такая, что $u_{n_k} \to u$ *слабо в* W_2^1, $|u_{n_k}|^{\gamma} u_{n_k} \to |u|^{\gamma} u$ *слабо в* W_2^1, *где* u – *решение задачи* A, *соответствующее* $g = g_0 + g_\Gamma$.

Всюду функции u, u_n, I_n были произвольного знака. Однако отрицательные значения абсолютной температуры и интенсивности излучения лишены физического смысла. Достаточные условия неотрицательности решений даются следующими утверждениями.

Утверждение 1. *Пусть* u – *решение задачи* A, *соответствующее* $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. *Тогда* $u \geqslant 0$.

Утверждение 2. *Пусть* (u_n, I_n) – *решение задачи* B_n, *соответствующее* $f \geqslant 0$, $g_0 \geqslant 0$, $I_\Gamma \geqslant 0$. *Если для всех* $j = 1, \ldots, J$ *и* $\forall c \neq 0$ $\operatorname{mes}\{\lambda \mid \int_{G_j} \kappa_n(\lambda, x, c)dx > 0\} > 0$, *то* $u_n \geqslant 0$, $I_n \geqslant 0$.

Замечание 3. Результаты теорем 1–6 обобщены на достаточно широкий класс функций $h(u)$, $\varphi(\xi, x)$, $i(\lambda, u)$ для случая произвольной размерности N пространства R^N, содержащего G. При этом на части границы условия (2) и (5) можно заменить условиям Дирихле.

Замечание 4. Для $i \neq j$ требование $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \phi$ можно заменить условием $G_i \cap G_j = \phi$. В этом случае при формулировке задачи A на $\partial G_{kl} = \partial G_k \cap \partial G_l$ при $k \neq l$ вместо (2) ставится условие

$$a_{ij}(x, u^k) u^k_{x_j} \cos(n^k(x), x_i) + \Psi(x, u^k, u^l) + h(u^k) = h(u^l),$$

где $u = u^k$ на G_k, n^k – внешняя нормаль к ∂G_k. Функция Ψ характеризует конвективный теплообмен между G_k и G_l на общей части границы ∂G_{kl}. При этом имеют место аналоги теорем 1, 2 и утверждения 1.

Автор благодарит Н.С. Бахвалова за научное руководство.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
11 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В.С. Владимиров*, Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 61, 3 (1961). [2] *А.А. Амосов*, Матем. заметки, т. 22, № 1, 117 (1977). [3] *А.А. Амосов*, ДАН, т. 245, № 5 (1979).

УДК 517,949:533.6.011

В.М. ГОЛОВИЗНИН, академик А.А. САМАРСКИЙ, А.П. ФАВОРСКИЙ

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

1. Дифференциальные уравнения магнитной гидродинамики и все их свойства могут быть получены из вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия для механических систем с конечным числом степеней свободы ([1], [2]). Вариационный принцип может быть положен также и в основу получения разностных схем ([3], [4]). Ниже рассматривается вариационный метод получения дифференциально-разностных (дифференциальных по времени, разностных по пространству) моделей бесконечноэлектропроводной сплошной среды, погруженной в магнитное поле. Для простоты изложения диссипативные процессы не учитываются.

2. Пусть некоторому жидкому объему G в плоскости декартовых координат (x, y) соответствует область Ω в лагранжевых переменных (α, β). Функ-

ционал действия для недиссипативной среды с бесконечной электропроводностью в присутствии магнитного поля $\mathbf{H} = (H_x, H_y)$ определим выражением ([4])

$$(1)\qquad S = \int_{t_0}^{t_1} L(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{\Omega} \rho\Delta \left[\frac{u^2+v^2}{2} - E - \frac{1}{8\pi\rho}\,(H_x^2 + H_y^2) \right] d\alpha d\beta \right\} dt,$$

где $L(t)$ – лагранжиан жидкого объема G, ρ – плотность среды; u, v – проекции вектора скорости на оси x и y соответственно, E – удельная внутренняя энергия, $\Delta = D(x,y)/D(\alpha,\beta)$ – якобиан перехода от эйлеровых координат к лагранжевым.

