схема при произвольных $0 \leqslant \sigma_P, \sigma_q \leqslant 1$ имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству. При этом выражения $\mathrm{DIV}\,\mathbf{W}_h$ и $\mathrm{GRAD}\,P_h$ аппроксимируют, соответственно, $\mathrm{div}\,\mathbf{W}$ и $\mathrm{grad}\,P$. При $\sigma_P = \sigma_q = 0.5$ схема имеет второй порядок аппроксимации и по времени.

Устойчивость (1.19) является безусловной при σ_P, $\sigma_q \geqslant 0.5$; в противном случае имеет место ограничение на шаг по времени.

Вариационный подход позволяет без каких-либо принципиальных изменений строить полностью консервативные схемы в цилиндрических, сферических и любых произвольных системах координат [17, 18, 20].

Вариационный подход успешно применялся также для построения полностью консервативных схем идеальной МГД. В этом случае вводились дополнительные члены в лагранжиане, соответствующие энергии магнитного поля, а также дополнительная связь, соответствующая условию вмороженности.

Совершенно очевидно, что вариационный подход сохраняет свою силу и в случае трех пространственных измерений.

3. Вариационно-дискретные модели диффузионных процессов. При численном моделировании прикладных задач сравнительно редко удается ограничиваться рассмотрением бездиссипативного движения среды. Часто такое движение сопровождается различными физическими эффектами, такими, как диффузионный перенос тепла, магнитного поля и т. д., которые в общем случае необходимо рассматривать на подвижных криволинейных нерегулярных сетках.

Для многих задач характерна сильная пространственная и временная неоднородность коэффициентов в уравнениях. Особенно типично это для задач физики плазмы. В результате обычные алгоритмы решения уравнения типа теплопроводности оказываются неприемлемыми из-за критической потери точности вычислений. В подобных ситуациях целесообразно наряду с основными функциями вводить в рассмотрение их потоки. Потоковая форма уравнений позволяет строить устойчивые однородные вычислительные алгоритмы, слабо чувствительные к разбросу коэффициентов и допускающие вырождение уравнений. Отыскание потоков имеет и самостоятельный интерес. Таким образом, заслуживают внимания алгоритмы, с помощью которых можно одновременно получать как сами исходные функции (температуры, магнитного поля и т. д.), так и соответствующие им потоки (тепла, электрического поля и т. д.).

Вариационные принципы эффективно используются при построении разностных схем для уравнения типа теплопроводности [21, 22]. Рассмотрим уравнение теплопроводности в потоковой форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{W} = 0, \tag{1.20}$$

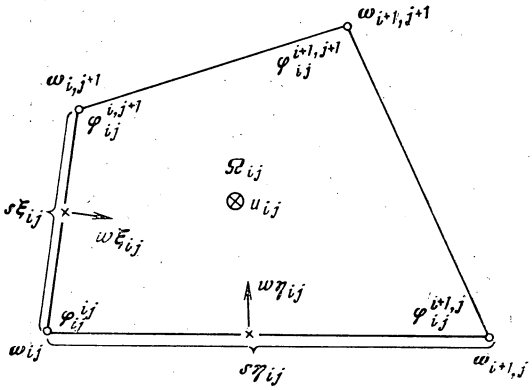
$$\mathbf{W} + k\,\mathrm{grad}\,u = 0 \tag{1.21}$$

в односвязной плоской области V, лежащей в плоскости декартовых координат (x, y); здесь u — температура, $\mathbf{W}$ — вектор теплового потока. Пусть

на границе Г задано однородное граничное условие для нормальной компоненты потока; n — единичная внешняя нормаль к контуру Г. В каждый фиксированный момент времени $t \geqslant 0$ поле тепловых потоков, удовлетворяющих поставленному граничному условию, доставляет минимум функционалу

$$\Phi(\mathrm{W}) = \int\limits_V \frac{|\mathrm{W}|^2}{k}\, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V u^2\, dV, \tag{1.22}$$

в котором функции u и k считаются заданными и не варьируются. Вариация $\partial u/\partial t$ находится из уравнения (1.20), которое играет роль связи. Если



Фиг. 3

исключить $\partial u/\partial t$ из (1.22) с помощью (1.20), то (1.22) приобретает вид

$$\Phi(\mathrm{W}) = \int\limits_V \left(\frac{|\mathrm{W}|^2}{k} - 2u \operatorname{div} \mathrm{W} \right) dV. \tag{1.23}$$

Таким образом, отыскание поля потоков W в каждый момент времени можно проводить на основе минимизации функционала (1.23), а величину u находить из уравнения баланса (1.20). В случае задания граничных условий других типов в функционал (1.23) следует добавить в качестве слагаемых соответствующие интегралы по границе Г.

Заменим область G дискретным множеством точек разностной сетки. Пусть существуют функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, осуществляющие гладкое взаимно-однозначное отображение области V на единичный квадрат $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Выбрав величины ξ, η в качестве криволинейных координат, покроем область V четырехугольной сеткой, являющейся образом прямоугольной равномерной сетки в квадрате на плоскости (ξ, η). Значения сеточной функции u^h и коэффициента k^h будем считать постоянными внутри каждой ячейки сетки. Поле потоков будем описывать с помощью пары сеточных функций $W\xi^h$, $W\eta^h$, представляющих собой проекции вектора теплового потока на нормали к серединам сторон ячейки, направленные в сторону возрастания ξ и η соответственно. Индексация сеточных величин пояснена на фиг. 3. Такая дискретизация позволяет написать интегроин-

терполяционное соотношение баланса тепла для ячейки Ω_{ij}:

$$Vu_t = -\nabla_\xi(s\xi W\xi) - \nabla_\eta(s\eta W\eta). \tag{1.24}$$

Здесь символы ∇_ξ, ∇_η обозначают операторы взятия разности (вперед) по направлениям ξ и η. Величина V^h — объем ячейки Ω, коэффициенты $s\xi$, $s\eta$ аппроксимируют длины сторон ячейки. Уравнение (1.24) можно представить в операторной форме

$$D(u_h)_t = R\mathbf{W}_h, \tag{1.25}$$

где $\mathbf{W}_h = \{W\xi_h,\ W\eta_h\}$ — сеточная вектор-функция, R — блочный оператор, действующий из пространства сеточных вектор-функций W_h в пространство сеточных функций U_h, D — диагональный оператор. Можно показать [21], что (1.24) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1.20) со вторым порядком по пространству и первым по времени.

Для отыскания поля потоков аппроксимируем функционал на разностной сетке выражением

$$\Phi_h(\mathbf{W}_h) = \sum_{\Omega_h} \left\{ \frac{|\mathbf{W}_h|^2}{k} V - 2u[\Delta_\xi(s\xi W\xi) + \Delta_\eta(s\eta W\eta)] \right\}. \tag{1.26}$$

Модуль вектора потока в центре ячейки Ω вычисляется по формуле (см. [25])

$$(\mathbf{W}_h)_{ij}^2 = \Bigg[0.25 \sum_{s,l=0}^{1} (W\xi_{i+s,j})^2 + (W\eta_{i,j+l})^2 + \\ + (-1)^{s+l} \cos\varphi_{ij}^{i+s,j+l} W\xi_{i+s,j} W\eta_{i,j+l} \Bigg] (\sin^2\varphi_{ij}^{i+s,j+l})^{-1},$$

где $\varphi_{ij}^{i+s,\,j+l}$ — угол между сторонами ячейки (см. фиг. 3).

Выписывая условия минимума функционала (1.26), получаем разностный аналог уравнений (1.21):

$$\begin{aligned} &0.25 \sum_{s,l=0}^{1} \frac{(V/k)_{i-s,j}}{\sin^2\varphi_{i-s,j}^{i,j+l}} [W\xi_{ij} + (-1)^{s+l} \cos\varphi_{i-s,j}^{i,j+l} W\eta_{i-s,j+l}] + \\ &+ s\xi_{ij}(u_{ij} - u_{i-1,j}) = 0, \\ &0.25 \sum_{s,l=0}^{1} \frac{(V/k)_{i,j-l}}{\sin^2\varphi_{i,j-l}^{i+s,j}} [W\eta_{ij} + (-1)^{s+l} \cos\varphi_{i,j-l}^{i+s,j} W\xi_{i+s,j-1}] + \\ &+ s\eta_{ij}(u_{ij} - u_{i,j-1}) = 0, \end{aligned} \tag{1.27}$$

или, в операторной форме,

$$L\mathbf{W}_h = Gu_h. \tag{1.28}$$

Уравнения (1.27) аппроксимируют (1.21) со вторым порядком по пространству. Операторы D, R, L, G обладают свойствами

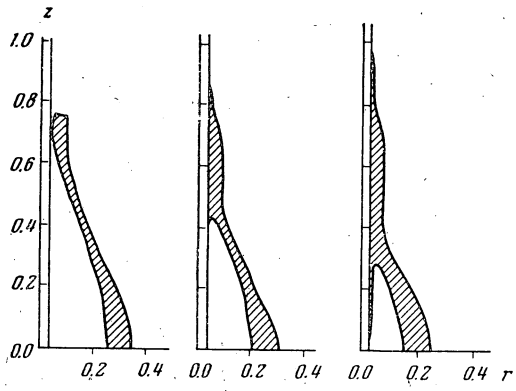
$$D = D^* \geqslant \delta_1 E, \quad \delta_1 > 0, \quad R^* = -G, \quad L = L^* \geqslant \delta_2 E, \quad \delta_2 > 0. \tag{1.29}$$

Исключая из системы (1.25), (1.28) температуру, можно получить уравнение для потоков в дивергентной форме:

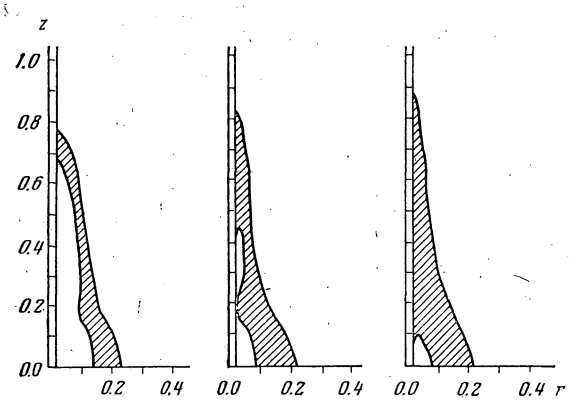
$$L(\mathbf{W}_h)_t + A\mathbf{W}_h = 0, \qquad A = -GD^{-1}R. \tag{1.30}$$

Из (1.29) следует, что $A = A^* > 0$. Уравнение (1.30), как показано в [21], аппроксимирует со вторым порядком по пространству и первым по времени дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial(\mathrm{W}/k)}{\partial t} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathrm{W}).$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Для исследования устойчивости построенного алгоритма можно применить результаты общей теории устойчивости разностных схем [1]. В силу отмеченных свойств операторов R, G и L, схема (1.30) абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени.

Проведенное рассмотрение без существенных изменений переносится на случай произвольной системы координат [21], а также на трехмерный случай. Наряду с полностью неявным уравнением (1.30) можно рассмотреть аналогичное уравнение с весом σ, что позволяет повысить аппроксимацию по времени до второго порядка при $\sigma = 0.5$. Построенный алгоритм применим и в случае подвижных пространственных сеток, причем все свойства разностных операторов и порядок аппроксимации сохраняются и в этом случае.

4. Решение многомерных прикладных задач. Полностью консервативные схемы, полученные с помощью вариационного подхода, успешно применялись при численном решении ряда многомерных прикладных задач. Рассматривались, в частности, задачи, связанные с магнитогидродинамическим инерционным удержанием плазмы. Одна из таких систем основана на идее квазисферической компрессии плазмы тяжелым цилиндрическим жидкометаллическим лайнером, сходящимся к оси. Численное моделирование показало возможность образования кумулятивных струй, возникающих в процессе опережающего схлопывания концов

лайнера (фиг. 4). Развитие струй заметно снижает эффективность сжатия и может привести к разрушению плазмы, находящейся под лайнером. В процессе в.э. [26] был найден оптимальный режим схлопывания лайнера, при котором интенсивность кумулятивных струй выражена достаточно слабо и не препятствует требуемой степени компрессии плазмы (фиг. 5).

На основе разработанной методики проведено исследование устойчивости процесса магнитной кумуляции [27], численное моделирование транспортировки плазмы в канале магнитопровода [28], спонтанного развития магнитных полей [29] и др.

§ 2. Методы решения двумерных задач динамики излучающего газа

В настоящее время в науке и технике все чаще приходится сталкиваться с высокотемпературными газодинамическими явлениями. Вот некоторые из них: 1) процессы, происходящие в звездных атмосферах, 2) вхождение с большой скоростью летательных аппаратов в атмосферы планет, 3) сильноточные излучающие разряды, 4) явления в лазерной плазме.

Так как обычно излучение начинает оказывать существенное влияние на ход процесса, если температура газа достигает 10 000° К, то во многих этих задачах невозможно определить газодинамические поля, не зная полей радиационных.

Выпишем систему уравнений динамики излучающего газа (см. [30]):

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0, \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\mathrm{grad}\,(P+\omega), \tag{2.2}$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-(P+\omega)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mathrm{div}\,\lambda\,\mathrm{grad}\,T-\mathrm{div}\,\mathbf{W}+Q, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{\Omega}\,\mathrm{grad}\,I_\nu=\varkappa_\nu(I_{\nu p}-I_\nu), \tag{2.4}$$

$$\mathbf{W}=\int\limits_0^\infty d\nu\int\mathbf{\Omega}I_\nu\,d\Omega. \tag{2.5}$$

Здесь $\varepsilon=\varepsilon(T,\rho)$, $P=P(T,\rho)$, $\lambda=\lambda(T,\rho)$, $\varkappa_\nu=\varkappa(\nu,\ T,\rho)$.

В этой системе использованы следующие обозначения: t — время, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, ρ — плотность, P — давление, ε — внутренняя энергия, ω — искусственная вязкость, λ — коэффициент теплопроводности, $\mathbf{W}$ — вектор потока энергии излучения, Q — вклад в уравнение энергии различных источников тепла, I_ν — интенсивность энергии излучения, $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор направления полета фотона, ν — частота фотона, $\varkappa_\nu$ — коэффициент поглощения фотонов частоты ν, спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела

$$I_{\nu p}=\frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1}.$$

Для иллюстрации трудностей, возникающих при решении задач динамики излучающего газа, выберем сравнительно простое уравнение переноса для плоского слоя

$$\mu \frac{dI_\nu}{dx} + \varkappa_\nu I_\nu = \varkappa_\nu I_{\nu p},$$

где μ — косинус угла между направлением полета фотона частоты ν и осью x.