Согласно принципу наименьшего действия ([1]) движение среды происходит так, что первая вариация функционала (1) обращается в нуль. Варьирование выражения (1) следует проводить с учетом дополнительных связей ([4]), а именно: уравнения неразрывности и первого начала термодинамики

$$(2)\qquad \rho\Delta = \tilde{\rho}(\alpha,\beta), \quad dE = -(P/\tilde{\rho})\,d\Delta,$$

а также условий вмороженности магнитного поля

$$(3)\qquad H_x \frac{\partial y}{\partial\alpha} - H_y \frac{\partial x}{\partial\alpha} = \Phi_\alpha(\alpha,\beta), \quad H_x \frac{\partial y}{\partial\beta} - H_y \frac{\partial x}{\partial\beta} = \Phi_\beta(\alpha,\beta).$$

Здесь $\tilde{\rho}(\alpha,\beta)$ – плотность среды в лагранжевых переменных, а величины $\Phi_\alpha(\alpha,$ имеют смысл плотности магнитных потоков соответственно через площадки $d\alpha$ и $d\beta$, причем $\Phi_\alpha(\alpha,\beta)$ и $\Phi_\beta(\alpha,\beta)$ связаны условиями соленоидальности

$$\partial\Phi_\beta/\partial\alpha - \partial\Phi_\alpha/\partial\beta = 0.$$

Соотношения (2), (3) позволяют выразить вариации $\delta\rho, \delta E, \delta H_x, \delta H_y$, входящие в δS, через вариации величин $\delta x, \delta y$:

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{\Delta}\,\delta\Delta, \quad \delta\Delta = \frac{D(\delta x, y)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{D(x,\delta y)}{D(\alpha,\beta)}, \quad \delta E = -\frac{P}{\tilde{\rho}}\,\delta\Delta,$$

$$\delta H_x = -\frac{1}{\Delta}\left(\Phi_\alpha \frac{\partial\delta x}{\partial\beta} - \Phi_\beta \frac{\partial\delta x}{\partial\alpha}\right) - \frac{H_x}{\Delta}\,\delta\Delta,$$

$$\delta H_y = \frac{1}{\Delta}\left(\Phi_\beta \frac{\partial\delta y}{\partial\alpha} - \Phi_\alpha \frac{\partial\delta y}{\partial\beta}\right) - \frac{H_y}{\Delta}\,\delta\Delta.$$

Требование равенства нулю первой вариации функционала действия (1) на любых допустимых вариациях δx, δy, обращающихся в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$, и на границе γ области Ω приводит к дифференциальным динамическим уравнениям в лагранжевых переменных

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\tilde{\rho}\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial y}{\partial\beta}\right] - \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_x\Phi_\beta}{4\pi} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_x\Phi_\alpha}{4\pi} = 0, \\ &\tilde{\rho}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_y\Phi_\beta}{4\pi} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_y\Phi_\alpha}{4\pi} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (2) эквивалентны дифференциальным уравнениям

$$(2')\qquad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}.$$

Систему уравнений магнитной гидродинамики $(2')$, (3), (4) замыкает уравнение состояния $P = P(\rho, E)$.

3. Пользуясь известным произволом в выборе лагранжевых переменных, будем считать, что $\Omega(\alpha, \beta)$ представляет собой единичный квадрат. В области Ω введем прямоугольную сетку с шагами h_α, h_β. Пусть $\overline{\omega}$ – множество узлов этой сетки, ω – множество центров ее ячеек. Через $\mathcal{H}_\omega$ и $\mathcal{H}_{\overline{\omega}}$ будем обозначать множества сеточных функций, заданных соответственно на ω и $\overline{\omega}$. Отнесем значения скоростей и координат частиц жидкости к $\overline{\omega}$: x_{ij}, y_{ij}, u_{ij}, $v_{ij} \in \mathcal{H}_{\overline{\omega}}$, $(i,j) \in \overline{\omega}$, а все термодинамические величины и компоненты вектора магнитного поля – к ω: ρ_{ij}, P_{ij}, E_{ij}, $(H_x)_{ij}$, $(H_y)_{ij} \in \mathcal{H}_\omega$, $(i,j) \in \omega$.

Аппроксимируем функционал (1) дискретным по пространству выражением

$$S_h = \int_{t_0}^{t_1} L_h(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \sum_{(i,j)\in\omega} \langle \rho \rangle_{ij} \langle \Delta \rangle_{ij} \Bigg[\frac{\langle u^2 \rangle_{ij} + \langle v^2 \rangle_{ij}}{2} - \tag{5}$$

$$- \langle E \rangle_{ij} - \frac{1}{8\pi \langle \rho \rangle_{ij}} \left(\langle H_x \rangle_{ij}^2 + \langle H_y \rangle_{ij}^2 \right) \Bigg] h_\alpha h_\beta \Bigg\} dt,$$

где угловыми скобками обозначены некоторые линейные функционалы от соответствующих сеточных функций, т.е.

$$\langle f \rangle_{ij} = F_f^{ij}(\mathrm{f}), \quad (i,j) \in \omega, \quad \mathrm{f} \in \mathcal{H}_\omega \wedge \mathcal{H}_{\overline{\omega}}.$$

Уравнение неразрывности, первое начало термодинамики (2) и условия постоянства магнитного потока через любую "жидкую" линию (3) также заменим соответствующими функциональными равенствами:

$$\langle \rho \rangle_{ij} \langle \Delta \rangle_{ij} = \langle \widetilde{\rho} \rangle_{ij}, \quad d\langle E \rangle_{ij} = - \frac{\langle P \rangle_{ij}}{\langle \widetilde{\rho} \rangle_{ij}} \, d\langle \Delta \rangle_{ij},$$

$$\langle H_x \rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} - \langle H_y \rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} = \langle \Phi_\alpha \rangle_{ij}, \tag{6}$$

$$\langle H_x \rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} - \langle H_y \rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} = \langle \Phi_\beta \rangle_{ij}, \quad (i,j) \in \omega.$$

Отметим, что выбранная форма аппроксимации (5), (6) не является единственной.

Выражения (5), (6) совместно с уравнением состояния $P_{ij} = P(\rho_{ij}, E_{ij})$ и кинематическими соотношениями $u_{ij} = \dfrac{dx_{ij}}{dt}$, $v_{ij} = \dfrac{\partial y_{ij}}{dt}$ определяют все свойства дискретной модели. Задаваясь различными видами функционалов F_f^{ij}, мы будем получать различные дискретные модели среды.

4. От линейных функционалов F_f^{ij} потребуем, чтобы они, во-первых, аппроксимировали с заданным порядком точности соответствующие величины и, во-вторых, чтобы линейные уравнения $\langle \rho \rangle_{ij} = q_{ij}$, $\langle E \rangle_{ij} = \varphi_{ij}$, $\langle H_x \rangle_{ij} = \Psi_{ij}$, $\langle H_y \rangle_{ij} = Q_{ij}$ были однозначно разрешимы относительно соответствующих сеточных функций при любых правых частях из множеств $\mathcal{H}_\omega$ и $\mathcal{H}_{\overline{\omega}}$. Потребуем также, чтобы выполнялись следующие естественные условия согласованности аппроксимаций:

$$\langle \Delta \rangle_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} - \left\langle \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}, \quad (i,j) \in \omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{k,n}} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial y_{k,n}} \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial x_{k,n}} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial y_{k,n}} \left\langle \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_{ij},$$

$(k, n) \in \overline{\omega}$.

Вводя обозначения

$$V_{ij} = h_\alpha h_\beta \langle \Delta \rangle_{ij}, \quad m_{ij} = \langle \widetilde{\rho} \rangle_{ij} h_\alpha h_\beta.$$

$$\Phi^{ij}_{k,n} = h_\alpha h_\beta \frac{\partial}{\partial x_{kn}} \left\{ \langle \Phi_\beta \rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij} - \langle \Phi_\alpha \rangle_{ij} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_{ij} \right\}, \quad (i, j) \in \omega,$$

$$(k, n) \in \overline{\omega},$$

представим равенства (6) соответственно в виде

$$(6') \quad \begin{aligned} &\langle \rho \rangle_{ij} V_{ij} = m_{ij}, \quad m_{ij} \frac{d \langle E \rangle_{ij}}{dt} = -\langle P \rangle_{ij} \frac{d V_{ij}}{dt}, \\ &\langle H_x \rangle_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{(k,n) \in \overline{\omega}} \Phi^{ij}_{k,n} x_{k,n}, \quad \langle H_y \rangle_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{(k,n) \in \overline{\omega}} \Phi^{ij}_{k,n} y_{k,n} \end{aligned}$$