Пусть выбрано 10 узлов по частоте ν и 10 узлов по углу μ. Таким образом, для того чтобы определить поле излучения I_ν, а затем и поток энергии излучения W на каждом шаге по времени, необходимо решить 100 обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\mu_p \frac{dI_k}{dx} + \varkappa_k I_k = \varphi_k, \text{ где } \varphi_k = \varkappa_k \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \frac{4\pi h\nu^3}{c^2[\exp(h\nu/kT) - 1]} d\nu,$$

в то время как уравнений газовой динамики (2.1)—(2.3) всего три.

Таким образом, на решение уравнения переноса уходит основное машинное время, необходимое для решения всей задачи динамики излучающего газа.

Эта трудность связана с дополнительной размерностью системы (2.1)—(2.5) по сравнению с уравнениями газовой динамики. Имеется еще ряд серьезных трудностей, может быть, не столь очевидных, которые специфичны для задач радиационной газовой динамики (р.г.д.). Поэтому не случайно, что расчеты нестационарных задач р.г.д. начали осуществляться лет на 10—15 позже расчетов задач обычной газовой динамики.

Тесная взаимосвязь и влияние друг на друга газодинамических полей и поля излучения, необходимость решения многомерного кинетического уравнения на каждом шаге по времени не позволяют строить алгоритмы решения задач р.г.д. путем механического объединения методов теории переноса нейтронов и газовой динамики. Этот факт, а также необходимость решения большого количества практически важных задач позволяют выделить методы решения задач динамики излучающего газа в самостоятельное направление численных методов.

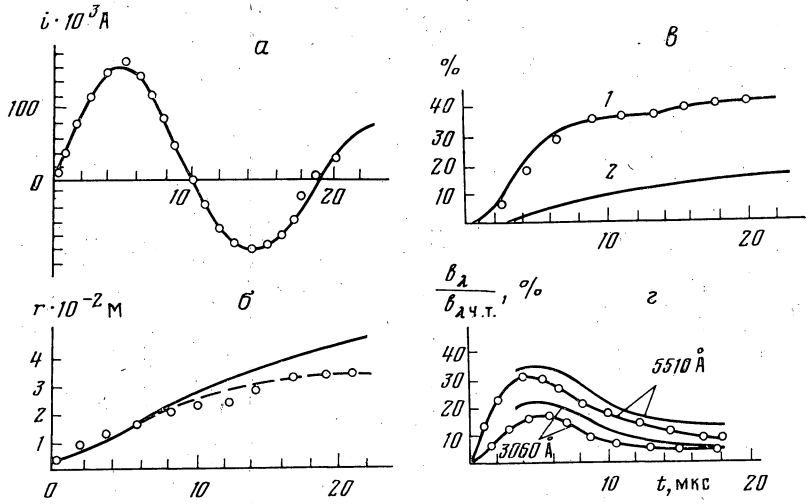
1. Методы решения одномерных задач р.г.д. В конце 60-х — начале 70-х годов появились первые работы, посвященные численному решению нестационарных одномерных задач р.г.д.

При решении этих задач со всей остротой встал вопрос о минимизации машинного времени, необходимого для расчета уравнения переноса. Существенный вклад в разработку методов эффективного учета зависимости поля излучения от направления полета и энергии фотонов был сделан в работах [31—34, 37—40]. Весьма важным для проведения практических расчетов оказалось также построение устойчивых схем совместного решения уравнений газовой динамики и переноса излучения [35, 36, 41—44].

В эти годы в ИПМ АН СССР была создана методика решения одномерных нестационарных задач магнитной радиационной газовой динамики

(м.р.г.д.), на основе которой в дальнейшем были рассчитаны сильноточные излучающие разряды в литиевой плазме [45–46]. В результате выявился ряд интересных качественных и количественных закономерностей в плазменных разрядах.

В дальнейшем было проведено существенное уточнение методики решения задач м.р.г.д. [40, 42, 47], более точно стали рассчитываться уравнения состояния и коэффициенты поглощения, были разработаны общие



Фиг. 6. ○ – данные эксперимента, —— расчет; *а* – для полного тока; *б*: положение ударной волны, – – – граница светящейся области; *в*: кривая *1* – доля энергии, вложенной в плазму, по отношению к общей энергии, запасенной в конденсаторе, кривая *2* – доля энергии, вышедшей из плазмы в виде излучения; *г* – яркость излучения на различных частотах.

принципы проведения в.э. Все это позволило достичь высокой точности в решении сложных одномерных задач м.р.г.д.

В качестве иллюстрации рассмотрим некоторые результаты расчетов сильноточных излучающих разрядов в ксеноновой плазме [48]. На фиг. 6 представлены данные работы [48] по сопоставлению расчета и эксперимента для сходящихся разрядов. Видно, что расхождения находятся в пределах нескольких процентов. В обзорной работе [49] обобщен опыт, накопленный в области решения одномерных задач р.г.д.

2. Методы решения двумерных задач р.г.д. Решение двумерных задач р.г.д. ввиду их гораздо большей сложности все еще встречает значительные трудности. Большинство опубликованных работ посвящено методам решения стационарных задач [50–51]. Решение же нестационарных двумерных задач динамики излучающего газа лежит на пределе возможностей не только ЭВМ типа БЭСМ-6, но и более мощных машин [52]. Единственный путь к решению этих задач в настоящее время — создание высокоэффективных численных методов.

Успехи численного моделирования одномерных задач позволили вплотную подойти и к решению нестационарных двумерных задач динамики из-

лучающего газа. Разработка численных методов их решения была начата в ИПМ АН СССР в середине 70-х годов.

Для описания переноса излучения использовалось многогрупповое диффузионное приближение. Газодинамическое течение рассматривалось в координатах Лагранжа. В этих предположениях система уравнений динамики излучающего газа для осесимметричного случая принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt}=-\rho\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}-\rho\frac{\partial v}{\partial z},\\
&\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial(P+\omega)}{\partial r},\\
&\rho\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial(P+\omega)}{\partial z},\\
&\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-(P+\omega)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial(rW_r)}{\partial r}+\frac{\partial W_z}{\partial z},\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(rW_r^k)}{\partial r}+\frac{\partial W_z^k}{\partial z}+\varkappa_k U_k=\varkappa_k U_{pk},\\
&\frac{l_k}{3}\frac{\partial U_k}{\partial r}=-W_r^k,\qquad \frac{l_k}{3}\frac{\partial U_k}{\partial z}=-W_z^k;\\
&\mathbf{W}=\sum_{k=1}^{N_k}\mathbf{W}^k.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Разработка комплексного алгоритма решения этих уравнений потребовала рассмотрения целого ряда вопросов:

1) решение уравнений газовой динамики,

2) построение разностной аппроксимации уравнений эллиптического типа на неортогональных сетках,

3) разработка итерационных методов решения разностных эллиптических уравнений,

4) разработка методов осреднения уравнений диффузии по энергиям фотонов,

5) разработка методов совместного решения уравнений газовой динамики и переноса излучения.

Не останавливаясь на методах решения уравнений газовой динамики, рассмотрим более подробно вопросы, специфичные для задач р.г.д.

Система трех последних уравнений из (2.6) может быть сведена к системе, описывающей поведение групповой плотности энергии излучения:

$$
-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rl_k}{3}\frac{\partial U_k}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\frac{l_k}{3}\frac{\partial U_k}{\partial z}+\varkappa_k U_k=\varkappa_k U_{pk}. \tag{2.7}
$$

Применение лагранжевой системы координат приводит к появлению неортогональных сеток, на которых необходимо аппроксимировать эллиптическое уравнение (2.7).

В [53, 54] на основе интегроинтерполяционного метода было предложено определять потоки на неортогональной сетке путем аналитического перехода от координат ортогональной сетки к координатам сетки неортогональной. Такой подход позволяет частично учесть сильные изменения коэффициентов поглощения на фронтах тепловых и ударных волн. Полученная таким образом разностная схема записывается на девятиточечном шаблоне:

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & A_{in}{}^{k}U^{k}_{i-1,n-1}+B_{in}{}^{k}U^{k}_{i,n-1}+L_{in}{}^{k}U^{k}_{i+1,n-1}+K_{in}{}^{k}U^{k}_{i-1,n}-\\
& -C_{in}{}^{k}U_{in}{}^{k}+E_{in}{}^{k}U^{k}_{i+1,n}+P_{in}{}^{k}U^{k}_{i-1,n+1}+V_{in}{}^{k}U^{k}_{i,n+1}+\\
& +D_{in}{}^{k}U^{k}_{i+1,n+1}+F_{in}{}^{k}=0, \qquad k=1,2,\ldots,N_n.
\end{aligned}
$$

На ортогональных сетках схема (2.8) переходит в обычную пятиточечную.

Для решения разностной схемы (2.8) используется предложенный в [55] нелинейный итерационный метод. При построении этого итерационного алгоритма предполагается, что решение разностной системы уравнений (2.8) удовлетворяет условиям

$$
U_{in}=U_{i+1,\,n}\alpha_{i+1,\,n}+\beta_{i+1,\,n}, \qquad U_{in}=U_{i-1,\,n}\gamma_{i-1,\,n}+d_{i-1,\,n},
$$

$$
U_{in}=U_{i,\,n+1}\bar{\alpha}_{i,\,n+1}+\bar{\beta}_{i,\,n+1}, \qquad U_{in}=U_{i,\,n-1}\bar{\gamma}_{i,\,n-1}+\bar{d}_{i,\,n-1}.
$$

Прогоночные коэффициенты α, β, γ, d, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{d}$ определяются из соответствующей системы уравнений, которая решается с помощью итераций (см. [54–56]):

$$
\alpha_{i+1,\,n}=(E_{in}+\bar{\alpha}_{i+1,\,n}L_{in}+\bar{\gamma}_{i+1,\,n}D_{in})/\psi_{in\alpha},
$$

$$
\psi_{in\alpha}=C_{in}-\bar{\alpha}_{in}B_{in}-\bar{\gamma}_{in}V_{in}-\alpha_{in}\varphi_{in\alpha}, \qquad \varphi_{in\alpha}=K_{in}+\bar{\alpha}_{i-1,\,n}A_{in}+\bar{\gamma}_{i-1,\,n}P_{in},
$$

$$
\alpha_{2n}=\varphi_{2n}, \quad i=2,3,\ldots,N_i-1, \quad n=2,3,\ldots,N_n-1;
$$

$$
\gamma_{i-1,\,n}=(K_{in}+\bar{\alpha}_{i-1,\,n}A_{in}+\bar{\gamma}_{i-1}P_{in})/\psi_{in\gamma},
$$

$$
\psi_{in\gamma}=C_{in}-\bar{\alpha}_{in}B_{in}-\bar{\gamma}_{in}V_{in}-\gamma_{in}\varphi_{in\gamma}, \qquad \varphi_{in\gamma}=E_{in}+\alpha_{i+1,\,n}L_{in}+\bar{\gamma}_{i+1,n}D_{in},
$$

$$
\gamma_{N_i-1,\,n}=\varphi_{N_i-1}, \quad i=N_i-1,\ldots,3,2, \quad n=2,3,\ldots,N_n-1;
$$

$$
\bar{\alpha}_{i,\,n+1}=(V_{in}+\alpha_{i,\,n+1}P_{in}+\gamma_{i,\,n+1}D_{in})/\psi_{in\bar{\alpha}},
$$

$$
\psi_{in\bar{\alpha}}=C_{in}-\alpha_{in}K_{in}-\gamma_{in}E_{in}-\bar{\alpha}_{in}\varphi_{in\bar{\alpha}}, \qquad \varphi_{in\bar{\alpha}}=B_{in}+\alpha_{i,\,n-1}A_{in}+\gamma_{i,\,n-1}L_{in},
$$

$$
\bar{\alpha}_{i,\,2}=\varphi_{i,\,2}, \quad i=2,3,\ldots,N_i-1, \quad n=2,3,\ldots,N_n-1;
$$

$$
\bar{\gamma}_{i,\,n-1}=(B_{in}+\alpha_{i,\,n-1}A_{in}+\gamma_{i,\,n-1}L_{in})/\psi_{in\bar{\gamma}},
$$

$$
\psi_{in\bar{\gamma}}=C_{in}-\alpha_{in}K_{in}-\gamma_{in}E_{in}-\bar{\gamma}_{in}\varphi_{in\bar{\gamma}}, \qquad \varphi_{in\bar{\gamma}}=V_{in}+\alpha_{i,\,n+1}P_{in}+\gamma_{i,\,n+1}D_{in},
$$

$$
\bar{\gamma}_{i,\,N_n-1}=\varphi_{i,\,N_n-1}, \quad i=2,3,\ldots,N_i-1, \quad n=N_n-1,\ldots,3,2.
$$

Аналогично этому выписывается система для определения коэффициентов β, α, $\bar{\beta}$, $\bar{d}$.

В отличие от других итерационных методов здесь решается не исходная система (2.8), а новая система уравнений для коэффициентов $\alpha, \beta, \ldots, \bar{d}$. Сопоставления с другими методами показали, что нелинейный итерационный алгоритм может быть успешно применен для решения разностных линейных уравнений в том случае, когда априорная информация о границах спектра разностного оператора либо неизвестна, либо известна недостаточно точно. Метод допускает обобщения. В [57] была предложена и успешно применена для расчета задач динамики вязкой жидкости матричная форма этого алгоритма.

Решение многогрупповой системы уравнений (2.8) на каждом шаге по времени резко увеличивает машинное время расчета всей задачи динамики излучающего газа. Для повышения экономичности предложен и реализован следующий алгоритм.

На каком-то шаге по времени j решается многогрупповая система уравнений диффузии. Затем с помощью полученного численного решения строится осредненное разностное уравнение. Коэффициенты этого уравнения построены с учетом решения многогрупповой системы. В течение N_j шагов интегральный поток и плотность энергии излучения определяются из осредненного уравнения. На шаге $j+N_j$ процедура повторяется.

В отличие от ранее предложенных методов этого типа [34, 37], данный метод не привязан к какой-либо одномерной геометрии, одинаково применим для решения как одномерных, так и двумерных задач р.г.д. Не требует он и гладкости коэффициентов поглощения.