Величину V_{ij} можно трактовать как площадь образа лагранжевой ячейки с вершинами $(i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1), (i, j) \in \overline{\omega}$, а m_{ij} – как массу среды, заключенную внутри этой ячейки,

Выпишем выражение для первой вариации функционала (5):

$$(7) \quad \delta S_h = \int_{t_0}^{t_1} \delta L_h(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{(i,j) \in \omega} m_{ij} \sum_{k,n \in \overline{\omega}} \left[\frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial u^2_{kn}} u_{kn} \delta u_{kn} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial \langle v^2 \rangle_{ij}}{\partial v^2_{kn}} v_{kn} \delta v_{kn} \right] - m_{ij} \delta \langle E \rangle_{ij} - \frac{V_{ij}}{4\pi} \Big[\langle H_x \rangle_{ij} \delta \langle H_x \rangle_{ij} +$$

$$\left. + \langle H_y \rangle_{ij} \delta \langle H_y \rangle_{ij} \Big] - \frac{1}{8\pi} \left[\langle H_x \rangle^2_{ij} + \langle H_y \rangle^2_{ij} \right] \delta V_{ij} \right\} dt.$$

Соотношения (6′) позволяют выразить вариации $\delta \langle E \rangle_{ij}, \delta \langle H_x \rangle_{ij}, \delta \langle H_y \rangle_{ij}$, входящие в (7), через вариации величин δx_{ij}, δy_{ij}. Требование равенства нулю первой вариации (7) при любых δx_{ij}, δy_{ij}, обращающихся в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$, приводит к дифференциально-разностным динамическим уравнениям

$$(8) \quad \begin{aligned} &M^{ij}_x \frac{du_{ij}}{dt} - \sum_{k,n \in \omega} \left\{ \left[\langle P \rangle_{ij} + \frac{\langle H_x \rangle^2_{ij} + \langle H_y \rangle^2_{ij}}{8\pi} \right] \frac{\partial V_{kn}}{\partial x_{ij}} + \frac{\langle H_x \rangle_{kn} \Phi^{kn}_{ij}}{4\pi} \right\} = 0, \\ &M^{ij}_y \frac{dv_{ij}}{dt} - \sum_{k,n \in \omega} \left\{ \left[\langle P \rangle_{ij} + \frac{\langle H_x \rangle^2_{ij} + \langle H_y \rangle^2_{ij}}{8\pi} \right] \frac{\partial V_{kn}}{\partial y_{ij}} + \frac{\langle H_y \rangle_{kn} \Phi^{kn}_{ij}}{4\pi} \right\} = 0; \\ &M^{ij}_x = \sum_{k,n \in \omega} m_{k,n} \frac{\partial \langle u^2 \rangle_{k,n}}{\partial u^2_{ij}}, \quad M^{ij}_y = \sum_{k,n \in \omega} m_{k,n} \frac{\partial \langle v^2 \rangle_{k,n}}{\partial v_{ij}}. \end{aligned}$$

Магнитное поле, входящее в (6′), (8), должно удовлетворять условию соленоидальности

$$\sum_{k,n \in \omega} \left[\langle H_x \rangle_{k,n} \frac{\partial V_{k,n}}{\partial x_{i,j}} + \langle H_y \rangle_{k,n} \frac{\partial V_{k,n}}{\partial y_{ij}} \right] \equiv 0, \quad (i, j) \in \overline{\omega}.$$

Если это условие удовлетворяется при $t = t_0$, то оно остается справедливым и во все последующие моменты времени.