Наиболее простой схемой совместного решения уравнения энергии из (2.6) и уравнений, описывающих перенос излучения, является явная схема, когда поток энергии излучения определяется по данным с предыдущего шага по времени. Однако в случае наличия областей большой оптической толщины явная схема совместного решения требует ограничения на шаг по времени, аналогичного ограничению для явной схемы при расчете уравнения теплопроводности. Отметим, что ситуация, когда в той или иной части рассматриваемой области в те или иные моменты времени плазма становится непрозрачной, встречается довольно часто.

Предложенная в [42, 43] неявная схема совместного решения уравнения энергии и уравнений диффузионного типа имеет вид

$$(1+g_i)\,(A_{in}U^j_{i-1,n-1}+B_{in}U^j_{i,n-1}+L_{in}U^j_{i+1,n-1}+K_{in}U^j_{i-1,n}-$$

$$-C_{in}U_{in}{}^j+E_{in}U^j_{i+1,n}+P_{in}U^j_{i-1,n+1}+V_{in}U^j_{i,n+1}+D_{in}U^j_{i+1,n+1})-$$

$$-\varkappa_{in}U_{in}{}^j+F^{j-1}_{in}+\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1}\frac{\tau^{j-1}}{(\partial\varepsilon/\partial T)^{j-1}}Q_i{}^j=0,$$

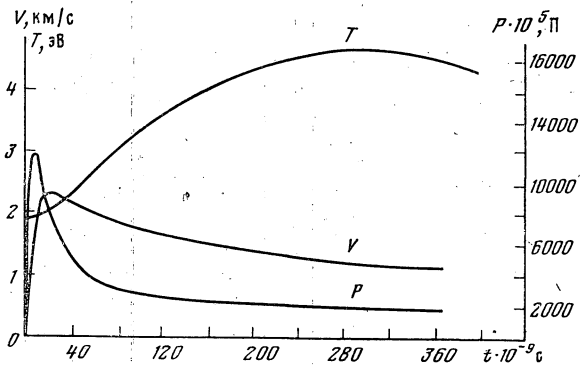
$$g=\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1}\tau^{j-1}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)^{j-1}\rho\right]^{-1}$$

$$T^j=T^{j-1}+\frac{\tau^{j-1}}{(\partial\varepsilon/\partial T)^{j-1}}[DW^j+Q_i{}^j],$$

где DW — разностная аппроксимация для divW, полученная на основе трех последних уравнений (2.6).

Эта схема показала хорошую эффективность при решении как одномерных, так и двумерных задач р.г.д. Для модельной, линейной относительно T^4 задачи можно показать ее абсолютную устойчивость.

Диффузионное приближение вполне применимо для корректного описания поля излучения в большинстве задач р.г.д. Для более полного опи-



Фиг. 7

сания поля излучения было предложено [58] использовать самосопряженное уравнение В. С. Владимирова [59]

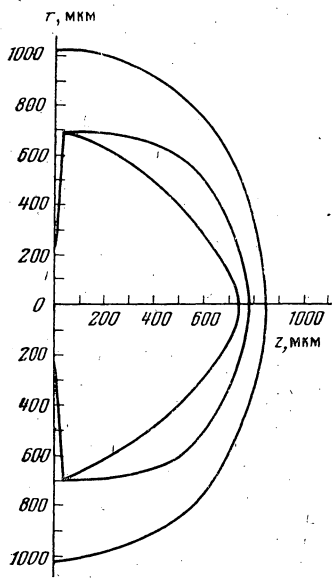
$$-(\Omega\ \mathrm{grad})^2 U_\nu + \varkappa_\nu U_\nu = \varkappa_\nu I_{\nu p}.$$

Расчеты показали, что использование этого уравнения позволяет успешно бороться с негативным вычислительным эффектом луча, который может иметь место при непосредственном определении поля излучения из уравнения переноса (2.4).

3. Примеры решений. Рассмотренная методика решения двумерных нестационарных задач динамики излучающего газа реализована в программном комплексе, использующем расширенную оперативную память машины БЭСМ-6 (см. [60]). Эта методика применялась для решения целого ряда практически важных задач. При этом в программе предусмотрено использование реальных уравнений состояния вещества и коэффициентов поглощения.

В качестве примера рассмотрим решение двумерной задачи о взаимодействии лазерного излучения с азотной плазмой высокой плотности вблизи металлической поверхности [63]. Экспериментальному изучению таких явлений посвящены работы [61, 62]. При этом отмечалось, что, с одной стороны, зона теплового воздействия на металлы значительно больше пятна фокусировки лазерного излучения, а с другой стороны, что это тепловое воздействие не приводит к кратерообразованию на поверхности металла.

Рассмотрим некоторые данные расчета варианта, в котором начальное давление азота выбиралось равным 10^7 Па, мощность лазерного из-



Фиг. 8

лучения равнялась $5 \cdot 10$ Вт/см^2, радиус пятна фокусировки лазерного излучения на металл $r_0=250$ мкм.

На фиг. 7 изображены характерные скорости в ударной волне, распространяющейся в холодном азоте, и характерные давления и температуры в горячей плазме. Из-за высокой начальной плотности азота скорость в ударной волне относительно невелика, поэтому она не экранирует лазерное излучение, которое целиком поглощается в горячей плазме.

На фиг. 8 изображены пространственные профили температуры на момент времени $t=0.5$ мкс. Видно, что радиус области, занятой горячей плазмой, значительно превышает радиус пятна фокусировки лазерного излучения. Излучение, генерируемое в этой области, оказывает непосредственное тепловое воздействие на металлическую пластину. С другой стороны, горячая плазма полностью экранирует металлическую пластину от действия лазерного излучения. Поэтому тепловое воздействие на пластину достаточно мягкое, что и объясняет отсутствие ее механических повреждений.

§ 3. Моделирование турбулентных процессов в плазме

В связи с исследованием методов нагрева плазмы сильноточными пучками релятивистских электронов или мощными пучками света принципиально важное значение приобрел вопрос о бесстолкновительных механизмах диссипации энергии в плазме. Первоначально энергия внешнего источника запасается в плазме в виде длинноволновых электронных колебаний с ленгмюровской частотой ω_p. Трансформация энергии длинноволновых ленгмюровских колебаний в коротковолновую часть спектра (область их поглощения частицами) связана с неустойчивостью, называемой в физике плазмы модуляционной [64]. В результате происходит локализация энергии ленгмюровских колебаний в областях пониженной плотности плазмы — кавернах. В конечном счете устанавливается турбулентное состояние (ленгмюровская турбулентность), когда энергия первоначальных длинноволновых ленгмюровских колебаний оказывается сосредоточенной в большом числе случайно расположенных и имеющих различные характерные размеры каверн. В отличие от гидродинамической турбулентности несжимаемой жидкости ленгмюровская турбулентность допускает одномерную модель. Этот факт связан с тем, что тенденция к развитию модуляционной неустойчивости и к образованию каверн сохраняется и в одномерном случае.

Тем не менее имеется важное различие между одномерной и трехмерной турбулентностью. В реальной трехмерной геометрии существует явление ленгмюровского коллапса, предсказанное в [64]. Оно заключается в том, что в процессе локализации энергии в кавернах происходит их сжатие и, соответственно, коротковолновая перекачка энергии запертых в кавернах ленгмюровских колебаний до масштабов, при которых становится существенным какой-либо из механизмов диссипации. В одномерной геометрии энергия плазменных колебаний локализуется в кавернах конечного размера — солитонах, по этой причине одномерный случай является вырожденным. Это вырождение частично снимается при наличии постоянно действующего источника ленгмюровских колебаний, когда возможен вынужденный коллапс: в результате поглощения энергии от источника каверна может сжиматься до размеров, при которых включаются диссипативные процессы.

Строгие аналитические решения в проблеме сильной ленгмюровской турбулентности чрезвычайно сложны и в настоящее время отсутствуют. Однако на основе численного моделирования возможно построение логически непротиворечивых приближенных моделей.

Для численного моделирования ленгмюровской турбулентности можно использовать два подхода. В первом математическая модель строится на основе кинетических уравнений Власова [65, 66], что позволяет одновременно учесть и волновые, и кинетические процессы в плазме. Однако его вычислительная реализация встречается с двумя значительными трудностями. Во-первых, характерные пространственно-временные масштабы явления определяются динамикой ионов и обычно существенно превышают пространственно-временные масштабы модели (дебаевский радиус r_D — величину смещения электрона относительно ионов и плазменный период ω_p^{-1}). Кроме того, для уравнений Власова скорости частиц, наряду с пространственными переменными, являются также независимыми переменными, что приводит к увеличению размерности задачи. Поэтому практическая реализация кинетического подхода возможна лишь в постановке с модельным отношением масс электронов и ионов $m/M \sim 10^{-2}$, а это несколько искажает реальную картину турбулентности.

В связи с этим для построения математических моделей ленгмюровской турбулентности представляется целесообразным другой подход, основанный на приближенных динамических уравнениях, которые можно получить усреднением уравнений Власова по скоростям частиц и интервалу времени, большему плазменного периода. Такая модель в качестве характерной величины не содержит плазменного периода и имеет естественные пространственно-временные масштабы модуляционной неустойчивости.

1. Исходные уравнения. На основе динамической системы уравнений плазменной турбулентности [64] рассмотрим задачу на ограниченном отрезке L с периодическими краевыми условиями по всем неизвестным. Для одного пространственного измерения такие уравнения принима-

ют вид (в безразмерных переменных)

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}[E(x,t)\exp(-i\omega_p t)+E^*(x,t)\exp(i\omega_p t)].$$

Комплексная амплитуда высокочастотного электрического поля удовлетворяет уравнению типа уравнения Шрёдингера:

$$2iE_t+\hat{\Gamma}E+E_{xx}=\delta n(E+E_0)-\langle\delta nE\rangle=0. \tag{3.1}$$

В линейном приближении квазинейтральная вариация плотности $\delta n=n-n_0$ и скорости медленных движений w удовлетворяет обычной системе уравнений газодинамики с учетом высокочастотного давления ленгмюровских колебаний:

$$\delta n_t+w_x=0, \tag{3.2}$$

$$w_t+\hat{\gamma}w+(\delta n+|E+E_0|^2)_x=0, \qquad \langle\delta nE\rangle=\frac{1}{L}\int_0^L \delta nE\,dx. \tag{3.3}$$

Последнее слагаемое в правой части (3.1) соответствует источнику, который поддерживает однородное электрическое поле в плазме на постоянном уровне E_0, так что

$$\langle E\rangle=\frac{1}{L}\int_0^L E(x,t)\,dx=E_0.$$

В (3.3) введены слагаемые, описывающие резонансное поглощение плазменных и звуковых волн электронами. Слагаемые $\hat{\Gamma}E$ и $\hat{\gamma}w$ являются интегральными операторами типа свертки:

$$\hat{\Gamma}E=\frac{1}{L}\int_0^L \Gamma(x-x')E(x',t)\,dx',$$

$$\hat{\gamma}w=\frac{1}{L}\int_0^L \gamma(x-x')w(x',t)\,dx';$$

здесь

$$\Gamma(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n e^{ik\xi}, \qquad \gamma(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{ik\xi}, \qquad k=\frac{2\pi n}{L}$$

являются фурье-образами декрементов затухания Γ_n, γ_n слагаемых с номером n соответствующих рядов Фурье

$$E(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}E_k e^{ikx}, \qquad w(x,t)=\sum_{n=-\infty}w_k e^{ikx},$$

где

$$E_k=\frac{1}{L}\int_0^L E(x,t)\,e^{ikx}\,dx,\qquad w_k=\frac{1}{L}\int_0^L w(x,t)\,e^{ikx}\,dx.$$

Для системы уравнений (3.1) — (3.3) на конечном интервале L с периодическими краевыми условиями справедливо интегральное следствие (энергетический баланс)

$$\partial W/\partial t+R=Q, \tag{3.4}$$

$$W=\frac{1}{L}\int_0^L |E|^2\,dx,\qquad R=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\Gamma_k|E_k|^2,\qquad Q=\operatorname{Im}E_0\langle\delta nE^*\rangle.$$

При отсутствии источника и затуханий $E_0=\hat{\Gamma}E=\hat{\gamma}w=0$ у (3.1) — (3.3) имеются интегралы движения

$$\begin{aligned} w&=\frac{1}{L}\int_0^L |E|^2\,dx,\\ I&=\int_0^L\left[|E_x|^2+\frac{1}{2}(n^2+w^2)+n|E|^2\right]dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В этом случае система (3.1) — (3.3) на неограниченной прямой допускает семейство точных решений типа уединенных волн (солитонов):

$$\begin{aligned} E(x,t)&=\frac{E_m\exp[iE_m^2t/4+q(x-x_0)]}{\operatorname{ch}[E_m(x-x_0-qt)/2(1-q^2)]},\\ \delta n&=-E^2/(1-q^2),\qquad w=q\delta n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3. Разностная схема. Ленгмюровская турбулентность представляет собой набор случайным образом расположенных солитонов (3.6) с различными амплитудами. Энергия внешнего поля E_0 поглощается ленгмюровскими волнами, длина которых ограничена снизу условием

$$\lambda^2>2\pi^2|E_0|^2.$$

Они нелинейным образом эволюционируют к солитонным решениям (3.6). На таких достаточно узких солитонах включается поглощение волн электронами (слагаемые $\hat{\Gamma}E$ и $\hat{\gamma}w$ в исходной системе становятся не малыми). Таким образом, рассматриваемая задача содержит все основные черты турбулентного процесса: поглощение энергии в длинных волнах, ее трансформацию по спектру в область коротких волн и, наконец, затухание коротковолновой части решения. Основной интерес здесь представляют не детали пространственных распределений $E(x,t)$ и $\delta n(x,t)$, а изменение средней по времени энергии плазменных колебаний W, частоты ее поглощения частицами $\nu_{эф}$ и энергии звуковых колебаний W_s.

Вычислительный алгоритм, используемый для численного моделирования такого процесса, должен удовлетворять следующим двум требованиям. Во-первых, для правильной передачи статистических свойств турбулентности задача должна быть решена при достаточно больших значениях L, так чтобы решение имело достаточно большое число солитонов. Поэтому, чтобы ограничиться сетками с реальным числом узлов, оказывается принципиальным использовать алгоритмы с возможно более высоким порядком аппроксимации по пространству. Это требование приводит к необходимости применения спектральных методов [67, 68], которые стали развиваться после появления алгоритма быстрого преобразования Фурье [69]. Дополнительное удобство спектрального метода состоит в том, что после преобразования Фурье уравнений (3.1) и (3.3) нелокальные операторы типа сверток, связанные с затуханием, переходят в локальные операторы умножения коэффициентов Фурье на соответствующие декременты. Во-вторых, вместе с высокой пространственной аппроксимацией алгоритм должен давать решение на асимптотических временах, когда начальный этап турбулентности полностью забывается и устанавливается динамически стационарное по времени решение. Возникает необходимость строить консервативные схемы [5, 70], обладающие разностным аналогом законов сохранения (3.4).

Приведем разностную схему для (3.1) — (3.3), удовлетворяющую сформулированным выше требованиям. Для простоты выкладок ограничимся случаем $E_0=\hat{\Gamma}E=\hat{\gamma}w=0$. Введем сетки

$$\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0, 1, \ldots\},\qquad \omega_h=\{x_i=ih,\ i=0, 1, \ldots, N-1\},$$
$$\omega_{\tau h}=\omega_\tau\times\omega_h.$$

На сетке ω_h с помощью конечных сумм Фурье введем сеточную функцию

$$f_i(t)=\sum_{n=-N/2+1}^{N/2} f_n \exp(ikx_i),\qquad k=\frac{2\pi n}{L},$$

где

$$f_n=\frac{h}{L}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \exp(-ikx_i).$$

Производные $\partial^p f/\partial x^p$ аппроксимируем выражением

$$\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right)_i=\sum_{n=-N/2+1}^{N/2}(ik)^p f_n \exp(ikx_i).$$

Аппроксимируя таким образом E, δn, U и их производные и подставляя эти величины в (3.1) — (3.3), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье:

$$2\dot{u}_n-k^2v_n-\bar{\bar{c}}_n=0,\qquad 2\dot{v}_n+k^2u_n+\bar{c}_n=0,$$
$$E_n=u_n+iv_n,\qquad \delta n_n+ikw_n=0,\qquad \dot{w}_n+ik(w_n+\varepsilon_n)=0. \tag{3.7}$$

Здесь $\bar{c}_n+i\bar{\bar{c}}_n$ и ε_n — коэффициенты Фурье дискретных рядов Фурье для $\delta n_i E_i$ и $\varepsilon_i=|E_i|^2$,

$$\bar{c}_n+i\bar{\bar{c}}_n=\frac{h}{L}\sum_{i=0}^{N-1} n_i E_i \exp(-ikx_i),$$

$$\varepsilon_n=\frac{h}{L}\sum_{i=0}^{N-1} |E_i|^2 \exp(-ikx_i).$$

Для аналитической функции f имеет место равенство

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x_i)-\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right)_i=O\left(h^{-p}\exp\left(-\frac{L}{h}\right)\right), \tag{3.8}$$

для $R+1$ раз дифференцируемой функции — равенство

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x_i)-\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right)_i=O(h^{R-p}). \tag{3.9}$$

Следовательно, (3.7) аппроксимирует исходную систему с порядком (3.8) или (3.9) при $p=2$. Аппроксимируем далее (3.7) по времени с порядком $O(\tau^2)$:

$$\begin{gathered}2\frac{u_n-u_n}{\tau}-k^2\frac{v_n+\check{v}_n}{2}-c_n=0,\qquad 2\frac{v_n-v_n}{\tau}+k^2\frac{u_n+\check{u}_n}{2}+\tilde{c}_n=0,\\ \frac{\delta n_n-\delta\check{n}_n}{\tau}+\frac{ik}{2}(w_n+\check{w}_n)=0,\quad \frac{w_n-\check{w}_n}{\tau}+\frac{ik}{2}(\delta n_n+\varepsilon_n+\delta\check{n}_n+\varepsilon_n)=0,\end{gathered} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{gathered}f_{1n}=\tilde{c}_n+i\tilde{\tilde{c}}_n=\frac{h}{L}\sum_{i=0}^{N-1} f_{1i}\exp(-ikx_i),\\ f_{1i}=\delta n_i^{1/2}E_i^{1/2},\\ \delta n_i^{1/2}\equiv\frac{1}{2}(\delta n_i+\delta\check{n}_i),\qquad E_i^{1/2}\equiv\frac{1}{2}(E_i+\check{E}_i),\\ \delta\check{n}_i\equiv\delta n_i(t_{j-1}),\qquad \check{E}_i\equiv E_i(t_{j-1}),\qquad \check{w}_i\equiv w_i(t_{j-1}),\end{gathered} \tag{3.11}$$

и, следовательно, задачу (3.1) — (3.3) — с порядком $O(\tau^2+h^{-2}e^{-L/h})$, если решением является аналитическая функция, и с порядком $O(\tau^2+h^{R-2})$ для $R+1$ раз дифференцируемого решения. Для сеточных функций E_i, n_i, w_i выполнены разностные аналоги законов сохранения (3.5) дифференциальной задачи

$$W_h=\sum_{h=-N/2+1}^{N/2}|E_n|^2, \tag{3.12}$$

$$(3.13)\qquad I_h=\sum_{n=-N/2+1}^{N/2}\left(k^2|E_n|^2+\frac{1}{2}|\delta n_n|^2+|w_n|^2+\delta n_n\varepsilon_n^*\right).$$

Таким образом, разностная схема (3.10), (3.11) удовлетворяет двум сформулированным выше требованиям об аппроксимации и консервативности.

3. Метод решения разностной задачи. Для решения нелинейной алгебраической задачи (3.10), (3.11) применим следующий итерационный процесс:

$$(3.14)\qquad \begin{aligned}
&2\frac{u_n^{s+1}-\check{u}_n}{\tau}-k^2\frac{v_n^{s+1}-\check{v}_n}{2}-c_n^s=0,\\
&2\frac{v_n^{s+1}-\check{v}_n}{\tau}+k^2\frac{u_n^{s+1}+\check{u}_n}{2}+\tilde{c}_n^s=0,\\
&\frac{\delta n_n^{s+1}-\delta\check{n}_n}{\tau}+\frac{ik(w_n^{s+1}+\check{w}_n)}{2}=0,\\
&\frac{w_n^{s+1}-\check{w}_n}{\tau}+\frac{ik}{2}(\delta n_n^{s+1}+\varepsilon_n^s+\delta\check{n}+\check{\varepsilon}_n)=0.
\end{aligned}$$

Можно убедиться, что при некотором ограничении шага по времени процесс (3.14) сходится.

Практика показывает, что при условии достаточно точного выполнения разностных аналогов интегралов движения (3.12) в течение всего времени расчета требуется ~10 итераций. Однако их число можно сократить. Проведем переход на следующий временной слой в два этапа. На первом этапе — предикторе — ограничимся в (3.14) конечным числом итераций $s+1=p$. На втором этапе — корректоре — выполним дополнительную итерацию по формулам

$$(3.15)\qquad \begin{aligned}
&\frac{u_n^2-\check{u}_n^2}{\tau}-k^2(v_n^{1/2})^p(u_n^{1/2})^p-(u_n^{1/2})^p(c_n)^p=0,\\
&\frac{v_n^2-\check{v}_n^2}{\tau}+k^2(u_n^{1/2})^p(v_n^{1/2})^p+(v_n^{1/2})^p(\tilde{c}_n)^p=0,\\
&\frac{\delta n_n-\delta\check{n}_n}{\tau}+ikw_n^{1/2}=0,\\
&\frac{w_n-\check{w}_n}{\tau}+ik[\delta\check{n}_n+(\varepsilon_n^{1/2})^p]=0.
\end{aligned}$$

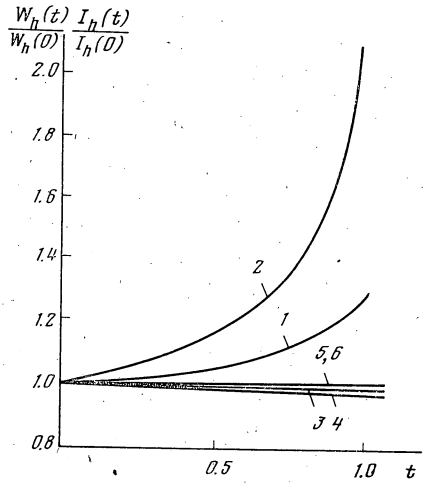
Складывая первые два уравнения (3.15) и суммируя результат по n, убеждаемся, что после второго этапа равенство (3.12) выполняется точно. Ана-

логичный корректор в явной схеме для моделирования турбулентности в несжимаемой жидкости используется в [71]. В случае сходимости предикторных итераций (3.14) корректирующая итерация (3.15) не возмущает решения, т. е. корректор согласован с предиктором. Напротив, ограничение предиктора недостаточным числом итераций (например, $p=1$) при достаточно крупном шаге по времени приводит к появлению отрицательной энергии у некоторых гармоник: $|E^p|^2=(u_n^2)^p+(v_n^2)^p<0$. Это обстоятельство не позволяет восстановить электрическое поле $E_n=u_n+iv_n$ и перейти к новому шагу по времени. Для того чтобы исключить $|E_n|^2<0$ из (3.14), достаточно выполнить некоторое конечное число итераций (в практических расчетах $p\approx3$, и из этого условия можно выбирать шаг по времени). Знаки u_n, v_n после корректора определяются знаками u_n^p, v_n^p после предиктора. Если для некоторых n имеет место $u_n^2<0$ или $v_n^2<0$, но $u_n^2+v_n^2>0$, то

$$u_n=(|E_n|^2)^{1/2}\cos\varphi_n^p,$$

$$v_n=(|E_n|^2)^{1/2}\sin\varphi_n^p,$$

где φ_n^p — фаза электрического поля после предиктора. При этом наряду с точным выполнением (3.12) оказывается выполненным с достаточной точностью (3.13).



Фиг. 9

Рассмотрим применение приведенного алгоритма к расчету точного решения (3.6). В качестве начальных данных на длине $L=4\pi$ ($N=512$) зададим функции (3.6) при $E_m=35$, $q=0$, $x_0=2\pi$. Выберем шаг по времени $\tau=10^{-3}$, что составляет $\approx0.02\,T$, где $T=8\pi/E_m^2$ — период временных колебаний электрического поля солитона. На фиг. 9 приведены зависимости от времени величин $W_h(t)/W_h(0)$ и $I_h(t)/I_h(0)$ при различном числе итераций: кривые *1, 2* — для $p=6$ без корректора; *3, 4* — для $p=8$ без корректора; *5, 6* — для $p=4$ с корректором. Отсюда видно, что использование корректора (3.15) позволяет значительно сократить количество итераций в (3.14).

Разностная схема (3.14), (3.15) естественным образом обобщается для исходной системы уравнений (3.1) — (3.4), при этом имеет место разностный аналог (3.4). Естественным образом она обобщается и на случай нескольких пространственных измерений.

4. Некоторые результаты расчетов. Результаты численного интегрирования (3.1) — (3.3) позволяют проследить основные этапы развития ленгмюровской турбулентности.

Начальная стадия модуляции ленгмюровского поля накачки описывается дисперсионным уравнением, связывающим частоту ω и волновое число

k модулирующей волны. В приведенных выше безразмерных единицах оно имеет вид

$$\omega^2-k^2=2|E_0|^2k^2\frac{k^2}{(2\omega+k^2)(2\omega-k^2)}. \tag{3.16}$$

Область модуляционной неустойчивости, как следует из (3.16), ограничена условием $k^2<2|E_0|^2$. В исследуемой ниже модели плазменной турбулентности $L=4\pi$, $k=n/2$, n — номер гармоники. При этом в области неустойчивости, например при $E_0=2$, попадают гармоники $n=1,\ldots,5$ (максимальное значение имеет инкремент $\gamma_4=3.46$, соответствующий $n=4$).

В качестве начальных данных будем использовать следующие шумовые распределения электрического поля и вариации плотности:

$$\begin{aligned} E(x,0)&=\varepsilon\sum_{-N/2+1}^{N/2}(A_n^{(1)}+iB_n^{(1)})\exp\left[i\left(\frac{2\pi n}{L}x+\alpha_n^{(1)}\right)\right],\\ \delta n(x,0)&=\nu\sum_{-N/2+1}^{N/2}(A_n^{(2)}+iB_n^{(2)})\exp\left[i\left(\frac{2\pi n}{L}x+\alpha_n^{(2)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

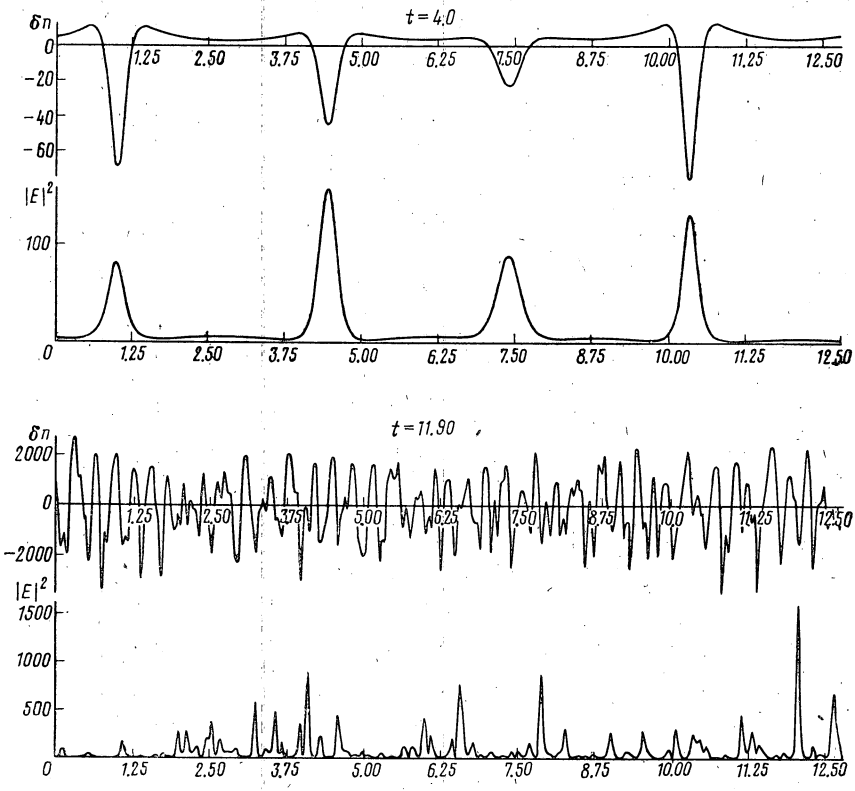
Здесь $A_n^{(2)}=A_{-n}^{(2)}$, $B_n^{(2)}=-B_{-n}^{(2)}$, $\alpha_n^{(2)}=-\alpha_n^{(2)}$; $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ — случайные амплитуды, равномерно распределенные на $[0, 1]$; $\alpha_n^{(1)}$, $\alpha_n^{(2)}$ — случайные фазы, равномерно распределенные на $[0, 2\pi]$; ε, ν — достаточно малые коэффициенты. Скорость ионов в начальный момент отсутствует, $w=0$.