Уравнения (6′), (8) совместно с уравнением состояния $P_{ij} = P(\rho_{ij}, E_{ij})$ представляют собой замкнутую систему уравнений.

5. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что полученные дифференциально-разностные уравнения обладают свойством полной консерватив-

ности ([5]). Уравнения (8) представляют собой консервативную форму записи закона сохранения импульса. Уравнения, входящие в (6′), также имеют смысл законов сохранения, а именно сохранения массы, энтропии и потоков магнитного поля. Из условий сохранения магнитных потоков может быть получено и уравнение для изменения энергии магнитного поля. Наконец, уравнения (8), уравнение (6) и уравнение для энергии магнитного поля могут быть свернуты в закон сохранения полной энергии среды, имеющий дивергентный вид. Дискретные модели среды, описываемые системами таких самосогласованных дифференциально-разностных уравнений, назовем сбалансированными.

6. Теорема. *Если линейные функционалы* $\langle u^2 \rangle_{ij}, \langle v^2 \rangle_{ij}, \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_{ij}, \left\langle \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_{ij}$, $\langle \rho \rangle_{ij}, \langle P \rangle_{ij}, \langle E \rangle_{ij}, \langle \widetilde{\rho} \rangle_{ij}, \langle \Phi_\alpha \rangle_{ij}, \langle \Phi_\beta \rangle_{ij}$, *аппроксимируют соответствующие величины на множестве* ω *с точностью до* $O(h_\alpha^n, h_\beta^n)$ *и их вид постоянен во всех точках этого множества, то все уравнения системы* (6′), (8), *а также все вытекающие из этой системы уравнений интегральные законы сохранения аппроксимируют соответствующие им дифференциальные и интегральные выражения также с точностью до* $O(h_\alpha^n, h_\beta^n)$.

7. Дифференциально-разностные уравнения (6′), (8) не пригодны для моделирования магнитогидродинамических течений с ударными волнами. Для того чтобы устранить это ограничение, в уравнения (6′), (8) следует вводить искусственную диссипацию. Один из возможных подходов к построению искусственных диссипаторов для дифференциально-разностных уравнений, получаемых из вариационного принципа, предложен в ([6], [7]).

Уравнения (6′), (8) заменой производных по времени соответствующими разностями могут быть превращены в многослойные схемы. В классе двухслойных разностных схем нетрудно добиться выполнения условий полной консервативности ([7]).

8. Вариационный метод построения дискретных моделей сплошной среды естественным образом обобщается на случаи большей пространственной размерности и произвольных систем координат. В рамках изложенного подхода могут быть учтены и другие физические факторы, не влияющие на энтропию. Диссипативные процессы такие, как диффузия магнитного поля, вязкость и т.д., также можно включить в описанную схему введением соответствующих выражений для виртуальных работ ([1]).

Полностью консервативные, вариационно-разностные схемы магнитной гидродинамики, имеющие второй порядок аппроксимации как по пространству, так и по времени ([4], [7]), были положены в основу алгоритмов расчета ряда методических и прикладных задач ([8-10]).

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР
Москва

Поступило
9 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф.М. Морс, Г. Фешбах,* Методы теоретической физики, М., ИЛ., 1958. [2] *R.L. Selenger, G.B. Whitham,* Proc. Roy. Soc. A, v. 305, 1 (1968). [3] *В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский,* ДАН, т. 235, № 6, 1285 (1977). [4] *В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский,* Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1976. [5] *А.А. Самарский, Ю.П. Попов,* Разностные схемы газовой динамики, М., "Наука", 1975. [6] *В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский,* Препринт ИПМ АН СССР, № 70, 1976. [7] *В.М. Головизнин, В.Ф. Тишкин и др.,* Препринт ИПМ АН СССР, № 25, 1978. [8] *Р.А. Волкова, В.М. Головизнин и др.,* Препринт ИПМ АН СССР, № 111, 1976. [9] *В.А. Гасилов, В.М. Головизнин и др.,* Препринт ИПМ АН СССР, № 119, 1977. [10] *В.М. Головизнин, Т.К. Коршия и др.,* Препринт ИПМ АН СССР, № 61, 1978.