Пусть $N=40$, $\varepsilon=\nu=0.1$, $E_0=2.0$ в (3.17), что соответствует росту на линейной стадии с максимальным инкрементом четвертой гармоники решения. На фиг. 10 показано распределение по пространству δn и $|E|^2$. До $t\approx3.5$ имеет место экспоненциальное нарастание амплитуды гармоники с $n=4$. В момент $t\approx10/\gamma\approx4.0$ из нее образуется решетка из четырех солитонов. Энергия, поглощенная из накачки, локализована в кавернах. При других значениях поля накачки число таких солитонов также равно номеру наиболее неустойчивой гармоники. Затем решетка разрушается. Наличие звуковых возмущений от поглощенных солитонов и действие накачки быстро приводят к турбулентной картине (см. фиг. 10, $t=11.90$). Здесь декремент затухания Ландау Γ_n не зависит от времени и соответствует максвелловской функции распределения электронов по скоростям. Важнейшими характеристиками плазмы в турбулентном состоянии являются средний уровень энергии колебаний

$$W=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{|E|^2}{8\pi}dx=\sum_n|E_k|^2,\qquad W_k=|E_k|^2$$

и эффективная частота столкновений $\nu_{эф}$, характеризующая скорость поглощения плазмой энергии внешнего источника $dW/dt=\nu_{эф}|E_0|^2$.

С течением времени образуются солитоны достаточно большой амплитуды и, следовательно, в силу (3.6), достаточно узкие, так что включается поглощение на электронах. В конечном счете устанавливается квази-



Фиг. 10

стационарное состояние турбулентности с балансом накачки и поглощения энергии

$$\frac{dW}{dt}=\nu_{\text{эф}}\frac{|E_0|^2}{8\pi}-\sum_n \Gamma_k|E_k|^2=0,$$

откуда

$$\nu_{\text{эф}}=|E_0|^{-2}\sum_n \Gamma_k|E_k|^2.$$

Детали физических результатов изложены в работах [72, 73].

§ 4. Решение краевых задач МГД-равновесия тороидальной плазмы

1. Уравнение равновесия. Одной из основных задач, возникающих при математическом моделировании физических процессов, используемых для длительной магнитной изоляции высокотемпературной плазмы, является исследование возможных равновесных плазменных конфигураций. Для дальнейшего изучения таких свойств плазменной кон-

фигурации, как наиболее опасные магнитогидродинамические неустойчивости плазменного шнура, процессы переноса и т. д., необходимо точное описание равновесного состояния.

Равновесие в плазменных конфигурациях описывается в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики уравнениями

$$\nabla P=(\mathbf{j}\times\mathbf{B}),\qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}=\mathbf{j},\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0, \tag{4.1}$$

где P — давление плазмы, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, а $\mathbf{B}$ — магнитное поле. В аксиально-симметричных конфигурациях (установки типа токамак) можно ввести так называемую функцию потока $\psi=rA_\varphi$, где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал магнитного поля, $(r,\ \varphi,\ z)$ — цилиндрическая система координат. С точностью до постоянной, $\psi=-\Phi_п/2\pi$, где $\Phi_п$ — полоидальный (поперечный) поток магнитного поля. Обозначим $f=rB_\varphi$, тогда полное магнитное поле определяется следующим образом:

$$\mathbf{B}=(\nabla\psi\times\mathbf{e}_\varphi)/r+f\mathbf{e}_\varphi/r,$$

$\mathbf{e}_\varphi$ — орт по координате φ.

Из уравнений (4.1) вытекает, что $P=P(\psi)$, $f=f(\psi)$, а функция ψ удовлетворяет уравнению равновесия, которое имеет вид [74]

$$r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-rj_\varphi(\psi,r), \tag{4.2}$$

где продольная компонента плотности электрического тока

$$j_\varphi(\psi,r)=r\frac{dP}{d\psi}+\frac{1}{r}f\frac{df}{d\psi}. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.2), (4.3) справедливы в области Ω_p, занятой плазмой (фиг. 11). В вакуумной прослойке Ω_v выполняется однородное уравнение равновесия

$$r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,\qquad (r,z)\in\Omega_v. \tag{4.4}$$

Система уравнений (4.2)—(4.4) дополняется соответствующими граничными условиями. На идеально проводящем кожухе Γ_0 функция потока ψ постоянна. Пусть, для определенности,

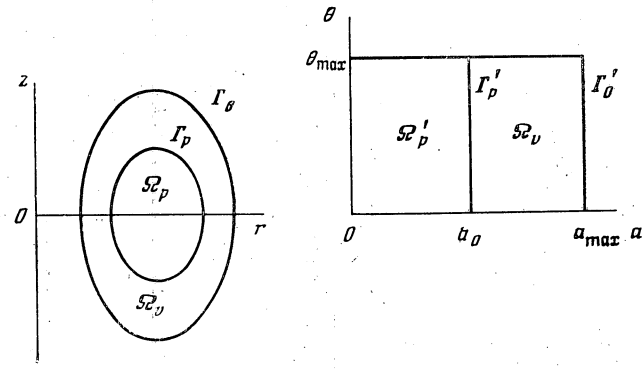
$$\psi(r,\ z)=0,\qquad (r,\ z)\in\Gamma_0. \tag{4.5}$$

Граница плазма — вакуум Γ_p определяется линией уровня $\psi=\psi_0=\text{const}$, если на ней нет поверхностного тока, а ψ и ее нормальная производная непрерывны. Таким образом, мы имеем краевую задачу (4.2)—(4.5) с неизвестной границей Γ_p и разрывной правой частью.

При численном решении таких задач используются два подхода. Первый основан на решении исходного уравнения равновесия на фиксированной эйлеровой сетке. Такому подходу посвящено большое количество работ (см., например, обзоры [75, 76]). Второй основан на переходе к новым независимым переменным, одной из которых является неизвестное реше-

ние. Здесь наиболее полно учитывается специфика задачи и, в частности, может быть рассмотрена неизвестная граница плазмы. Этот подход развивается в работах [77–80].

Большое количество публикаций [75, 76] посвящено решению задач равновесия с некоторыми заданными зависимостями $P(\psi)$ и $f(\psi)$. Однако



Фиг. 11

значительно больший интерес представляют задачи, где вместо $f(\psi)$ задан так называемый фактор запаса устойчивости $q(\psi)$ относительно винтовых возмущений плазменного шнура:

$$q(\psi)=\frac{d\Phi_{\text{т}}}{d\Phi_{\text{п}}}=-\frac{d\Phi_{\text{т}}}{2\pi\, d\psi};$$

здесь $\Phi_{\text{т}}$ — тороидальный (продольный) поток магнитного поля. Легко убедиться, что функция $f(\psi)$ выражается через $q(\psi)$ следующим образом:

$$f(\psi)=4\pi^2 q(\psi)\left(\oint\limits_{\psi=\text{const}}\frac{1}{r^2}\frac{ds}{|\nabla\psi|}\right)^{-1}. \tag{4.6}$$

В (4.6) интегрирование ведется по поверхности тора с сечением $\psi=\text{const}$ на плоскости (r, z).

Таким образом, задача равновесия сводится к решению (4.2)–(4.6) с заданными функциями $P(\psi)$, $q(\psi)$ и ψ на границе плазма — вакуум Γ_p и на магнитной оси, т. е. с условиями

$$\psi=\psi_0,\qquad (r, z)\in\Gamma_p,\qquad \psi=\psi_{\max},\qquad (r, z)\in\{(r, z)\,|\,\nabla\psi=0\}. \tag{4.7}$$

Покажем теперь, что при такой постановке задачи действительно должно быть задано второе из условий (4.7). Усредним уравнение равновесия (4.2) по объему между двумя соседними магнитными поверхностями ψ и $\psi+d\psi=\text{const}$. Обозначим через $V(\psi)$ объем внутри магнитной поверхности, определяемой условием $\psi=\text{const}$. При усреднении воспользуемся равенствами

$$\int\limits_{\psi}^{\psi+d\psi} a\,d\tau=\oint\limits_{\psi} a\frac{ds}{|\nabla\psi|}d\psi,\qquad \int\limits_{\psi}^{\psi+d\psi}\operatorname{div}\mathbf{a}\,d\tau=\frac{d}{d\psi}\oint\limits_{\psi}(\mathbf{a}\nabla\psi)\frac{ds}{|\nabla\psi|}d\psi,$$

где $d\tau = r dr\, d\varphi\, dz$ — элемент объема в цилиндрических координатах. При этом $V'(\psi) = -\oint ds/|\nabla\psi|$, а средняя величина $\langle a\rangle$ на магнитной поверхности $\psi = \text{const}$ определяется таким образом:

$$\langle a\rangle = -[V'(\psi)]^{-1} \oint_{\psi} a \frac{ds}{|\nabla\psi|}.$$

Учитывая, что

$$\Delta^* = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = r^2 \operatorname{div}\frac{1}{r^2}\operatorname{grad},$$

после усреднения уравнения (4.2) получаем обыкновенное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dV}\left(\left\langle\frac{|\nabla V|^2}{r^2}\right\rangle\frac{d\psi}{dV}\right) = -\frac{dP}{d\psi} - \tag{4.8}$$
$$-4\pi^2 q(\psi)\frac{d}{dV}\left(4\pi^2 q(\psi)\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle^{-1}\frac{d\psi}{dV}\right).$$

Для магнитной оси, где $V=0$, в левой части (4.8) имеет место $\langle|\nabla V|^2/r^2\rangle = 0$, и поэтому $\psi = \psi_{\max}$ является внутренней точкой оператора Δ^*. Но с учетом правой части уравнения (4.8) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, разрешимое при заданных ψ на обоих концах и когда $V = V_0$ (объем всей области, занятой плазмой), и когда $V=0$, т. е. на магнитной оси. Заметим, что именно последнее слагаемое правой части (4.8) является главной частью соответствующего дифференциального оператора. Это обстоятельство должно быть учтено в соответствующих численных алгоритмах. Такая нестандартная краевая задача требует разработки соответствующих методов решения, одним из которых является метод обращения переменных.

2. Ортогональные потоковые координаты. Полное решение задачи (4.2)—(4.7) возможно лишь при использовании численных методов. Наиболее удобной для решения задач эволюции является формулировка равновесия в так называемых естественных (потоковых) координатах, в которых в качестве одной из независимых координат выбирается сама функция потока ψ или — в общем случае — связанная с ней функция $a = a(\psi)$, а в качестве другой — некоторая вспомогательная функция θ. Неизвестными в этом случае являются $r(a, \theta)$, $z(a, \theta)$, и, таким образом, координатные поверхности $a = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ непосредственно дают геометрию магнитных поверхностей.

Выбор функции θ определяется спецификой задачи. Ниже рассмотрим ортогональные потоковые координаты (ψ, θ) такие, что координатные поверхности $a = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ образуют два семейства ортогональных поверхностей.

Запишем условие ортогональности ψ и θ в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \tag{4.9}$$

Условие (4.9) является следствием зависимости $\mu=\mu(\psi, \theta)$, для которой

$$\mu r\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \mu r\frac{\partial\theta}{\partial r}=-\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{4.10}$$

где $\mu=\mu(\psi, \theta)$ — любая функция. Функцию μ выберем так, чтобы $\psi(r, z)$ удовлетворяла уравнению равновесия (4.2) в области Ω_p, занятой плазмой, и однородному уравнению (4.4) в Ω_v. Из (4.10) получим

$$r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=r\left(\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right). \tag{4.11}$$

Рассмотрим правую часть этого выражения. Подставляя

$$\frac{\partial\mu}{\partial r}=\frac{\partial\mu}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\mu}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\mu}{\partial z}=\frac{\partial\mu}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

в правую часть (4.11), получаем

$$\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{\partial\mu}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right). \tag{4.12}$$

Кроме того, равенства (4.10) дают

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{|\nabla\psi|^2}{\mu^2}. \tag{4.13}$$

С учетом (4.12), (4.13) уравнение (4.11) переписывается в виде

$$r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial\mu}{\partial\psi}\frac{|\nabla\psi|^2}{\mu} \tag{4.14}$$

В области Ω_p уравнение (4.14) должно совпадать с уравнением равновесия (4.2). Таким образом, при $\psi_0<\psi<\psi_{max}$ функция $\mu(\psi, \theta)$ определяется из условия

$$\frac{\partial\mu}{\partial\psi}=-\frac{\mu^2}{|\nabla\psi|^2}j_\varphi(\psi, r). \tag{4.15}$$

В вакуумной области Ω_v, в соответствии с (4.4), из (4.14) получим

$$\partial\mu/\partial\psi=0, \qquad 0<\psi<\psi_0. \tag{4.16}$$

Таким образом, равновесие определяется системой уравнений (4.10) с функцией $\mu(\psi, \theta)$, которая удовлетворяет (4.15), (4.16). Введем общие потоковые координаты $(a(\psi), \theta)$. На $a(\psi)$ наложим требование монотонности. Предположим для определенности, что $a(\psi_{max})=0$ на магнитной оси, где $\psi=\psi_{max}$, $a(\psi_0)=a_0$ на границе плазмы Γ_p, где $\psi=\psi_0$, и $a(0)=a_{max}$ на кожухе, где $\psi=0$. Пусть $\nu(a)=-(da/d\psi)^{-1}$, $\mu_a(a, \theta)=-\mu\nu^{-1}(a)$, а поверхностные функции (давление P, функция f, фактор запаса устойчивости q) являются функциями a, т. е. $P=P(a)$, $f=f(a)$, $q=q(a)$. Тогда система

уравнений (4.10) переписывается в виде

$$\mu_a r\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial a}{\partial r},\qquad \mu_a r\frac{\partial\theta}{\partial r}=-\frac{\partial a}{\partial z};\tag{4.17}$$

(4.15) в плазме преобразуется к интегродифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial a}(\nu^2\mu_a^2)+\frac{d}{da}\left[\int\limits_0^{\theta_{\max}}\frac{d\theta}{Ir}\right]^{-2}=-2r^2\frac{dP}{da},\qquad 0<a\leqslant a_0,\tag{4.18}$$

а в вакууме — к

$$\frac{\partial}{\partial a}(\nu^2\mu_a^2)=0,\qquad a_0<a<a_{\max}.\tag{4.19}$$

Далее в уравнениях (4.17)—(4.19) совершим переход от переменных (r, z) к переменным (a, θ). При этом неизвестными функциями будем считать $r=r(a, \theta)$, $z=z(a, \theta)$. После такого преобразования приходим к следующей системе уравнений для $r(a, \theta)$, $z(a, \theta)$:

$$\mu_a r\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{\partial z}{\partial\theta},\qquad \mu_a r\frac{\partial z}{\partial a}=-\frac{\partial r}{\partial\theta}.\tag{4.20}$$

Итак, задача в переменных (a, θ) сводится к совместному решению (4.18)—(4.20). Область $\Omega=\Omega_p+\Omega_v$ в плоскости (r, z) отображается на прямоугольник (см. фиг. 11) $\Omega'=\{[0, a_{\max}]\times[0, \theta_{\max}]\}$ в плоскости (a, θ).

Для численного решения задачи от системы (4.14) предпочтительнее перейти к двум эллиптическим уравнениям

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left(\mu_a r\frac{\partial r}{\partial a}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\mu_a r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)=0,\\&\frac{\partial}{\partial a}\left(\mu_a r\frac{\partial z}{\partial a}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\mu_a r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)=0.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Обсудим краевые условия для (4.21). По переменной θ ставятся естественные условия периодичности с периодом $\theta_{\max}$:

$$r(a, \theta+\theta_{\max})=r(a, \theta),\qquad z(a, \theta+\theta_{\max})=z(a, \theta).\tag{4.22}$$

В общем случае положение магнитной оси неизвестно. Однако здесь краевые условия задавать не требуется, так как, в силу (4.20),

$$\mu_a r\frac{\partial r}{\partial a}=0,\qquad \mu_a r\frac{\partial z}{\partial a}=0\tag{4.23}$$

при $a=0$ и поэтому (4.21) на магнитной оси являются вырожденными эллиптическими уравнениями.

Система (4.21) при заданной функции μr эквивалентна системе (4.20), если только соответствующим образом поставить граничные условия на Γ_0 (при $a=a_{\max}$). В силу ортогональности a и θ, функции θ и μ не могут быть произвольными на любой магнитной поверхности $a=\text{const}$, в том

числе и на наружной поверхности $a=a_{\max}$. Можно задавать произвольным образом при $a=\text{const}$ только одну из функций, θ или μ, а другая однозначно определяется из условия ортогональности a и θ. Например, как следует из (4.20), при заданном θ на некоторой магнитной поверхности $a=\text{const}$ функцию $\mu_a(a, \theta)$ можно определить из условия

$$\mu^2 r^2 \left[\left(\frac{\partial r}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2. \tag{4.24}$$

Это выражение дает начальное условие для (4.18), (4.19). Оно может быть поставлено на последней магнитной поверхности $a=a_{\max}$ или на некоторой внутренней магнитной поверхности $a=a^*$. В последнем случае (4.18), (4.19) должны быть решены отдельно на $(0, a^*)$ и $(a^*, a_{\max})$.

После того как на внешней границе (кожухе) функция θ задана, воспользовавшись заданными координатами кожуха Γ_0 для (4.21), можно поставить краевые условия I рода при $a=a_{\max}$:

$$r(a_{\max}, \theta)=r_0(\theta), \qquad z(a_{\max}, \theta)=z_0(\theta). \tag{4.25}$$

Таким образом, решение исходной задачи (4.2)–(4.7) равновесия идеальной плазмы при заданном давлении и факторе запаса устойчивости сведено к решению нелинейной краевой задачи (4.21)–(4.23), (4.25) с коэффициентом μ, который удовлетворяет (4.18), (4.19), (4.24). Данная формулировка задачи равновесия была положена в основу метода численного решения. Детально на вопросах численного моделирования останавливаться не будем.

3. Примеры расчетов. Развиваемый здесь метод решения задач МГД-равновесия, основанный на методе обращения переменных, особенно удобен для решения задач эволюции равновесных конфигураций и при исследовании их на устойчивость. Рассмотрим в качестве примера решение задачи об эволюции идеально проводящей плазмы при повышении давления. Для конкретных реальных установок определяющее значение имеют такие безразмерные параметры, как фактор запаса устойчивости и величина β:

$$\beta=2\langle P\rangle/\langle B_\varphi^2\rangle,$$

где

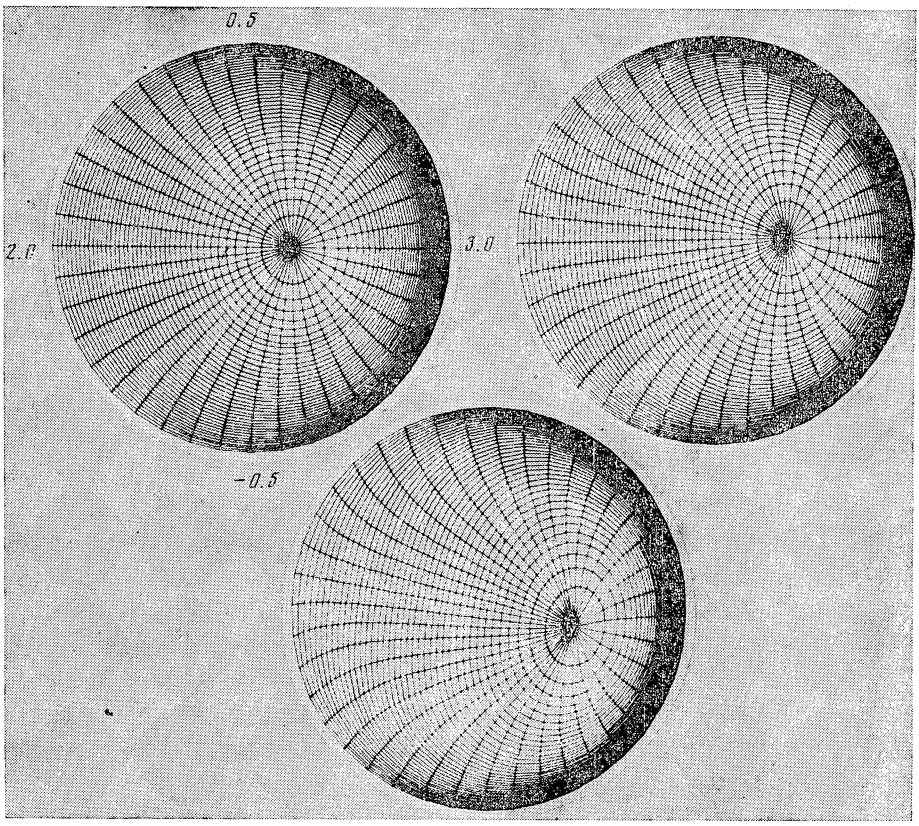
$$\langle P\rangle=\left[(S_{\Omega_p})^{-1}\int\limits_{\Omega_p} P^2\,dr\,dz\right]^{1/2},$$

$$\langle B_\varphi^2\rangle=(S_{\Omega_p})^{-1}\int\limits_{\Omega_p} B_\varphi^2\,dr\,dz, \qquad S_{\Omega_p}=\int\limits_{\Omega_p} dr\,dz.$$

Условие $q>1$ обеспечивает устойчивость равновесной конфигурации относительно наиболее опасных винтовых возмущений. Установки с большими значениями β представляются энергетически более выгодными с

точки зрения термоядерного реактора. Равновесные конфигурации с достаточно большими значениями $\beta \approx 0.1$ можно получить, например, повышая давление при сохранении магнитных потоков.

В приведенных ниже примерах расчетов в качестве потоковой переменной выбрана функция $a(\psi)=\Phi_т$, $a(\psi)\in[0, 1]$, $-da/d\psi=-2\pi q(\psi)=\nu^{-1}(a)$, $\Phi_{1\,max}=1$. Фактор запаса устойчивости $q(a)$ выбран линейной функцией



Фиг. 12

$q(a)=q_0+q_1a$, так что $q(0)=q_0$, $q(1)=q_0+q_1$, а давление $P(a)=\alpha(1-a)$, $dP/da=-\alpha$.

На фиг. 12 представлены результаты расчетов с различными α (давлением) при $q_0=1.5$, $q_1=2.5$, когда плазма касается кожуха кругового сечения. Здесь видно, что в силу баллонного эффекта (расширение плазменного шнура при повышении давления) магнитная ось смещается к бо́льшим значениям r, а магнитные поверхности увеличивают эллиптичность сечения плазмы.

Развиваемый здесь метод может быть обобщен на неортогональные координаты [79], применен к задачам со свободной границей для эллиптических уравнений и систем [78].

§ 5. Полностью нейтральные разностные схемы для уравнений Навье — Стокса

При численном решении задач газовой динамики и гидродинамики весьма существенно строить разностные схемы так, чтобы в них выполнялись аналоги законов сохранения, заложенные в исходных дифференциальных уравнениях. Схемы такого типа были названы консервативными [2]. Дальнейшее развитие принципа консервативности привело к понятию полной консервативности разностных схем, в которых отражены дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии [2, 5].

Несмотря на то, что численные методы гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости нашли широкое применение для различных классов прикладных задач, теория разностных схем и, в частности, вопросы их устойчивости изучены недостаточно. Так, при расчете течений жидкости на больших временных интервалах ряд обычных разностных схем проявляет неустойчивость и счет становится практически невозможным. На это обстоятельство, часто именуемое в литературе «нелинейной неустойчивостью», указал Аракава [81]. С аналогичными вопросами устойчивости столкнулись Б. Л. Рождественский и др. [71] при численном моделировании турбулентности. В этом случае, согласно линейной теории, в решении присутствует экспоненциально растущая мода и в схемах, не обладающих свойствами, о которых речь пойдет ниже, вычислительная неустойчивость развивается очень быстро.

В [81] при рассмотрении уравнений переноса были предложены некоторые типы разностной аппроксимации (на квадратной сетке) членов переноса — якобианов $D=\partial(\omega, \psi)/\partial(x, y)$, которые не дают вклада в баланс энергии $(E=\int[(U^2+V^2)/2]dxdy)$ и энстропии $(\int(\omega^2/2)dxdy)$, отражая свойства исходных уравнений при нулевых скоростях на границе области. Такие схемы назовем энергетически нейтральными и энстропийно нейтральными. Схему, обладающую обоими свойствами, назовем полностью нейтральной. Энергетически нейтральные схемы для уравнений гидродинамики, основанные на применении метода Галеркина, ранее предлагались в [71]. Последнее обстоятельство оправдывает введение для характеристики изучаемого свойства специального термина «нейтральность», поскольку неясно, как определять консервативность в методе Галеркина. Кроме того, нейтральность характеризует аппроксимацию только некоторых вполне определенных членов уравнения.

Предложим [83] некоторые семейства энергетически нейтральных и энстропийно нейтральных схем для систем уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости на неравномерных (по x и y) сетках и построим полностью нейтральную схему. Рассмотрение вопросов аппроксимации уравнений Навье — Стокса будем вести в прямоугольной области. На границе прямоугольника зададим скорости U и V в направлении осей координат O_x и O_y.

Изучение аппроксимации граничных условий в переменных ψ, ω показало, что известная аппроксимация вихря в граничных узлах по формуле

Тóма (см., например, [82]) позволяет строить консервативные неявные схемы. При этом сеточные операторы сохраняют важные свойства дифференциальных операторов исходной задачи, схемы являются однородными. Для рассматриваемых схем получены априорные энергетические оценки, из которых следует их устойчивость (в смысле устойчивости нулевого решения). Предложена также схема, линейная относительно искомых функций на верхнем временнóм слое, не нарушающая энергетической оценки устойчивости.

1. Постановка исходной задачи. В прямоугольнике $G=\{0<x<a,\ 0<y<b\}$ с границей Γ будем рассматривать систему уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости с плотностью $\rho=1$ при $0<t\leqslant T$, записанную в переменных ψ, ω, Q, где $Q=P+(U^2+V^2)/2$ — напор, P — давление.

Систему уравнений запишем в виде

$$\omega_t=W_{2x}-W_{1y},\quad W_{1x}+W_{2y}=0,\quad \Delta\psi=-\omega. \tag{5.1}$$

Здесь «потоки» W_1 и W_2 имеют вид

$$W_1=-(\nu\omega_y-D_2+Q_x),\qquad D_2=V\omega,\qquad V=-\psi_x,$$
$$W_2=\nu\omega_x-D_1-Q_y,\qquad D_1=U\omega,\qquad U=\psi_y.$$

Граничные и начальные условия для системы (5.1)

$$\begin{aligned}&W_1=U_{0t},\quad W_2=V_{0t},\quad \psi=\psi_0,\quad (x,y)\in\Gamma,\quad 0<t\leqslant T,\\ &U=U^0,\quad V=V^0,\quad (x,y)\in G,\quad t=0;\end{aligned} \tag{5.2}$$

U^0, V^0 — заданные граничные скорости, очевидным образом связанные с ψ_0.

2. Сетки и сеточные функции. На отрезках $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ введем точки $x_0=0,\ x_1,\ldots,x_M=a$, $y_0=0,\ y_1,\ldots,y_N=b$. Расстояния между соседними точками обозначим через $h^{(1)}$, $h^{(2)}$. Введем также средние шаги $\hbar^{(1)}$, $\hbar^{(2)}$ (см. [2]). В прямоугольнике введем сетку $\bar\Omega_h=\Omega_h\cup\Gamma_h$ узлов $X=(x_i, y_k)$, $i=0,1,\ldots,M$, $k=0,1,\ldots,N$. Сеточные функции и соответствующие им функции исходной задачи будем обозначать одними и теми же буквами. В узлах сетки $\bar\Omega_h$ определим величины ψ_{ik} и ω_{ik}. Сеточные функции $Q=Q_{i+1/2,\,k+1/2}$ будем относить к узлам $X_0=(x_{i+1/2}, y_{k+1/2})\in\Omega_{h_0}$, а также к граничным узлам $(x_{i+1/2}, y_k)$, $k=0, N$, $(x_i, y_{k+1/2})$, $i=0, M$, множество которых обозначим через Γ_{h_0}.

Введем сеточные аналоги производных по x и y. Для сеточных функций $z_{is}=z(x_i, y_s)$, $s=k,\ k+{}^1/_2$, и $z_{i+1/2,\,s}=z(x_{i+1/2}, y_s)$, $s=k,\ k+{}^1/_2$, соответственно положим

$$z_{k,i+1/2,s}=(z_{i+1,s}-z_{is})/h^{(1)}_{i+1/2},\qquad s=k,k+{}^1/_2,$$

$$z_{\hat{x}is}=\begin{cases}(z_{1/2,\,s}-z_{0s})/\hbar^{(1)}_0, & i=0,\\ (z_{i+1/2,\,s}-z_{i-1/2,\,s})/\hbar^{(1)}_i, & 0<i<M,\\ (z_{Ms}-z_{M-1/2,\,s})/\hbar^{(1)}_M, & i=M,\quad s=k,\ k+{}^1/_2.\end{cases}$$

Аналогично определяются разностные отношения z_y, $z_{\hat{y}}$.

Введем сетку $\Omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,\ 1,\ldots,j_0=T/\tau\}$ с шагом τ. Функцию Q будем относить к временно́му слою $t_{j+1/2}=0.5(t_{j+1}+t_j)$. Положим

$$\psi^{j+1/2}=(\psi^{j+1}+\psi^j)/2,\qquad \omega^{j+1/2}=(\omega^{j+1}+\omega^j)/2 \tag{5.3}$$

и т. д.

3. Разностная схема. Применяя интегроинтерполяционный метод для аппроксимации исходной задачи (5.1), (5.2), приходим к следующей разностной системе уравнений:

$$\omega_{\bar t}^{j+1/2}=W_{2\hat x}^{j+1/2}-W_{1\hat y}^{j+1/2},\qquad X\in\overline{\Omega}_h, \tag{5.4}$$

$$W_{1x}^{j+1/2}+W_{2y}^{j+1/2}=0,\qquad X_0\in\Omega_{h_0}, \tag{5.5}$$

$$\Delta_h\psi^{j+1}=-\omega^{j+1},\qquad X\in\Omega_h, \tag{5.6}$$

при краевых условиях в узлах на Г

$$W_1^{j+1/2}=\overline{U}_{0\bar t}^{j+1}\qquad W_2=\overline{V}_{0\bar t}^{j+1},\qquad \psi^{j+1}=\overline{\psi}_0^{j+1},\qquad j=0,1,\ldots,j_0, \tag{5.7}$$

и начальных условиях

$$\psi^0=\overline{\psi}^0,\qquad \omega^0=\overline{\omega}^0,\qquad X\in\overline{\Omega}_h. \tag{5.8}$$

Величины $\overline{U}_0$, $\overline{V}_0$ — средние от U_0, V_0 по соответствующим отрезкам $h^{(2)}$, $h^{(1)}$ либо $\hbar^{(2)}$, $\hbar^{(1)}$; $\overline{\psi}_0$ выражается через них естественным образом.

Потоки W_1, W_2 в (5.4), (5.5) определим по формулам

$$\begin{aligned} W_{1,\,i,\,k+1/2}&=-(\nu\omega_y-D_2+Q_{\hat x})_{i,\,k,\,+1/2},\\ W_{2,\,i+1/2,\,k}&=(\nu\omega_x-D_1-Q_{\hat y})_{i+1/2,\,k}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Зададим W_1, W_2 в точках Г таким образом:

$$W_1=\overline{U}_{0t},\quad W_2=\overline{V}_{0t},\qquad t=t_{j+1/2}.$$

Введем обозначения $\alpha_i^{(1)}=h_{i+1/2}^{(1)}/(2\hbar_i^{(1)})$, $\alpha_k^{(2)}=h_{k+1/2}^{(2)}/(2\hbar_k^{(2)})$; тогда $h_{i-1/2}^{(1)}/(2\hbar_i^{(1)})=1-\alpha_i^{(1)}$, $h_{k-1/2}^{(2)}/(2\hbar_k^{(2)})=1-\alpha_k^{(2)}$.

Укажем три способа аппроксимации величин $D_1=U\omega$ и $D_2=V\omega$, приводящих к схемам на девятиточечном шаблоне для функций ω, ψ (индекс $j+1/2$ у функций ω, ψ, U, V будем опускать).

Способ I:

$$D_{1,i+1/2,k}^{(1)}=(\overline{U}_{i+1,k}\omega_{i+1,k}+\overline{U}_{ik}\omega_{ik})/2,\qquad D_{2,i,k+1/2}^{(1)}=(\overline{V}_{i,k+1}\omega_{i,k+1}+\overline{V}_{ik}\omega_{ik})/2,$$

$$\overline{U}_{ik}=\alpha_k^{(2)}U_{i,k+1/2}+(1-\alpha_k^{(2)})U_{i,k-1/2},\qquad 0<k<N,$$
$$\overline{U}_{i0}=U_{i,\,1/2},\quad \overline{U}_{iN}=U_{i,\,N-1/2},$$

$$\overline{V}_{ik}=\alpha_i^{(1)}V_{i+1/2,k}+(1-\alpha_i^{(1)})V_{i-1/2,k},\qquad 0<i<M,\quad \overline{V}_{0k}=V_{1/2,k},$$
$$\overline{V}_{Mk}=V_{M-1/2,k}.$$

Способ II:

$$D^{(2)}_{1,i+1/2,0}=\overline{U}_{i+1/2,1/2}\overline{\omega}_{i+1/2,1/2},\qquad D^{(2)}_{1,i+1/2,N}=\overline{U}_{i+1/2,N-1/2}\overline{\omega}_{i+1/2,N-1/2},$$

$$D^{(2)}_{1,i+1/2,k}=\alpha^{(2)}_k\overline{U}_{i+1/2,k+1/2}\omega_{i+1/2,k+1/2}+(1-\alpha^{(2)}_k)U_{i+1/2,k-1/2}\omega_{i+1/2,k-1/2},$$
$$0<k<N;$$

$$D^{(2)}_{2,0,k+1/2}=\overline{V}_{1/2,k+1/2}\overline{\omega}_{1/2,k+1/2},\qquad D^{(2)}_{2,M,k+1/2}=\overline{V}_{M-1/2,k+1/2}\overline{\omega}_{M-1/2,k+1/2},$$

$$D^{(2)}_{2,i,k+1/2}=\alpha^{(1)}_i\overline{V}_{i+1/2,k+1/2}\overline{\omega}_{i+1/2,k+1/2}+(1-\alpha^{(1)}_i)\overline{V}_{i-1/2,k+1/2}\overline{\omega}_{i-1/2,k+1/2},$$
$$0<i<M;$$
$$\overline{U}_{i+1/2,\,k+1/2}=(U_{i+1,\,k+1/2}+U_{i,\,k+1/2})/2,$$
$$\overline{V}_{i+1/2,\,k+1/2}=(V_{i+1/2,\,k+1}+V_{i+1/2,\,k})/2,$$
$$\overline{\omega}_{i+1/2,\,k+1/2}=(\omega_{i+1,\,k+1}+\omega_{i+1,\,k}+\omega_{i,\,k+1}+\omega_{ik})/4.$$

Способ III:

$$D^{(3)}_{1,i+1/2,k}=\overline{U}_{i+1/2,k}(\omega_{i+1,k}+\omega_{ik})/2,$$

$$D^{(3)}_{2,i,k+1/2}=\overline{V}_{i,k+1/2}(\omega_{i,k+1}+\omega_{ik})/2,$$
$$\overline{U}_{i+1/2,\,0}=U_{i+1/2,\,1/2},\qquad U_{i+1/2,\,N}=\overline{U}_{i+1/2,\,N-1/2},$$

$$\overline{U}_{i+1/2,k}=\alpha^{(2)}_k\overline{U}_{i+1/2,k+1/2}+(1-\alpha^{(2)}_k)\overline{U}_{i+1/2,k-1/2},\qquad 0<k<N;$$
$$\overline{V}_{0,\,k+1/2}=\overline{V}_{1/2,\,k+1/2},\qquad \overline{V}_{M,\,k+1/2}=\overline{V}_{M-1/2,\,k+1/2},$$

$$\overline{V}_{i,k+1/2}=\alpha^{(1)}_i\overline{V}_{i+1/2,k+1/2}+(1-\alpha^{(1)}_i)\overline{V}_{i-1/2,k+1/2},\qquad 0<i<M.$$

Величины $\overline{U}$, $\overline{V}$ выражаются через U, V, а последние с помощью равенств $U_{i,\,k+1/2}=\psi_{y,\,i,\,k+1/2}$, $V_{i+1/2,\,k}=-\psi_{x,\,i+1/2,\,k}$ — через ψ_{ik}. Поэтому $D_s=D^{(n)}_s(\psi^{j+1/2},\ \omega^{j+1/2})$, $s=1, 2$, $n=1, 2, 3$.

Уравнение (5.4), записанное в точках Γ_h, содержит приграничные значения переменной Q. Во внутренних узлах переменная Q в (5.4) выпадает. Можно показать [83], что (5.4)—(5.8) алгебраически эквивалентна общепринятой задаче в переменных ψ, ω и задаче для Q с соответствующими условиями. Для ψ, ω задача может быть решена независимо от переменной Q, при этом вместо уравнения (5.4) в граничных узлах следует воспользоваться известным условием Тóма, учитывая, что оно же связывает начальные условия $\overline{\omega}^0$ и $\overline{\psi}^0$ на Γ_h: $\overline{\omega}^0=-\Delta_h\overline{\psi}^0$, $x\in\Omega_h$.

Итак, приходим к следующей схеме в переменных ψ, ω:

$$\omega_{\bar t}^{j+1}+D(\omega^{j+1/2}\psi^{j+1/2})=\nu\Delta_h\omega^{j+1/2},\qquad X\in\Omega_h,$$
$$\Delta_h\psi^{j+1}=-\omega^{j+1},\qquad X\in\overline{\Omega}_h,\quad j=0, 1, \ldots, j_0. \tag{5.10}$$

Здесь Δ_h — естественная аппроксимация оператора Лапласа во внутренних узлах и аппроксимация Тóма в граничных узлах:

$$D(\omega, \psi)=D_{1\hat{x}_1}+D_{2\hat{x}_2}. \tag{5.11}$$

4. Семейство нейтральных схем. Полностью нейтральная схема. Изучим свойства схем (5.10) (или (5.4)—(5.8)) при различных аппроксимациях D_1 и D_2 по формулам способов I—III при однородных краевых условиях

$$(5.12)\qquad \overline{U}_0^j=\overline{V}_0^j=0,\qquad \overline{\psi}_0^j=\text{const},\qquad (x, y)\in\Gamma.$$

Поскольку $W_{2ik}^{j+1/2}=0$, $i=0,M$, $W_{1ik}^{j+1/2}=0, k=0, N$, то в (5.11) следует положить $D_{1ik}^{j+1/2}=0$, $i=0, M$, $D_{2in}^{j+1/2}=0$, $k=0, N$. В узлах $(x_{i+1/2}, y_k)$, $k=0, N$, $(x_i, y_{k+1/2})$, $i=0, M$, будем определять $W_1^{j+1/2}$, $W_2^{j+1/2}$ по (5.9). В связи с этим и $D_{1,i+1/2,k}^{j+1/2}$, $k=0,N$, $D_{2,i,k+1/2}^{j+1/2}$, $i=0, M$, будем вычислять по соответствующим формулам (при условиях (5.12)).

Для исходной задачи (5.1), (5.2) при однородных краевых условиях $u_0=v_0=0$ имеет место тождество

$$(5.13)\qquad \frac{\partial E}{\partial t}+\nu\int\limits_G \omega^2 dxdy=0,\qquad \int\limits_G D\psi dxdy=0,$$

где $D=\partial D_1/\partial x+\partial D_2/\partial y$, $D_1=U\omega$, $D_2=V\omega$.

При однородных краевых условиях $u_0=v_0=0$

$$(5.14)\qquad \int\limits_G D\omega dxdy=0.$$

Равенства (5.13), (5.14) означают, что члены переноса не дают вклада в баланс энергии и энстропии.

Будем говорить, что разностная схема энергетически или энстропийно нейтральна, если сеточные аналоги членов переноса $D^{j+1/2}=(D_1^{j+1/2})_{\hat{x}}+(D_2^{j+1/2})_{\hat{y}}$ не дают вклада в баланс энергии $(D^{j+1/2}, \psi^{j+1/2})=0$ или энстропии $(D^{j+1/2}, \omega^{j+1/2})=0$. Если имеют место оба этих равенства, то разностную схему назовем полностью нейтральной. Здесь введено скалярное произведение

$$(\omega, \Psi)=\sum_{\overline{\Omega}_h}\omega\Psi\hbar^{(1)}\hbar^{(2)},\qquad \|\omega\|=(\omega, \omega)^{1/2}.$$

Чтобы выявить семейство энергетически нейтральных схем, следует вычислять при условии (5.12) скалярное произведение $(D^{(n), j+1/2}, \psi^{j+1/2})$, $n=1, 2, 3$. В результате получим, что $(D^{(n), j+1/2}, \psi^{j+1/2})=0$, $n=1, 2$, т. е. схемы с $D^{j+1/2}=D^{(1), j+1/2}$, $D^{j+1/2}=D^{(2), j+1/2}$ (формулы способов I и II) энергетически нейтральны. Для схемы с $D^{j+1/2}=D^{(3), j+1/2}$ имеем энстропийную нейтральность $(D^{(3), j+1/2}, \omega^{j+1/2})=0$. Для энергетически нейтральных схем имеем ана-

лог (5.13):

$$(5.15)\qquad E_{\bar t}^{j+1}+\nu\|\omega^{j+1/2}\|^2=0,$$

$$E=\frac{1}{2}\left(\sum_{\Omega_{h_1}}\psi_x{}^2h^{(1)}\hbar^{(2)}+\sum_{\Omega_{h_2}}\psi_y{}^2h^{(2)}\hbar^{(1)}\right),$$

$$(x_{i+1/2},x_k)\in\Omega_{h_1},\qquad (x_i,y_{k+1/2})\in\Omega_{h_2}.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство схем (5.10)–(5.12):

$$(5.16)\qquad D_{1,i+1/2,k}^{j+1/2}=\beta D_{1,i+1/2,k}^{(1),j+1/2}+(1-\beta)D_{1,i+1/2,k}^{(2),j+1/2},$$

$$D_{2,i,k+1/2}^{j+1/2}=\beta D_{2,i,k+1/2}^{(1),j+1/2}+(1-\beta)D_{2,i,k+1/2}^{(2),j+1/2}.$$

Очевидно, что это семейство схем энергетически нейтрально. Вычислим скалярные произведения от $\omega_{ik}^{j+1/2}$ на $D_{ik}^{j+1/2}$ для $D_{ik}^{j+1/2}=D_{ik}^{(1),j+1/2}$ и $D_{ik}^{j+1/2}=$ $=D_{ik}^{(2),j+1/2}$:

$$(D^{(1),j+1/2},\ \omega^{j+1/2})=F^{j+1/2},\qquad (D^{(2),j+1/2},\ \omega^{j+1/2})=-0.5F^{j+1/2}.$$

Сравнивая два последних равенства, замечаем, что энергетически нейтральная схема (5.10)–(5.12) из семейства (5.16) с $\beta={}^1/_3$ является и энстропийно нейтральной. Итак, схема (5.10)–(5.12) с

$$D_{1,i+1/2,k}^{j+1/2}=\frac{1}{3}D_{1,i+1/2,k}^{(1),j+1/2}+\frac{2}{3}D_{1,i+1/2,k}^{(2),j+1/2}\equiv\overline{D}_{1,i+1/2,k}^{j+1/2},$$

$$D_{2,i,k+1/2}^{j+1/2}=\frac{1}{3}D_{2,i,k+1/2}^{(1)}+\frac{2}{3}D_{2,i,k+1/2}^{(2),j+1/2}\equiv\overline{D}_{2,i,k+1/2}^{j+1/2}$$

является полностью нейтральной. Однопараметрическое семейство энстропийно нейтральных схем строится по $D_1{}^{(3)}$, $D_2{}^{(3)}$ и $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$.

Подобные аппроксимации на квадратной сетке ранее были получены в [81].

Замечания. 1. Вместо (5.3) можно ввести

$$(5.17)\qquad \omega_{ik}^{j+1/2}=\sigma\omega_{ik}^{j+1}+(1-\sigma)\omega_{ik}{}^j,\qquad \psi_{ik}^{j+1/2}=\sigma_{ik}^{j+1}+(1-\sigma)\psi_{ik}{}^j.$$

В этом случае в левую часть (5.15) следует добавить слагаемое $\tau(\sigma-0.5)+(\|\psi_{x\bar t}^{j+1}\|_1{}^2+$ $+\|\psi_{y\bar t}^{j+1}\|_2{}^2)$, $E^{j+1}\to 0$ при $t_{j+1}\to\infty$, если $\sigma\geqslant 0.5$. Предыдущие утверждения сохраняют силу.

2. Схемы (5.4)–(5.8) с $D=D^{(1)}$ и $D=D^{(2)}$ остаются энергетически нейтральными, если $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ вычислять по $\psi_{ik}^{j+1/2}$ из (5.17) (при $\sigma\geqslant 0.5$) и по $\omega_{ik}{}^j$. Схемы с $D=\overline{D}=$ $=(\overline{D}_1)_{\hat x}+(\overline{D}_2)_{\hat y}$, $D=D^{(3)}$ также энстропийно нейтральны, если $\overline{D}$ и $D^{(3)}$ вычислять по $\omega_{ik}^{j+1/2}$ из (5.17) (при $\sigma\geqslant 0.5$) и по $\psi_{ik}{}^j$. В этих случаях для ω^{j+1} и ψ^{j+1} получается линейная система уравнений.

Поступила в редакцию 22.05.1980

Цитированная литература

1. *А. А. Самарский.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Вестн. АН СССР, 1979, № 5, 38–40.
2. *А. А. Самарский.* Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.
3. *Н. Н. Моисеев.* Математика ставит эксперимент. М., «Наука», 1979.
4. *А. А. Самарский, Ю. П. Попов.* Вычислительный эксперимент в физике. В сб. «Наука и человечество». М., «Знание», 1975, 280–291.
5. *А. А. Самарский, Ю. П. Попов.* Разностные схемы газовой динамики. М., «Наука», 1975.
6. *В. Я. Карпов, Д. А. Корягин, А. А. Самарский.* Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, 18, № 2, 58–467.
7. *А. А. Самарский, А. В. Гулин.* Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973.
8. *А. А. Самарский, Е. С. Николаев.* Методы решения сеточных уравнений. М., «Наука», 1978.
9. *А. Н. Тихонов и др.* О многоцелевой проблемно-ориентированной системе обработки результатов эксперимента. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 142.
10. *Л. М. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т. I, II. М., «Наука», 1973.
11. *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
12. *С. Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
13. *В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский.* Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 65.
14. *В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский.* Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике. Докл. АН СССР, 1977, 235, № 6, 1285–1288.
15. *В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский, М. Ю. Шашков.* Алгоритм численного решения второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на непрямоугольной сетке. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 113.
16. *В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский, М. Ю. Шашков.* Вариационно-разностные схемы для уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках. Докл. АН СССР, 1979, 246, № 6, 1342–1346.
17. *В. М. Головизнин, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский.* Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений гидродинамики в сферических координатах. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 16.
18. *А. П. Фаворский.* Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 159; Дифференц. ур-ния, 1980, № 7, 1309–1322.
19. *В. М. Головизнин и др.* Численное моделирование МГД-задач на основе вариационного подхода. Тр. VI Междунар. конф. по числ. методам в гидродинамике, Тбилиси, 1978 г. Т. II. М., ИПМ АН СССР, 1978, 81–88.
20. *В. М. Головизнин и др.* Вариационные схемы магнитной гидродинамики в произвольной системе координат. В сб. «Изучение гидродинамич. неустойчивости числ. методами». М., ИПМ АН СССР, 1980, 162–185.
21. *Т. К. Коршия и др.* Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, 20, № 2, 401–421.
22. *Т. К. Коршия и др.* Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения диффузии магнитного поля. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 179.
23. *Ф. Р. Гантмахер.* Аналитическая механика. М., «Наука», 1963.
24. *R. L. Seliger, G. B. Whithat.* Variational principles in continuum mechanics. Proc. Roy. Soc., 1968, A-305, 1–25.
25. *Г. Корн, Т. Корн.* Справочник по математике. М., «Наука», 1970.

26. *В. А. Гасилов и др.* Численное моделирование компрессии тороидальной плазмы квазисферическим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 71.
27. *Р. А. Волкова и др.* Численное моделирование обжатия магнитного поля кумулирующим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 111.
28. *В. М. Головизнин и др.* Численное исследование разлета плазмы в магнитном поле. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 61.
29. *Е. Г. Гамалий и др.* Генерация и эволюция спонтанных магнитных полей в плотной лазерной плазме. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 155.
30. *Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер.* Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М., «Наука», 1966.
31. *П. П. Волосевич и др.* Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме. IX Междунар. конф. по явлениям в ионизованной плазме. Сб. докл. Бухарест, 1969, 348.
32. *В. Я. Гольдин, Б. Н. Четверушкин.* Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы. Препринт ИПМ АН СССР, 1970, № 12.
33. *В. Я. Гольдин, Б. Н. Четверушкин.* Эффективный метод решения уравнения переноса излучения в низкотемпературной плазме. Докл. АН СССР, 1970, 195, № 2, 315–317.
34. *В. Я. Гольдин, Б. Н. Четверушкин.* Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, 12, № 4, 990–1000.
35. *T. A. Fleck, Jr., T. D. Cummings.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlineal radiation transport. J. Comput. Phys., 1971, 8, № 2, 313–342.
36. *J. Zinn.* A finite difference scheme for time-dependent spherical radiation hydrodynamics problems. J. Comput. Phys., 1973, 13, № 4, 569–591.
37. *И. В. Немчинов.* Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач. Прикл. матем. и механ., 1970, 34, вып. 4, 706–722.
38. *В. Я. Гольдин.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 6, 1078–1084.
39. *Ю. Д. Шмыглевский.* Моментный метод расчета переноса селективного излучения. В сб. «Динамика излучающего газа». Вып. 2. М., ВЦ АН СССР, 1976.
40. *Д. С. Филиппычев, Б. Н. Четверушкин.* Об одном способе осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, 16, № 6, 1601–1605.
41. *Б. Н. Четверушкин.* Об одном методе совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, 10, № 5, 1290–1292.
42. *Ю. Н. Куликов, Б. Н. Четверушкин.* Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, 13, № 1, 136–146.
43. *А. И. Зуев.* Применение метода Ньютона – Канторовича для решения задачи о распространении неравновесного излучения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, 13, № 3, 792–798.
44. *В. Е. Трощиев, В. Ф. Юдинцев.* Итерационный метод постоянных поправок для решения спектральных задач переноса излучения. В сб. «Вопр. атомной науки и техн. Сер. Методики и программы числ. решения задач матем. физ.» Вып. 2(2). М., ЦНИИатоминформ, 1978, 13–16.
45. *В. Я. Гольдин и др.* Исследование задач магнитной радиационной газодинамики численными методами на ЭВМ. Препринт ИПМ АН СССР, 1971, № 36.
46. *П. П. Волосевич и др.* Некоторые стадии сильноточного разряда в плазме. Препринт ИПМ АН СССР, 1971, № 40.

47. *В. Я. Гольдин, Н. Н. Калиткин, Б. Н. Четверушкин.* Электротехническое приближение разрядов. Прикл. матем. и техн. физ., 1975, № 1, 41–44.
48. *С. И. Андреев и др.* Импульсные излучающие разряды в инертных газах. Докл. АН СССР, 1976, 226, № 3, 1045–1048.
49. *Б. Н. Четверушкин.* Решение одномерных задач радиационной газовой динамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 44.
50. *О. М. Белоцерковский, В. Н. Фомин.* Расчет течений излучающего газа в ударном слое. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, № 9, № 2, 397–412.
51. *И. Н. Наумова, Ю. Д. Шмыглевский.* Метод дискретных ординат в динамике осесимметричного потока излучающего газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 3, 803–806.
52. *M. T. Sandford et al.* Improved, implicit radiation hydrodynamics. J. Comput. Phys., 1975, 19, № 3, 280–297.
53. *М. И. Волчинская, Б. Н. Четверушкин.* Методика решения двумерных нестационарных задач динамики излучающего газа. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 98.
54. *М. И. Волчинская, Б. Н. Четверушкин.* Решение двумерных нестационарных задач радиационной газодинамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, 19, № 5, 1262–1275.
55. *Б. Н. Четверушкин.* Об одном итерационном алгоритме решения разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, 16, № 2, 519–524.
56. *М. И. Волчинская, Б. Н. Четверушкин.* Об одном итерационном методе решения двумерных уравнений диффузии излучения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, 17, № 2, 428–436.
57. *О. С. Мажорова.* Итерационный метод решения двумерных матричных уравнений. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 48.
58. *Г. Е. Репина, Б. Н. Четверушкин.* Об одном методе решения уравнения переноса излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, 19, № 6, 1513–1520.
59. *В. С. Владимиров.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. МИАН СССР, 1961, вып. 61.
60. *И. А. Бахарев и др.* Методика использования расширенной памяти. БЭСМ-6. Препринт ИПМ АН СССР, 1977.
61. *Н. Н. Рыкалин и др.* Воздействие излучения на металлы при высоких давлениях окружающей среды. Квантовая электроника, 1974, 1, № 9, 1928–1933.
62. *Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, М. М. Низаметдинов.* Особенности взаимодействия излучения лазера с материалами при высоком давлении окружающей среды. Ж. эксперим. и теор. физ., 1975, 69, № 2, 722–731.
63. *М. И. Волчинская и др.* Численное моделирование двумерной задачи эволюции лазерной плазмы вблизи металлической поверхности. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 118.
64. *В. Е. Захаров.* Коллапс ленгмюровских волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1972, 62, 1745–1759.
65. *Дж. Даусон.* Электростатическая модель плоских листов для плазмы и ее модификация для частиц конечного размера. В сб. «Вычисл. методы в физ. плазмы». М., «Мир», 1974, 11–38.
66. *Ю. С. Сигов, Ю. В. Ходырев.* К теории дискретных моделей плазмы. Препринт ИПМ АН СССР, 1975, № 83.
67. *S. A. Orszag.* Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I. Galerkin (spectral) representation. Studies Appl. Math., 1971, 50, 293–327.
68. *S. A. Orszag.* Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. J. Fluid Mech., 1971, 49, 75–112.
69. *J. P. Christiansen, R. W. Hockney.* Four 67, A fast Fourier transform package. Computer Phys. Communs, 1971, 2, № 12, 127–138.
70. *Л. М. Дегтярев.* О численном моделировании ленгмюровской турбулентности. Докл. АН СССР, 1979, 248, № 1, 71–73.

71. *Б. Л. Рождественский и др.* О методах численного моделирования турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 14.
72. *Т. А. Горбушина и др.* Одномерная турбулентность ленгмюровских волн. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 17.
73. *Л. М. Дегтярев и др.* Образование «хвостов» быстрых электронов в сильной ленгмюровской турбулентности. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 543.
74. *В. Д. Шафранов.* Равновесие плазмы в магнитном поле. В сб. «Вопр. теории плазмы». Вып. 2. М., Атомиздат, 1963, 92–131.
75. *K. Lacner.* Computation of ideal MHD equilibria. Computer Phys. Communs, 1976, 12, 33–34.
76. *B. McNamara.* Equilibria of magnetically on fined plasmas. In «Methods in Comput. Phys.» Vol. 16. New York, Acad. Press, 211–252.
77. *П. Н. Вабищевич, Л. М. Дегтярёв, А. П. Фаворский.* Метод обращения переменных в задачах МГД-равновесия. Физ. плазмы, 1978, 4, № 5, 995–1000.
78. *П. Н. Вабищевич, Л. М. Дегтярёв, Ю. Ю. Пошехонов.* Численное решение прямой и обратной задачи МГД-равновесия с поверхностным током. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, 20, № 2, 491–500.
79. *П. Н. Вабищевич, Л. М. Дегтярёв.* Об одном методе решения задачи со свободной границей для эллиптических уравнений и систем. Докл. АН СССР, 1979, 247, № 6, 1342–1364.
80. *П. Н. Вабищевич, Л. М. Дегтярёв, В. В. Дроздов.* Ортогональные потоковые координаты в задачах МГД-равновесия. Препринт ИПМ АН СССР, 1980, № 5.
81. *A. Arakawa.* Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion. Two-dimensional incompressible flow. Part I. J. Comput. Phys., 1966, 1, 119–143.
82. *В. Л. Грязнов, В. И. Полежаев.* Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции. Препринт ИПМехан., 1974, № 40.
83. *Б. Д. Моисеенко, И. В. Фрязинов.* Полностью нейтральная разностная схема для уравнений Навье – Стокса. В сб. «Изучение гидродинамич. неустойчивости числ. методами». М., ИПМ АН СССР, 1980, 188–209.